Математика

УДК 513.831

Продолжение sc-отображений на дубликат пространства

В. Л. Клюшин, Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн

Кафедра прикладной математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В статье рассматриваются топологические удвоения so-паракомпактных пространств и продолжения sc-отображений на дубликаты пространств. Понятия so-паракомпактного пространства и sc-отображения (являющиеся соответственно обобщениями понятий паракомпактных пространств и непрерывных отображений) определены авторами ранее и основаны на so-множествах, т.е. множествах, являющихся объединениями открытых и нигде не плотных множеств. Целью работы является исследование свойств дубликатов упомянутых пространств и продолжений их отображений. Доказано, что свойства so-паракомпактных пространств при топологическом удвоении по методу П. С. Александрова не только сохраняются, но и могут улучшаться. Доказано, в частности, что дубликат so-паракомпактного пространства является почти паракомпактным пространством. Доказано, что естественное продолжение sc-отображения на дубликат пространства есть sc-отображение, обладающее дополнительными свойствами. Доказано также, что квазинепрерывное отображение пространства может быть продолжено на дубликат.

Ключевые слова: топологическое удвоение пространства, so-множество, so-паракомпактное пространство, S-паракомпактное пространство, sc-отображение, квазинепрерывное отображение.

1. Введение

В нашей работе [1] изучались обобщения паракомпактных пространств, основанные на so-множествах. Здесь мы рассматриваем топологические удвоения таких пространств и продолжение отображений на дубликаты.

Напомним некоторые определения.

Пусть X' и X'' — два экземпляра одного и того же топологического пространства X. Рассмотрим множество $A(X) = X' \cup X''$. Точку $x \in X$, рассматриваемую как элемент в X', обозначим через x', а рассматриваемую как элемент в X'' — через x''. Аналогично и множество $M \subset X$ обозначаем M', если мы его рассматриваем в экземпляре X' и M'', если в X''. Топология в $A(X)$ вводится следующим образом. Базу топологии образуют одноточечные множества $\{x''\}$, если $x'' \in X''$ и множества вида $(U' \cup U'') \setminus \{x''\}$, где U — произвольная окрестность точки x пространства X. Полученное таким образом топологическое пространство $A(X)$ называется дубликатом (или дубликатом Александрова), или A-дубликатом пространства X.

Множество $M \subset X$ называется полуоткрытым [2], если существует такое открытое множество O, что $O \subset M \subset [O]$ (здесь квадратные скобки означают, как обычно, замыкание множества).

Множество $M \subset X$ называется просто-открытым (simply-open), или so-множеством, если $M = O \cup N$, где O — открытое множество, а N нигде не плотно; so-множество, содержащее непустое открытое множество, называем sso-множеством.

Следует заметить, что so-множества рассматривались в книге К. Куратовского [3], первое издание которой написано ещё в 30-х г.г. прошлого века. Там они рассматривались под названием «множества, открытые по модулю идеала нигде не плотных множеств». Это слишком длинное название. Оно не встречалось нам в публикациях последних десятилетий. Поэтому (а также потому, что эти множества являются обобщениями полуоткрытых) мы называем их, следуя

Н. Бисвасу [4] и А. Нойбрунновой [5], просто открытыми (simply-open sets), или so-множествами.

Топологическое пространство X называется so-паракомпактным [1], если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из so-множеств.

Пространство называется S-паракомпактным [6], если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из полуоткрытых множеств.

2. Топологическое удвоение so-множеств и so-паракомпактных пространств

Предложение 1. Дубликат so-множества есть so-множество.

Доказательство. Пусть M — произвольное so-множество, $M = O \cup N$, где O открыто в X, а N нигде не плотно. Тогда $A\,(M) = O' \cup N' \cup O'' \cup N''$, где $O' \cup O''$ и N'' открыты в $A\,(X)$, а N' нигде не плотно. Итак, $A\,(X)$ есть объединение открытого и нигде не плотного множеств. □

Напомним, что sso-множество есть so-множество, содержащее непустое открытое множество.

Предложение 2. Дубликат so-множества есть sso-множество.

Доказательство следует из того, что дубликат непустого нигде не плотного множества $N \subset X$ есть объединение непустого открытого множества N'' и нигде не плотного множества N'.

Замечание 1. Дубликат so-множества может не быть полуоткрытым множеством.

Предложение 3. Дубликат полуоткрытого множества есть полуоткрытое множество.

Доказательство. Пусть M — полуоткрытое в X множество. Тогда существует такое открытое в X множество O, что $O \subset M \subset [O]$, т.е. $O \subset M \subset (O \cup frO)$. Тогда $O' \subset M' \subset [O']$ и $(O' \cup M'') \subset (M' \cup M'') \subset [O' \cup M'']$. Очевидно, M'' открыто в $A\,(X)$. Следовательно, $A\,(M)$ содержит открытое множество $O' \cup M''$ и содержится в его замыкании, т.е. является полуоткрытым. □

Определение 1. Пространство X называется ss-паракомпактным, если во всякое его покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из sso-множеств.

Теорема 1. *Дубликат $A\,(X)$ so-паракомпактного пространства X является ss-паракомпактным пространством.*

Доказательство. Пусть X есть so-паракомпактное пространство и пусть $A\,(X) = X' \cup X''$ — его дубликат. Пусть λ — открытое покрытие пространства $A\,(X)$. Пусть $\mu = \{U \cap X' : U \in \lambda\}$. Тогда μ — открытое покрытие пространства X. Так как X является so-паракомпактным, то мы можем вписать в μ локально конечное покрытие γ, состоящее из просто-открытых (в пространстве X) множеств. Для каждого $V \in \gamma$ зафиксируем некоторый элемент покрытия λ, его содержащий; обозначим его через $\lambda\,(V)$. Обозначим через $A\,(V)$ дубликат множества V: $A\,(V) = V \cup d\,(V)$, где $d\,(V)$ — копия множества V в X''. Так как V просто открыто в X (и, следовательно, в $X' \in A\,(X)$), а топология на X'' дискретна, то $A\,(V)$ есть sso-множество в $A\,(X)$. Действительно, так как $d\,(V)$

дискретно, следовательно, открыто, то $A\,(V)$ содержит непустое открытое множество и, следовательно, является sso-множеством. Из того, что покрытие γ локально конечно, следует, что и семейство $\{A\,(V) : V \in \gamma\}$ локально конечно. Положим теперь $\alpha\,(V) = A\,(V) \cap \lambda\,(V)$. Рассмотрим систему $\eta = \{\alpha\,(V) : V \in \gamma\}$. Она локально конечна в точках X. Но $\alpha\,(V) \supset V$, $\alpha\,(V)$ есть sso-множество в $A\,(X)$ (так как является пересечением открытого множества с sso-множеством) и $\alpha\,(V) \subset \lambda\,(V) \in \lambda$. Следовательно, η — семейство sso-множеств в $A\,(X)$, вписанное в λ, локально конечное в точках множества X' и покрывающее X'. Тогда $\nu = \eta \cup \{\{x''\} : x'' \notin \cup\{\alpha\,(V) : V \in \gamma\}\}$ — локально конечное покрытие, состоящее из sso-множеств, вписанное в исходное покрытие λ. □

Определение 2 (M. K. Singal, S. P. Arya, [7]). Пространство X называется почти паракомпактным, если во всякое его открытое покрытие можно вписать такую локально конечную систему открытых множеств, что семейство их замыканий является покрытием пространства X.

Предложение 4. Всякое ss-паракомпактное пространство X является почти паракомпактным.

Доказательство. Пусть γ — произвольное покрытие пространства X открытыми множествами. По предположению существует локально конечное покрытие $\mu = \{V_\alpha\}$ данного пространства, состоящее из sso-множеств и вписанное в γ: $V_\alpha = O_\alpha \cup N_\alpha$, где O_α открыты, а N_α нигде не плотны в данном пространстве. В силу локальной конечности $\bigcup\limits_\alpha N_\alpha$ нигде не плотно. Следовательно, множество $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha$ всюду плотно в X. Итак, $\mu_0 = \{O_\alpha\}$ — локально конечная система открытых множеств, вписанных в покрытиеγ, объединение которых всюду плотно в пространстве X. Следовательно, пространство X почти паракомпактно. □

Следствие. Дубликат so-паракомпактного пространства является почти паракомпактным пространством.

Доказательство следует из того, что дубликат so-паракомпактного пространства является ss-паракомпактным пространством.

Теорема 2. *Дубликат S-паракомпактного пространства есть S-паракомпактное пространство.*

Доказательство. Наши рассуждения будут в значительной мере аналогичны тем, что применялись в доказательстве теоремы 1. Пусть X есть S-паракомпактное пространство, и пусть $A\,(X)$ — его дубликат. Пространство X, рассматриваемое как подпространство пространства $A\,(X)$, будем обозначать, как и ранее, через X', а второй экземпляр множества X с заданной на нем дискретной топологией — через X''. Пусть λ — произвольное открытое покрытие пространства $A\,(X)$. Положим $\mu = \{U \cap X' : U \subset \lambda\}$. Тогда μ есть открытое покрытие пространства X'.

Впишем в μ локально конечное (в X') покрытие η пространства X' полуоткрытыми в X' множествами. Для каждого $V' \in \eta$ зафиксируем некоторый элемент семейства μ, его содержащий и обозначим его через $t\,(V')$. Пусть теперь $d\,(V') = V' \cup V''$, где V'' — естественная проекция множества V' в X''. Так как V' полуоткрыто в X', то $d\,(V')$ полуоткрыто в $A\,(X)$. Из того, что η локально конечно в точках X' следует, что и семейство $\{d\,(V') : V \in \eta\}$ также локально конечно в точках X'. Положим теперь $q\,(V') = d\,(V') \cap t\,(V')$. Тогда и семейство $\xi = \{q\,(V') : V' \in \eta\}$ локально конечно в точках X'. Но $q\,(V') \supset V'$, $q\,(V')$ открыто в $A\,(X)$ и $q\,(V') \subset t\,(V') \in \mu$ Значит, ξ — вписанное в λ семейство полуоткрытых в $A\,(X)$ множеств, локально конечное в точках X' и покрывающее X'. Добавив к семейству ξ одноточечные элементы X'', оставшиеся не покрытыми, получаем локально конечное покрытие пространства $A\,(X)$ полуоткрытыми множествами, вписанное в покрытие λ. □

3. Просто непрерывные отображения. Продолжение отображений

Здесь мы будем рассматривать обобщения непрерывных отображений, основанные на so-множествах.

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называется просто-непрерывным (см. N. Biswas [4]), или sc-отображением (simply continuous), если прообраз всякого открытого в Y множества есть so-множество. Отображение $f : X \to Y$ называется ssc-отображением, если прообраз всякого открытого в пространстве Y множества есть sso-множество.

Ясно, что всякое ssc-отображение является sc-отображением, но обратное, вообще говоря, неверно.

Мы изучим здесь отношения между просто непрерывными отображениями и другими обобщениями непрерывных отображений, а также изучим свойства рассматриваемых отображений.

A. Neubrunnova в [5] доказала следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\{f_\xi : \xi < \Omega\}$ *— трансфинитная последовательность просто непрерывных функций, определённых на сепарабельном метрическом пространстве* X *и принимающих значения в метрическом пространстве* Y *(иначе говоря, последовательность sc-отображений* $f_\xi : X \to Y$ *сепарабельного метрического пространства* X *в метрическое пространство* Y*). Пусть эта последовательность поточечно сходится к функции* f*. Тогда эта функция просто непрерывна.*

Повторяя рассуждения автора вышеупомянутой теоремы, можно доказать аналогичное утверждение для ssc-отображений.

Всякое отображение $f : X \to Y$ естественно продолжается на дубликат $A(X)$ пространства X следующим образом. Пусть X' и X'' — два экземпляра пространства X и $x \in X$. Эта точка представлена в $A(X)$ точками $x' \in X'$ и $x'' \in X''$. Полагаем $f(x'') = f(x') = f(x)$.

Предложение 5. Продолжение sc-отображения на дубликат пространства есть ssc-отображение.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ есть sc-отображение и пусть V — произвольное открытое в Y множество. Тогда $U = f^{-1}(V)$ есть so-множество, а его дубликат $A(U)$, как было доказано в главе 2, есть sso-множество. Поэтому прообраз множества V при отображении $Af : A(X) \to Y$ есть sso-множество. Следовательно, отображение $Af : A(X) \to Y$ есть ssc-отображение. □

N. Levine в [2] ввёл понятие полунепрерывного отображения, назвав отображение полунепрерывным, если прообраз всякого открытого множества есть полуоткрытое множество.

Позднее A. Neubrunnova [8] доказала, что это понятие эквивалентно известному понятию квазинепрерывности. Поэтому определение квазинепрерывности отображения мы можем сформулировать следующим образом.

Определение 4. Отображение $f : X \to Y$ называется квазинепрерывным, если прообраз всякого открытого множества в Y есть полуоткрытое множество в X.

Предложение 6. Продолжение квазинепрерывного отображения на дубликат пространства есть квазинепрерывное отображение.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — квазинепрерывное отображение и множество $V \subset Y$ открыто в Y. Тогда $U = f^{-1}(V)$ есть полуоткрытое в X множество. Рассмотрим продолжение $A(f) : A(X) \to Y$. Прообраз $Af^{-1}(V)$ есть дубликат полуоткрытого множества $f^{-1}(V)$, следовательно — полуоткрытое множество. Итак, отображение $A(f)$ квазинепрерывно. □

Частным случаем одного из результатов Фролика (Frolik Z.) является следующее утверждение.

Предложение 7. Если $f : X \to Y$ есть квазинепрерывное отображение сепарабельного пространства X на пространство Y, то Y — сепарабельное пространство.

Заметим, что прообраз сепарабельного пространства при квазинепрерывном (даже конечнократном) отображении может не быть сепарабельным пространством.

Пример. Двукратное квазинепрерывное отображение на сепарабельное пространство, при котором прообраз не сепарабелен. Пусть $f : X \to Y$ — уплотнение несчётного пространства X на сепарабельное пространство Y. Продолжим это отображение на $A\,(X)$. Получим двукратное непрерывное (следовательно, квазинепрерывное) отображение несепарабельного пространства на сепарабельное.

Теорема 4. *Если пространство Y есть образ бикомпактного (линделефова, паракомпактного, S-паракомпактного, so-паракомпактного) пространства при sc-отображении, то Y есть образ бикомпактного (линделефова, паракомпактного, S-паракомпактного, so-паракомпактного) пространства при ssc-отображении.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ есть sc-отображение S-паракомпактного пространства X в пространство Y. Рассмотрим продолжение $A(f) : A(X) \to Y$ этого отображение на дубликат пространства X. В разделе 2 мы доказали, что S-паракомпактность сохраняется при переходе к дубликату, следовательно, $A(X)$есть S-паракомпактное пространство. Так как для всякого открытого множества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}\,(V)$ в пространстве X есть so-множество и так как дубликат so-множества есть sso-множество, то прообраз множества V в пространстве $A\,(X)$ есть sso-множество. Следовательно, $A\,(f) : A\,(X) \to Y$ есть sso-отображение S-паракомпактного пространства $A\,(X)$ в пространство Y. Доказательство теоремы для случая, когда X бикомпактно, линделефово, паракомпактно — аналогично, так как дубликат бикомпактного (линделефова, паракомпактного) пространства бикомпактен (линделефов, паракомпактен). $\square$

Литература

1. *Клюшин В. Л., Аль Баяти Джелал Хатем Хусейн.* О некоторых обобщениях паракомпактности // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 3. — С. 5–10.
2. *Levine N.* Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces // American Mathematical Monthly. — 1963. — Vol. 70. — Pp. 36–41.
3. *Kuratowski K.* Topology. — New York: Acadevic Press, 1966.
4. *Biswas N.* On Some Mappings in Topological Spaces. — 1969. — Vol. 61. — Pp. 127–135.
5. *Neubrunnová A.* On Transfinite Sequences of Certain Types of Functions // Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenianae. — 1975. — Vol. 30. — Pp. 121–126.
6. *Al-Zoubi K. Y.* S-paracompact Spaces // Acta Mathematica Hungarica. — 2006. — Vol. 110 (1–2). — Pp. 165–174.
7. *Singal M. K., Arya S. P.* On M-paracompact Spaces // Mathematische Annalen. — 1969. — Vol. 181. — Pp. 129–133.
8. *Neubrunnová A.* On Certain Generalizations of the Notion of Continuity // Matematický časopis. — 1973. — Vol. 23, No 4. — Pp. 374–380. — `http://eudml.org/doc/29725`.

UDC 513.831

Extension of sc-mapping on Duplicate of Space

V. L. Klyushin, Al Bayati Jalal Hatem Hussein

Departement of Higher Mathematics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

In this paper we consider topological duplications of so-paracompact spaces and extensions of sc-mappings on duplicate. The notions of so-paracompact space and sc-mapping (which generalize the notions of paracompact space and continuous mapping respectively) were introduced by the authors recently and based on so-sets (so-set is the union of the open set and the nowhere dense set). The aim of the work is the investigation of the properties of duplicates of mentioned spaces and mappings. It is proved that Alexandroff duplicate of so-paracompact space is so-paracompact. It is proved also that mentioned duplicate is almost paracompact space. It was established that natural extension of sc-mapping on duplicate of space is so-mapping which possess of supplementary properties. It is proved that the natural extension of quasi-continuous mapping is quasi-continuous.

Key words and phrases: topological duplicate of space, so-set, so-paracompact space, S-paracompact space, sc-mapping, quasi-continuous mapping.

References

1. V. L. Klyushin, J. H. H. Al Bayati, On Some Generalization of Paracompactness, Bulletin of PFUR series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (3) (2013) 5–10, in Russian.
2. N. Levine, Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces, American Mathematical Monthly 70 (1963) 36–41.
3. K. Kuratowski, Topology, Acadevic Press, New York, 1966.
4. N. Biswas, On Some Mappings in Topological Spaces 61 (1969) 127–135.
5. A. Neubrunnová, On Transfinite Sequences of Certain Types of Functions, Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenianae 30 (1975) 121–126.
6. K. Y. Al-Zoubi, S-paracompact Spaces, Acta Mathematica Hungarica 110 (1–2) (2006) 165–174.
7. M. K. Singal, S. P. Arya, On M-paracompact Spaces, Mathematische Annalen 181 (1969) 129–133.
8. A. Neubrunnová, On Certain Generalizations of the Notion of Continuity, Matematický časopis 23 (4) (1973) 374–380.