УДК 517.956.25

О нулях и полюсах одного класса функций с обобщёнными производными

Е. А. Щербаков, Е. Д. Остроушко

Кафедра теории функций
Кубанский государственный университет
ул. Ставропольская, д. 149, г. Краснодар, Россия, 350040

В работе обобщаются классические результаты Gergen J. J., Dressel F. G. на класс функций, имеющих обобщённые производные. Нами предполагается, что обобщённые производные функций оцениваются через основную функцию с помощью неограниченной весовой функции, имеющей особенность в изолированных точках границы.

Основу метода исследования составляют оценки функций, которые представляются операторами потенциального типа, с помощью итерационных процессов. В результате таких итераций достигается понижение степеней особенностей ядер операторов потенциального типа.

Использование предлагаемого в работе метода основывается на интегральном представлении И. Н. Векуа и его модификации, имеющей вид представления из работы Gergen J. J., Dressel F. G. для функций, обладающих суммируемыми по области обобщёнными производными. При этом роль произвольных обобщённых констант в таком представлении играют аналитические функции. Нами рассматриваются классы функций, для которых соответствующие им обобщённые константы имеют конечное число нулей и полюсов.

В работе доказаны теоремы о поведении рассматриваемых функций в окрестностях их нулей. Кроме того, нами изучено их поведение в окрестностях точек, в которых они не имеют конечных пределов.

Основной результат работы состоит в доказательстве теоремы об оценке нулей и полюсов функций рассматриваемого класса, являющейся обобщением результата работы Gergen J. J., Dressel F. G.

Ключевые слова: функции с обобщёнными производными, интегральные представления функций, нули и полюсы функций, весовые функции.

1. Введение

Обозначим через Ω класс функций $W \in L_2(S)$, заданных в круге

$$S := \{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}, \quad z = x + iy.$$

Относительно обобщённых производных $W_{\bar z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) W$ этих функций [1, 2] предполагается, что они удовлетворяют условию $|W_{\bar z}(z)| \leqslant M(z)\,|W(z)|$, где $M(z)$ — весовая функция, определяемая равенством

$$M(z) = \frac{c}{|z - z_0|^{\alpha}}, \quad \alpha < \frac{1}{2}, \quad c > 0, \quad z_0 \in \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}.$$

В работе доказаны теоремы о нулях и полюсах функций класса Ω.

Как известно [3], для функции W, такой что $W_{\bar z} \in L_p(S)$, $p \geqslant 1$, имеет место представление

$$W(z) = \Psi(z) + \iint\limits_S K_1 W_{\bar\zeta} \mathrm{d}S_\zeta. \tag{1}$$

Здесь $\Psi(z)$ — аналитическая в области S функция, и $K_1 = K_1(z, \zeta) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{z - \zeta}$.

Статья поступила в редакцию 8 июня 2014 г.

Поскольку функция

$$\iint\limits_S \frac{\overline{W}_{\bar{\zeta}}}{a^2 - z\bar{\zeta}} \mathrm{d}S_\zeta$$

аналитична внутри S, то представление (1) можно переписать в виде [4]

$$W(z) = \Phi(z) + \iint\limits_S \left[K_1 W_{\bar{\zeta}} + K_2 \overline{W}_{\bar{\zeta}}\right] \mathrm{d}S_\zeta. \tag{2}$$

Здесь $\Phi(z)$ — аналитическая в области S функция, $K_2 = K_2(z,\zeta) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{a^2 - z\bar{\zeta}}$.

2. О поведении функций с обобщёнными производными в окрестностях нулей

Теорема 1. *Пусть функция* $W \in \Omega \cap C(S)$. *Допустим, что* $W \not\equiv 0$ *на* S. *Если выполняется одно из следующих условий*

$$\zeta_0 \in S, \quad W(\zeta_0) = 0, \tag{3}$$

или

$$\zeta_0 \in \Gamma, \quad \Phi \text{ — регулярная в точке } \zeta_0 \quad \text{и} \quad W(z) \to 0, \quad z \to \zeta_0, \tag{4}$$

то существует натуральное число $n = n(\zeta_0)$ *такое, что*

$$\lim_{z \to \zeta_0} \frac{W(z)}{(z - \zeta_0)^n} \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство. В том случае, когда $\zeta_0 \neq z_0$, этот результат является известным [4]. Рассмотрим теперь случай, когда $z_0 = \zeta_0 \in \Gamma$.

Докажем прежде всего следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $W \in \Omega \cap C(S)$. *Допустим, что* $W(\zeta_0) \neq 0$, $\zeta_0 \in \overline{S}$. *В том случае, когда* $\zeta_0 \in \Gamma$ *предположим дополнительно, что функция* Φ *представления* (2) *регулярна в точке* ζ_0. *Если не существует такого* n, *при котором условие* (5) *выполняется, то* $W \equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* ζ_0.

Доказательство. В том случае, когда ζ_0 — внутренняя точка S, этот результат является известным [4]. Рассмотрим теперь случай граничной точки ζ_0 и рассмотрим наиболее трудный случай, когда $\zeta_0 = z_0$. Заметим, что остаточный член в формуле Тейлора для Φ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$R_n(z) = \Phi(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\Phi^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Выберем положительные числа C_1, h_1 такие, что справедлива следующая оценка остаточного члена $|R_n(z)| \leqslant C_1^n |z - z_0|^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, $z \in \sigma(h_1, z_0)$. Здесь и в дальнейшем $\sigma(r, z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

Так как функция Φ регулярна в точке z_0, то существуют положительные числа B_0, h_2, $h_2 < a$, такие, что $|W(z)| \leqslant B_0$, $z \in \sigma(2h_2, z_0)$ [5].

Пусть

$$T_{1n} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{z - \zeta} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

$$T_{2n} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a^2 \bar{\zeta}^n}{a^2 - z\bar{\zeta}} \left(\frac{z - z_0}{a^2 - z_0 \bar{\zeta}} \right)^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

$$T_{qn} = K_q(z, \zeta) - \sum_{j=0}^{n} \frac{K_q^{(j)}(z_0, \zeta)}{j!} (z - z_0)^j, \quad q = 1, 2. \tag{8}$$

Ядра $K_q^{(j)}$, $q = 1, 2$, $j = \overline{0, n}$, определяются с помощью выражений (6)–(8). Построим класс I неотрицательных целых чисел n, для которых справедливы следующие три условия

$$|W(z)| \leqslant B_n \left| z - z_0 \right|^n, \quad z \in \sigma = \sigma(h, z_0), \tag{9}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{W(z)}{(z - z_0)^j} = \frac{\Phi^{(j)}(z_0)}{j!} + \\ + \iint\limits_S \left[\frac{K_1^{(j)}(z_0, \zeta)}{j!} W_{\bar{\zeta}}(\zeta) + \frac{K_2^{(j)}(z_0, \zeta)}{j!} \overline{W}_{\bar{\zeta}}(\zeta) \right] \mathrm{d}S_\zeta, \quad j = \overline{0, n}, \tag{10}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{W(z)}{(z - z_0)^n} = 0. \tag{11}$$

Поскольку $n = 0 \in I$, то класс I непустой. Докажем, что все множество натуральных чисел принадлежит I. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что наше утверждение верно для $n \in I$. Покажем, что $(n + 1) \in I$.

Заметим, что равенство (10) выполняется для всех значений j, $j = \overline{0, n}$. Умножая каждое j-е равенство в (10) на $(z - z_0)^j$ и производя суммирование по индексу j, изменяющемуся от 0 до n, мы получаем с учётом (9) следующий результат

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\Phi^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j + \iint\limits_S W_{\bar{\zeta}}(\zeta) \sum_{j=0}^{n} \frac{K_1^{(j)}(z_0, \zeta)}{j!} (z - z_0)^j \mathrm{d}S_\zeta + \\ + \iint\limits_S \overline{W}_{\bar{\zeta}}(\zeta) \sum_{j=0}^{n} \frac{K_2^{(j)}(z_0, \zeta)}{j!} (z - z_0)^j \mathrm{d}S_\zeta = 0. \tag{12}$$

Используя интегральное представление (2) и равенство (12), приходим к равенству

$$W(z) = \left[\Phi(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\Phi^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j \right] + \\ + \iint\limits_S W_{\bar{\zeta}}(\zeta) \left[K_1(z, \zeta) - \sum_{j=0}^{n} \frac{K_1^{(j)}(z_0, \zeta)}{j!} (z - z_0)^j \right] \mathrm{d}S_\zeta + \\ + \iint\limits_S \overline{W}_{\bar{\zeta}}(\zeta) \left[K_2(z, \zeta) - \sum_{j=0}^{n} \frac{K_2^{(j)}(z_0, \zeta)}{j!} (z - z_0)^j \right] \mathrm{d}S_\zeta = \\ = R_n(z) + \iint\limits_S \left[T_{1n}(z, \zeta) W_{\bar{\zeta}}(\zeta) + T_{2n}(z, \zeta) \overline{W}_{\bar{\zeta}}(\zeta) \right] \mathrm{d}S_\zeta. \tag{13}$$

Перепишем теперь представление (13) в следующем виде

$$W(z)=R_n(z)+\iint\limits_{S\setminus\sigma}\left[T_{1n}(z,\zeta)W_{\bar\zeta}(\zeta)+T_{2n}(z,\zeta)\overline{W}_{\bar\zeta}(\zeta)\right]\mathrm{d}S_\zeta+$$
$$+\iint\limits_{\sigma}\left[T_{1n}(z,\zeta)W_{\bar\zeta}(\zeta)+T_{2n}(z,\zeta)\overline{W}_{\bar\zeta}(\zeta)\right]\mathrm{d}S_\zeta. \quad (14)$$

Допустим, что при $n=k$ справедлива следующая оценка

$$|W(z)|\leqslant B_k\left|z-z_0\right|^k, \quad (15)$$

в которой

$$B_k=\left(C_1^{k-1}+\frac{cm_1}{\pi h(2h)^{k+\alpha}}+\frac{B_0m_2}{\pi h^k}\right)\left[1+\frac{m_3}{\pi}\right]+\frac{B_{k-1}m_4}{\pi^2},$$

$$m_1=\iint\limits_{S\setminus\sigma_1}|W(\zeta)|\,\mathrm{d}S_\zeta,\quad m_2=\iint\limits_{\sigma_1\setminus\sigma}\frac{|M(\zeta)|}{|z-\zeta|}\mathrm{d}S_\zeta,\quad m_3=\iint\limits_{\sigma}\frac{|M(\zeta)|}{|z-\zeta|}\mathrm{d}S_\zeta,$$

$$\sigma_1=\sigma(2h,z_0),\quad h=\min(h_1,h_2),$$

$$m_4=\iint\limits_{\sigma}\frac{|M(\zeta)|}{|z-\zeta|}\mathrm{d}S_\zeta\iint\limits_{\sigma}\frac{|M(t)|}{|\zeta-t|\,|t-z_0|}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}S_\zeta.$$

Покажем теперь, что оценка (15) верна и для $n=k+1$. Действительно,

$$|W(z)|\leqslant|R_k(z)|+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S\setminus\sigma_1}\frac{\left|z-z_0\right|^{k+1}}{|z-\zeta|\left|\zeta-z_0\right|^{k+1}}\left|M(\zeta)\right|\left|W(\zeta)\right|\mathrm{d}S_\zeta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma_1\setminus\sigma}\frac{\left|z-z_0\right|^{k+1}}{|z-\zeta|\left|\zeta-z_0\right|^{k+1}}\left|M(\zeta)\right|\left|W(\zeta)\right|\mathrm{d}S_\zeta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{\left|z-z_0\right|^{k+1}}{|z-\zeta|\left|\zeta-z_0\right|^{k+1}}\left|M(\zeta)\right|\left|W(\zeta)\right|\mathrm{d}S_\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\left\{C_1^k+\frac{cm_1}{\pi h(2h)^{k+1+\alpha}}+\frac{B_0m_2}{\pi h^{k+1}}+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{|M(\zeta)|\,|W(\zeta)|}{|z-\zeta|\left|\zeta-z_0\right|^{k+1}}\mathrm{d}S_\zeta\right\}\left|z-z_0\right|^{k+1}. \quad (16)$$

Последовательно применяя неравенство (16), мы получаем с помощью такого итерационного процесса следующий результат

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{|M(\zeta)|\,|W(\zeta)|}{|z-\zeta|\left|\zeta-z_0\right|^{k+1}}\mathrm{d}S_\zeta\leqslant\left[C_1^k+\frac{cm_1}{\pi h(2h)^{k+1+\alpha}}+\frac{B_0m_2}{\pi h^{k+1}}\right]m_3+$$
$$+\frac{B_k}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{|M(\zeta)|}{|z-\zeta|}\iint\limits_{\sigma}\frac{|M(t)|}{|\zeta-t|\,|t-z_0|}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}S_\zeta.$$

Используя полученную оценку в выражении (16), мы приходим к следующему неравенству

$$|W(z)| \leqslant \left\{ \left(C_1^k + \frac{cm_1}{\pi h (2h)^{k+1+\alpha}} + \frac{B_0 m_2}{\pi h^{k+1}} \right) \left[1 + \frac{m_3}{\pi} \right] + \frac{B_k m_4}{\pi^2} \right\} |z - z_0|^{k+1}.$$

Итак, в соответствии с методом математической индукции оценка (15) имеет место для любых $n \in N$.

Покажем теперь, что (10) выполняется с заменой n на $n+1$. Ясно, что для этого нам осталось проверить существование предела

$$\lim_{z \to z_0} \frac{W(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Из условия (11) получаем

$$\frac{W(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{R_n(z)}{(z-z_0)^{n+1}} + \\ + \frac{1}{\pi} \iint\limits_S \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z)} W_{\bar\zeta} \mathrm{d}S_\zeta + \frac{1}{\pi} \iint\limits_S \frac{a^2 \bar\zeta^n}{(a^2 - z_0\bar\zeta)^{n+1}(a^2 - z\bar\zeta)} \overline{W}_{\bar\zeta} \mathrm{d}S_\zeta.$$

Мы, очевидно, имеем, что

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R_n(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{\Phi^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}.$$

Покажем теперь, что функция $I_1(z)$,

$$I_1(z) := \frac{1}{\pi} \iint\limits_S \frac{W_{\bar\zeta}(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z)} \mathrm{d}S_\zeta$$

является непрерывной в $\overline{S}$. Действительно, $\left|W_{\bar\zeta}(\zeta)\right| \leqslant M(z)\,|W(z)|$. Следовательно,

$$\frac{\left|W_{\bar\zeta}(\zeta)\right|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \leqslant \frac{B_{n+1} \cdot c}{|\zeta - z_0|^{\alpha}}.$$

Эта функция, очевидно, принадлежит пространству $L_p(S)$, $p > 2$. Следовательно, функция $I_1(z)$ непрерывна в замкнутом круге. Аналогичным образом доказывается непрерывность функции $I_2(z)$,

$$I_2(z) := \frac{1}{\pi} \iint\limits_S \frac{a^2 \bar\zeta^n}{(a^2 - z_0\bar\zeta)^{n+1}(a^2 - z\bar\zeta)} \overline{W}_{\bar\zeta} \mathrm{d}S_\zeta.$$

Итак,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R_n(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{\Phi^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + I_1(z_0) + I_2(z_0).$$

Таким образом мы получили условие (10) с заменой n на $n+1$. По предположению не существует такого n, для которого

$$\lim_{z \to z_0} \frac{W(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \neq 0.$$

Следовательно, условие (11) выполняется с заменой n на $n+1$. Это означает, что множество I совпадает с N.

Покажем теперь, что в некоторой окрестности точки z_0 функция W тождественно равна нулю.

Пусть C_2 — число, определяемое неравенством

$$\frac{cm_1}{\pi h(2h)^{n+1+\alpha}} + \frac{B_0 m_2}{\pi h^{n+1}} \leqslant C_2^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

тогда

$$B_{n+1} \leqslant C_1^n + C_2^n + C_3 B_n. \tag{17}$$

Здесь $C_3 = \dfrac{m_4}{\pi(\pi + m_3)}$.

Умножим теперь обе части неравенства (17) на r^{n+1}, $0 < r < \dfrac{1}{2C_3}$ и просуммируем полученные выражения от 0 до N. В результате мы приходим к неравенству

$$\sum_{n=0}^{N} r^{n+1} B_{n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{N} r^{n+1} C_1^n + \sum_{n=0}^{N} r^{n+1} C_2^n + C_3 \sum_{n=0}^{N} r^{n+1} B_n. \tag{18}$$

Из неравенства (18) мы получаем

$$\sum_{m=1}^{N+1} r^m B_m \leqslant B_0 + \frac{1}{C_3} \sum_{m=1}^{N+1} (C_1^m + C_2^m)\, r^m. \tag{19}$$

Переходя в неравенстве (19) к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} B_{n+1} \leqslant B_0 + \frac{1}{C_3} \sum_{n=0}^{\infty} (C_1^n + C_2^n)\, r^n.$$

Пусть $r < \min\left(\dfrac{1}{C_1}, \dfrac{1}{C_2}, \dfrac{1}{2C_3}\right)$, тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (C_1^n + C_2^n)\, r^n$ сходится. Поэтому $r^{n+1} B_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Учитывая эту оценку и неравенство (9), получаем, что $W \equiv 0$ на S в окрестности точки z_0. □

Вернёмся теперь к доказательству теоремы 1. По предположению существует точка z_1, такая что $W(z_1) \neq 0$. Допустим, что рассматриваемая теорема неверна. Тогда условие

$$\lim_{z \to z_0} \frac{W(z)}{(z - z_0)^n} \neq 0$$

не выполняется ни для какого n. В этом случае $W \equiv 0$ в окрестности точки z_0. Поэтому существует точка z_2 на открытом интервале (z_0, z_1) такая, что W обращается тождественно в нуль на $(z_0, z_2]$, но функция W не равна тождественно нулю на интервале (z_0, z_1), содержащем z_2. В точке z_2 либо условие

$$\lim_{z \to z_2} \frac{W(z)}{(z - z_2)^n} \neq 0$$

не выполняется ни при каком n, либо существует n такое, что оно имеет место. В первом случае в соответствии с леммой 1 функция $W = W(z)$ равна нулю в окрестности z_2. Однако это неверно.

Во втором случае снова получаем противоречие, так как

$$\lim_{\substack{z\to z_2\\ z\in[z_0,z_2]}} \frac{W(z)}{(z-z_2)^n} = 0.$$

Замечание 1. Доказанная теорема является обобщением теоремы Gergen J.J. и Dressel F.G. [4] на тот случай, когда функция $M = M(z)$ имеет особенность в фиксированной точке границы.

3. Теорема о нулях и полюсах

Теорема 2. *Пусть W — функция из класса Ω, не равная тождественно нулю. Предположим, что аналитическая функция $\Phi(z)$, соответствующая W в силу представления* (2)*, имеет вид:*

$$\Phi = B_0 + i\sum_{k=1}^{m} B_k \frac{z+z_k}{z-z_k}, \quad B_j \in R, \quad j=\overline{0,m}.$$

Тогда W имеет конечное число нулей в $\overline{S}$. Если N — общее число этих нулей в $\overline{S}$ с учётом их кратности, то $N \leqslant \frac{m}{2}$.

Доказательство. Очевидно, что функция $W(z)$ имеет конечное число нулей внутри круга S [4]. Покажем теперь, что точки, лежащие на границе вне полюсов функции $\Phi(z)$ не могут быть точками накопления нулей функции W(z). Предположим противное. Пусть z_0 — одна из таких точек. Функция $\Phi(z)$ регулярна в точке z_0. Тогда в соответствии с леммой 1 существует $n(z_0)$ такое, что в этой точке выполняется следующее условие

$$\lim_{z\to z_0} \frac{W(z)}{(z-z_0)^{n(z_0)}} \neq 0.$$

Однако это противоречит тому, что

$$\lim_{z_k\to z_0} \frac{W(z_k)}{(z_k-z_0)^{n(z_0)}} = 0$$

для последовательности $\{z_k\}$ нулей функции W, сходящихся к z_0.

Итак, точки границы, лежащие вне полюсов, не могут быть точками накопления нулей функции W.

Для завершения доказательства конечности числа нулей в $\overline{S}$ нам осталось показать, что и полюсы, z_k, $k=\overline{1,m}$, функции $\Phi(z)$ не могут быть точками накопления нулей функции $W(z)$.

Допустим сначала, что точка z_0 не совпадает ни с одним из полюсов z_k функции Φ. Так как производная $W_{\overline{z}}(z) \in L_p(S), p>2$, то функция $W-\Phi$ непрерывна в $\overline{S}$ [3, 6]. Функция Φ регулярна в точке z_0. Следовательно, существует предел функции W в ней. Как уже было указано ранее, такая точка не может быть точкой накопления нулей функции W.

Рассмотрим теперь наиболее сложный случай, когда некоторый полюс z_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, лежит на границе и совпадает с z_0. Выберем h, $0<h$, настолько малым, что

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{A}{|z-z_0|}, \quad z\in\sigma=\sigma(h,z_0)=\left\{z\in\overline{S} : |z-z_0|<h\right\}.$$

Используя представление (2) для функции $W(z)$, мы получаем, что для всякой точки $z \in \sigma$ имеет место неравенство

$$|W(z)| \leqslant \frac{A}{|z-z_0|} + A \iint\limits_{S\setminus\sigma} \frac{|W_{\bar\zeta}|}{|z-\zeta|} \mathrm{d}S_\zeta + A \iint\limits_{\sigma} \frac{|M(\zeta)|\,|W(\zeta)|}{|z-\zeta|} \mathrm{d}S_\zeta. \quad (20)$$

Покажем, что существует константа A^*, такая, что в окрестности точки z_0 для функции $W(z)$ имеет место следующая оценка

$$|W(z)| \leqslant \frac{A^*}{|z-z_0|}. \quad (21)$$

Впредь константу, появляющуюся в неравенствах, подобных (20), будем обозначать через A.

С помощью итераций неравенства (20) получаем

$$|W(z)| \leqslant \frac{A}{|z-z_0|} + A \iint\limits_{\sigma} |M(t)|\,|W(t)| \left(\iint\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}S_\zeta}{|\zeta-z_0|^\alpha\,|z-\zeta|\,|\zeta-t|} \right) \mathrm{d}S_t. \quad (22)$$

Пусть $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 = \{t \in \sigma : t \in O_\varepsilon(z)\}$, $\sigma_2 = \{t \in \sigma : t \notin O_\varepsilon(z)\}$, $\varepsilon = \dfrac{|z-z_0|}{2}$. Тогда имеем следующую оценку

$$|W(z)| \leqslant \frac{A}{|z-z_0|} + A \sum_{i,j=1}^{2} \iint\limits_{\sigma_i} |M(t)|\,|W(t)| \left(\iint\limits_{\sigma_j} \frac{\mathrm{d}S_\zeta}{|\zeta-z_0|^\alpha\,|z-\zeta|\,|\zeta-t|} \right) \mathrm{d}S_t.$$

Рассмотрим первый случай: $i = j = 1$. Тогда $\zeta \in O_\varepsilon(z)$, $t \in O_\varepsilon(z)$ и $|\zeta - z_0| \geqslant \dfrac{|z-z_0|}{2}$. Поэтому для интеграла

$$I = \iint\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}S_\zeta}{|\zeta-z_0|^\alpha\,|z-\zeta|\,|\zeta-t|}$$

имеет место оценка [3]

$$I \leqslant \frac{A}{|z-z_0|^\alpha} \iint\limits_{\sigma} \frac{\mathrm{d}S_\zeta}{|z-\zeta|\,|\zeta-t|} \leqslant \frac{A}{|z-z_0|^\alpha} \ln \frac{1}{|z-t|}. \quad (23)$$

Из неравенства (23) получаем

$$I^* \leqslant \frac{A}{|z-z_0|} + \frac{A}{|z-z_0|^{2\alpha}} \iint\limits_{\sigma} |W(t)| \ln \frac{1}{|z-t|} \mathrm{d}S_t.$$

Учитывая, что $\alpha < \dfrac{1}{2}$ и применяя к последнему выражению неравенство Гельдера, получим $|W(z)| \leqslant \dfrac{A}{|z-z_0|}$.

Аналогичным образом рассматриваются остальные три случая из четырёх возможных.

Итак, неравенство (21) доказано. Используя это неравенство, мы получаем следующую оценку

$$\left|\iint\limits_{\sigma} K_1 W_{\bar\zeta} \mathrm{d}S_\zeta\right| \cdot |z-z_0| \leqslant \frac{A}{|z-z_0|^{\alpha-1}}. \tag{24}$$

Из неравенства (24) следует, что

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0| \iint\limits_{\sigma} \left[K_1 W_{\bar\zeta} + K_2 \overline{W}_{\bar\zeta}\right] \mathrm{d}S_\zeta = 0.$$

Ясно, что

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0| \iint\limits_{S\setminus\sigma} \left[K_1 W_{\bar\zeta} + K_2 \overline{W}_{\bar\zeta}\right] \mathrm{d}S_\zeta = 0. \tag{25}$$

Свойство (25) имеет место и для $z_k \neq z_0$, $k=\overline{1,m}$. Поэтому $\forall z_k$, $k=\overline{1,m}$ имеет место следующее свойство $\lim\limits_{z\to z_k} W(z)(z-z_k) = 2iB_k z_k \neq 0$. Это означает, что в рассматриваемом случае полюс z_k функции Φ является полюсом функции W.

Таким образом, доказано, что число нулей функции $W(z)$ в $\overline{S}$ конечно. Доказательство того, что полюсы $z_k \neq z_0$ функции Φ являются полюсами функции W, полностью соответствует классическому [4].

Оценим теперь число нулей функции $W(z)$.

Заметим прежде, что функцию $W=W(z)$ можно продолжить по непрерывности во все точки $z\in\Gamma\setminus\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$, включая точку z_0 в том случае, когда она не совпадает ни с одним z_k. Продолжим функцию $W(z)$ во внешность единичного круга с помощью функции W^*,

$$W^* = \overline{W}\left(\frac{a^2}{\bar z}\right), \quad |z|>1.$$

Пусть функция $\omega(z)$ — функция, определённая по следующему правилу

$$\omega(z) = \begin{cases} W(z), & z\in\overline{S}\setminus\{z_1,z_2,\ldots,z_k\},\\ W^*(z), & |z|>1. \end{cases}$$

Поскольку граничные значения функции W^* в точках $z\in\Gamma\setminus\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ совпадают с граничными значениями функции W в этих точках, то функция $\omega(z)$ непрерывна в плоскости $\mathbb{C}$ за исключением точек $z_1,z_2,\ldots,z_k$. Как было показано, функция $W(z)$ в точках z_i, $i=\overline{1,k}$ имеет полюсы первого порядка.

Теперь, используя теорему о нулях и полюсах для функций $W(z)$ [4], не равных тождественно нулю и непрерывных в $\overline{S}$ за исключением конечного числа полюсов, получим равенство

$$2\sum_{|z_k|<a} n_k + \sum_{|z_k|=a} n_k - p = 0.$$

Здесь n_k — кратность нуля функции $W(z)$ в точке z_k, p — число полюсов функции $W(z)$ с учётом их кратности. Из последнего равенства следует, что $N \leqslant \dfrac{m}{2}$. □

Замечание 2. Доказательство приведённой теоремы аналогично тому, что содержится в работе [4]. Отличие его от классического заключается в том, что нами доказано, что и в точке, в которой функция $W_{\bar z}$ имеет особенность, функция

W имеет полюс первого порядка. Кроме того, в рассматриваемом нами случае возникает необходимость доказательства непрерывности функции W в точках $z_0 \in \Gamma$, отличных от полюсов функции Φ.

Заключение

Итак, нами получено обобщение результатов Gergen J. J. и Dressel F. G. [4] на случай функций, обладающих обобщёнными производными и принадлежащих весовому пространству $L_2\,(S, M)$.

Литература

1. *Kufner J., Jonh O., Fucik S.* Function Spaces. — Prague: Academia, 1977.
2. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. — Москва: Мир, 1969. — 133 с.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — Москва: Наука, 1988. — 512 с.
4. *Gergen J. J., Dressel F. G.* Mapping by p-regular Functions // Duke math. J. — 1951. — Vol. 18, No 1. — Pp. 185–210.
5. *Остроушко Е. Д.* Об ограниченности функций $W = W(z)$, представимых своими обобщенными производными по сопряженной переменной // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. «Математика и информационные технологии». — 2013. — Вып. 1(5). — С. 96–100.
6. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / под ред. А. К. Гущина. — Москва: Наука, 1989.

UDC 517.956.25

Zeros and Poles of the Functions with Weak Derivatives

E. A. Shcherbakov, E. D. Ostroushko

Department of Theory of Functions
Kuban State University
149, Stavropolskaya str., Krasnodar, Russia, 350040

The classic results of Gergen J. J., Dressel F. G. are generalized to the class of the functions with weak derivatives. We suppose that these derivatives could be estimated by the proper functions multiplied by the weighted functions which have singularities at isolated boundary points.

The crucial point of the study is the iteration process used for the evaluations of the functions represented by the potential operators. As a result of such iterations we succeed in lowering the degree of kernel singularities of the potential operators.

The above mentioned method is based on representation formula of I.N. Vekua for the functions whose weak derivatives are summable over domains. The analytic functions participating in these representations could be considered as generalized constants. We study the classes of those functions whose generalized constants have finite numbers of poles and zeros.

We prove theorems on behavior of the above mentioned functions in neighborhood of their zeros. Besides we study these functions in the neighborhood of the points where they haven't finite limits.

The main result of the paper is the theorem on the number of zeros and poles of the functions under consideration. This result is the generalization of theorem from the paper of Gergen J. J., Dressel F. G.

Key words and phrases: weak derivatives, integral representation of functions, zeros and poles of functions, iterated estimates, weighted functions.

References

1. J. Kufner, O. Jonh, S. Fucik, Function Spaces, Academia, Prague, 1977.
2. L. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, 1966.
3. I. N. Vekua, Generalized Analytic Functions, Nauka, Moscow, 1988, in Russian.
4. J. J. Gergen, F. G. Dressel, Mapping by p-regular functions, Duke math. J. 18 (1) (1951) 185–210.
5. E. D. Ostroushko, Bounded Functions Represented by its Weak Derivatives of the Conjugate Variable, Proceedings of Ulyanovsk State University. Series Mathematics and Information Technology (2013) 96–100In Russian.
6. D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Vol. 224, Springer-Verlag, 1983.