

УДК 621.378.826.535.8

Бианки-I космологическая модель с вязкой жидкостью и нелинейным спинорным полем: качественный анализ

Б. С. Саха, В. В. Рихвицкий

Лаборатория Информационных Технологий
Объединённый Институт Ядерных Исследований
Россия, 141980, Дубна, Московская обл.

Рассматривается система нелинейного спинорного и гравитационного полей типа Бианки-I (BI) в присутствии вязкой жидкости и Λ -члена. Выведена система уравнений для объёмного масштаба τ и плотности энергии вязкой жидкости ε . Полученная система решена для некоторых частных случаев. Было показано что введение спинорного поля в систему в корне изменяет характер эволюции, в частности, в некоторых специальных случаях это приводит к неограниченному росту плотности энергии за конечное время.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: спинорное поле, вязкая жидкость.

Введение

Исследователи релятивистских космологических моделей обычно имеют дело с тензором энергии-импульса, создаваемым идеальной жидкостью. Чтобы рассмотреть более реалистичные модели следует принять во внимание механизм вязкости, который уже привлёк внимание многих исследователей. Однородная космологическая модель, наполненная жидкостью, которая характеризуется давлением и второй (объёмной) вязкостью, была развита в работе [1]. Найденное решение интересно тем, что особенность типа «большого взрыва» оказывается в бесконечном прошлом. Точное решение изотропной однородной космологической модели для открытой, замкнутой и плоской вселенной было найдено в [2], в которой вторая вязкость есть степенная функция плотности энергии.

Характер космологических решений для однородной модели типа Бианки-I (BI) был исследован Белинским и Халатниковым [3], которые принимали во внимание диссипативный процесс, связанный с вязкостью. Они показали, что вязкость не может устранить космологическую сингулярность, но имеет следствием качественно новое поведение решений вблизи сингулярности. Они обнаружили, что в модели материя создаётся гравитационным полем во время *большого взрыва*.

В последние годы нами было и аналитически, и качественно изучена роль вязкой жидкости в эволюции Бианки типа I вселенной в присутствии Λ -члена [4, 5]. А в работах [6, 7] также было учтено влияние спинорного поля в эволюции вселенной. Целью этой работы является качественный анализ системы уравнений для объёмного масштаба τ и плотности энергии вязкой жидкости ε , поскольку все остальные величины, такие как компоненты спинорного поля, метрические функции и различные инварианты, характеризующие физически наблюдаемые величины и пространство-время, выражаются через τ .

Выберем лагранжиан спинорного поля в виде

$$\mathcal{L}_{sp} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^{\mu'} \right] - m \bar{\psi}' + \lambda F. \quad (1)$$

Здесь m — масса спинора, λ — константа самодействия и F — некоторая произвольная функция инвариантов $I = S^2 = (\bar{\psi}\psi)^2$ и $J = P^2 = (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2$.

В качестве модели гравитационного поля мы рассмотрим космологическую модель типа Бианки-I (BI)

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 dx^2 - a_2^2 dy^2 - a_3^2 dz^2 \tag{2}$$

с функциями a_1, a_2, a_3 , зависящими только времени t . Также мы определяем объёмный масштаб вселенной типа BI

$$\tau = a_1 a_2 a_3. \tag{3}$$

Мы рассматриваем пространственно-независимое спинорное поле. Если нелинейность спинорного поля является функцией $I(S)$, то для S находим

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad C_0 = \text{const.} \tag{4}$$

Для компонент спинорного поля находим [6]

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{C_1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, \quad \psi_2(t) = \frac{C_2}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, \\ \psi_3(t) &= \frac{C_3}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, \quad \psi_4(t) = \frac{C_4}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, \end{aligned} \tag{5}$$

где C_i должны быть константами, связанными с C_0 как $C_0 = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2$. Здесь $\beta = \int (m - \mathcal{D}) dt$. Заметим, что похожие выражения получаются для безмассового спинорного поля с $F = F(J)$. В результате обнаруживается, что компоненты спинорного поля находятся в некоторой функциональной зависимости от τ . Отметим, что физически наблюдаемые величины, такие как спиновый ток, полный заряд спинорного поля и т. д. также зависят от τ [6].

Приступим теперь к изучению уравнений Эйнштейна

$$\frac{\ddot{a}_j}{a_j} + \frac{\ddot{a}_k}{a_k} + \frac{\dot{a}_j}{a_j} \frac{\dot{a}_k}{a_k} = \kappa T_i^i - \Lambda, \quad i \neq j \neq k = 1, 2, 3, \tag{6a}$$

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} \frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \frac{\dot{a}_1}{a_1} = \kappa T_0^0 - \Lambda, \tag{6b}$$

в которых точка обозначает дифференцирование по t , κ есть гравитационная константа Эйнштейна, а Λ — космологическая постоянная. В движущихся друг относительно друга системах отсчёта таких, что $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, для компонентов тензора энергии-импульса спинорного поля и вязкой жидкости можно найти

$$T_0^0 = mS - \lambda F(I, J) + \varepsilon, \tag{7a}$$

$$T_i^i = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - \lambda F(I, J) - p' + 2\eta \frac{\dot{a}_i}{a_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7b}$$

где

$$p' = p - (\xi - \frac{2}{3}\eta) u^\mu_{;\mu}. \tag{8}$$

Здесь ε — плотность энергии, p — давление, η и ξ — коэффициенты первой и второй вязкостей соответственно.

С учётом (7) из (6) можно найти следующие выражения для метрических функций [6]:

$$a_i(t) = D_i \tau^{1/3} \exp \left[X_i \int \frac{e^{-2\kappa \int \eta dt}}{\tau(t)} dt \right], \quad i = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Здесь константы интегрирования D_i и X_i связаны соотношениями

$$D_1 D_2 D_3 = 1, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

Таким образом метрические функции также зависят от τ . Может быть показано, что скалярная кривизна $I_1 = R$, $I_2 = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ и Кречманновский (Kretschmann) скаляр $I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$, которые могут быть использованы как средство определения пространственно-временной сингулярности, зависят от τ , а именно $I_1 \propto \frac{1}{\tau^2}$, $I_2 \propto \frac{1}{\tau^4}$, $I_3 \propto \frac{1}{\tau^4}$. Мы видим, что в произвольной пространственно-временной точке, где $\tau = 0$, инварианты I_1 , I_2 , I_3 , также как скалярное и спинорное поля, обращаются в бесконечность. Следовательно, пространство-время становится в этой точке сингулярным.

Далее запишем уравнение для τ и изучим его в деталях. Для этого введём обобщённую константу Хаббла H

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 3H. \quad (10)$$

Напомним также, что первая (ξ) и вторая (η) вязкости положительно определённые, то есть $\eta > 0$, $\xi > 0$. Обе они могут быть постоянными или функциями времени или энергии. Предположим, что они являются функциями плотности энергии:

$$\eta = A\varepsilon^\alpha, \quad \xi = B\varepsilon^\beta, \quad (11)$$

с положительными величинами A и B . Зададим так же уравнение состояния для p и ε

$$p = \zeta\varepsilon, \quad \zeta \in (0, 1]. \quad (12)$$

Заметим, что в этом случае $\zeta \neq 0$, тогда как для давления пыли температура равна нулю, что влечёт нулевую вязкость.

Тогда из уравнений Эйнштейна (6), тождества Бианки с учётом уравнения спинорного поля, а также вводя $\nu = 1/\tau$, находим систему

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (13a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \varepsilon + \Lambda) + \frac{1}{2}(m\nu + \lambda(n-2)\nu^{n-1}), \quad (13b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \varepsilon + \Lambda) - 4A\varepsilon^\alpha[m\nu - \lambda\nu^n]. \quad (13c)$$

Заметим, что плоскости $\nu = 0$ и $\varepsilon = 0$ являются динамически инвариантными подмножествами, которые делят пространство на четыре не сообщающиеся части, поскольку

$$\dot{\tau}|_{\tau=0} = 0, \quad \text{и} \quad \dot{\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (14)$$

Заметим также, что $\varepsilon < 0$ бессмысленно, если α и/или β не являются целыми.

Плоскость $\varepsilon = 0$ является притягивающим множеством для $H > 0$ и отталкивающим для $H < 0$, поскольку

$$\left. \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -3H(1 + \zeta). \quad (15)$$

Когда $H > 0$, плоскость $\varepsilon = 0$ оказывается притягивающей.

Представляет интерес выяснить характер движения на самой плоскости, хотя бы это и не было физически значимо. В этом случае, т.е. при $\varepsilon = 0$, система принимает вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (16a)$$

$$\dot{H} = -3H^2 - \Lambda + \frac{1}{2}(m\nu + \lambda(n-2)\nu^{n-1}). \quad (16b)$$

Решениями системы (16) являются кривые

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \lambda\nu^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-3}\right), \quad \text{для } n > 3, \quad (17a)$$

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \lambda\nu^2 \ln(\nu), \quad \text{для } n = 3, \quad (17b)$$

где C — некоторая произвольная константа.

Проиллюстрируем результаты. Для числового решения возьмём следующие значения параметров: $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\zeta = 0,5$, $A = 1$, $B = 1$, $n = 4$, $m = 1$, $\lambda = 1$ и $\Lambda = 10$.

Если правая часть уравнения (17) имеет два положительных корня и между ними H не равно нулю, то на плоскости $\varepsilon = 0$ существует замкнутый цикл. Очевидно, что число корней не может быть больше трёх, поэтому не может быть неконцентрических циклов (т. е. циклов, имеющих разные центры). В результате, вблизи плоскости $\varepsilon = 0$ могут быть циклические колебания. На рис. 1 изображена фазовая диаграмма, демонстрирующая осцилляторный характер эволюции.

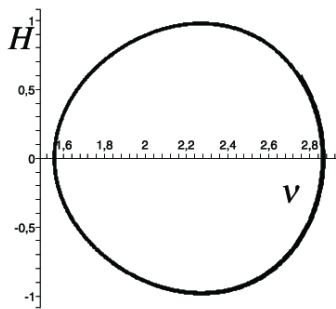


Рис. 1. Демонстрируется, что около плоскости $\varepsilon = 0$ существует циклический режим эволюции

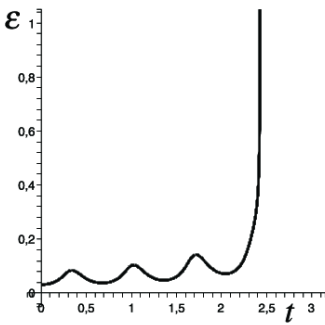


Рис. 2. Изменение ε со временем. Плотность энергии достигает бесконечности за конечное время

При выполнении условий $\varepsilon = 0$ и $\dot{\varepsilon} = 0$ нетривиальный цикл должен содержать внутри себя особую точку, где $\dot{\tau} = 0$ и $\dot{H} = 0$. Заметим, что $\dot{\tau} = 0$ может быть получено как при $H = 0$ так и при $\tau = 0$. Поскольку $\tau = 0$ есть сингулярность пространства-времени, то рассмотрим случай $H = 0$.

Итак, особая точка, вокруг которой выполняются осцилляции, имеет $H = 0$, поэтому траектории осцилляций частично проходят в области притяжения к плоскости $\varepsilon = 0$, частично в области отталкивания. Математическое моделирование показало, что эти траектории начинают раскручиваться, и в области отталкивания в некоторый момент рост ε становится преобладающим, т. е. становится таким большим, что кривая не возвращается в область притяжения. В действительности может оказаться, что ε становится бесконечным за конечный отрезок времени. На рис. 2 показано изменение плотности энергии во времени. Как видно, плотность энергии в конечном счёте имеет тенденцию к неограниченному росту.

Рис. 3 показывает, что когда $\varepsilon \rightarrow 0$, вселенная VI осциллирует, то при возрастающем ε величина τ стремится к малой константе, т. е. возникает большая гравитационная сила вследствие большой плотности энергии, что не позволяет вселенной типа VI расширяться свыше некоторого критического размера.

Таким образом нами было подробно исследована самосогласованная система нелинейного спинорного и Бианки типа I гравитационного полей с учётом вязкой жидкости и космологической постоянной. Было показано что введение спинорного поля в систему в корне изменяет характер эволюции, в частности, в некоторых специальных случаях это приводит к неограниченному росту плотности энергии за конечное время.

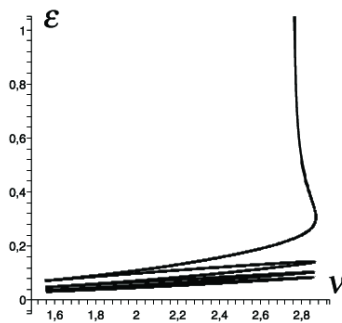


Рис. 3. Изменение ε по отношению к τ . Как видно, после нескольких осцилляций ε уходит в бесконечность, τ стремится к некоторой малой константе

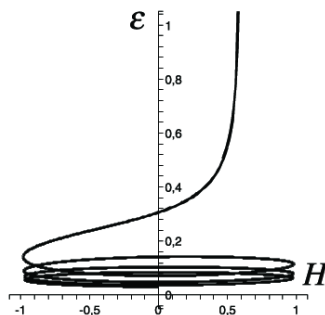


Рис. 4. Изменение ε по отношению к H

Литература

1. *Murphy G. L.* // Phys. Rev. D. — Vol. 8. — 1973. — P. 4231.
2. *Santos N. O., Dias R. S., Banerjee A.* // J. Math. Phys. — Vol. 26. — 1985. — P. 876.
3. *Belinski V. A., Khalatnikov I. M.* // J. of Experimental and Theoretical Physics. — Vol. 69. — 1975. — P. 401.
4. *Saha B.* // Mod. Phys. Lett. A. — Vol. 20. — 2005. — P. 2127.
5. *Saha B., Rikhvitsky V.* // Physica D. — Vol. 219. — 2006. — P. 168.
6. *Saha B.* // Romanian Report of Physics. — Vol. 57, No 1. — 2005. — P. 7.
7. *Биджан С., Рихвицкий В.* // Материалы XLII Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии / РУДН. — М.: 2006. — С. 88.

UDC 621.378.826.535.8

Bianchi-I Cosmological Model with Viscous Fluid and Nonlinear Spinor Field: a Qualitative Analysis

B. S. Saha, V. V. Rikhvitsky

*Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Dubna, Moscow reg., 141980, Russia*

A system of nonlinear spinor field and Bianchi type-I gravitational field in presence of a viscous fluid and Λ term has been considered. A system of equations for volume scale τ and energy density ε has been reduced. The system obtained has been solved for some special cases. It has been shown that the introduction of spinor field to the system radically changes the character of evolution, in particular for some special choice of parameters it leads to the unlimited growth of the energy density at the finite interval of time.