

ФИЗИКА

УДК 539.142

Электромагнитная структура состояния $1f_{7/2}$ ядер в реакциях $e^- + A \rightarrow e^- + A$

Ю. П. Богданов

*Кафедра физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

В статье рассмотрено упругое рассеяние электронов на ядрах спина $7/2$ на основе волновых функций Рариты–Швингера. Получены выражения для электромагнитного тока ядра и проекционного оператора (спиновая матрица плотности). На основе этих выражений с помощью мультипольного разложения найдены общие соотношения для мультипольных и инвариантных формфакторов. Полученные формулы могут быть особенно полезны при изучении асимптотических свойств формфактора, индуцированных кварковой структурой ядра.

Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение электромагнитной структуры основного и возбужденных состояний ядер с высоким спином может служить источником информации о широком круге вопросов теории ядра и ядерной спектроскопии [1, 2]. Сюда же следует отнести изучение простых оболочечных моделей, проблемы смешивания конфигураций, поляризацию кора, обменные токи и т. д. Особое место при этом занимает экспериментальное изучение упругого рассеяния электронов ядрами со спином $7/2$ (^{49}Ti , ^{51}V , ^{58}Co , ^{59}Co , ...) и, в частности, магнитное рассеяние назад [2–4], которое непосредственно дает информацию о радиальном распределении высшего мультипольного момента $M7$. Очевидно, что в таких экспериментах можно измерить радиальное распределение нуклонных орбит. Возможность такого измерения обусловлена законом сохранения углового момента, согласно которому состояния с более высокими моментами соответствуют более чистым конфигурациям [2, 5].

Рост энергии электронных пучков до десятков ГэВ требует релятивистского обобщения расчетов сечения, выполняемого в рамках импульсного приближения при мультипольном разложении ядерных матричных элементов электромагнитного тока [5]. Отмеченное обобщение достигается на основе ковариантного описания ядерных волновых функций и вершинных операторов электромагнитного тока. Получаемое при этом сечение упругого рассеяния электронов ядром массы M определяется структурными функциями, зависящими от инвариантных формфакторов вершины:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \left\{ A(q^2) + 2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) B(q^2) \right\}. \quad (1)$$

С точки зрения соответствия выражения (1) сечению нерелятивистского импульсного приближения

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \left\{ \sum_{l, \text{четн.}} F_{Cl}^2(q^2) + \left[1 + 2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \sum_{l, \text{нечетн.}} F_{Ml}^2(q^2) \right\} \quad (2)$$

и наглядной физической интерпретации инвариантных формфакторов вершины надо найти для (1) представление, переходящее в (2) при малых $\tau = -q^2/(4M^2)$ (или при бесконечно большой массе ядра: $M \rightarrow \infty$). Так в работе [6] ковариантным методом исследовалось упругое рассеяние электронов ядрами со спином $3/2$ и $5/2$ и на основе мультипольных разложений [5, 7] получены выражения для мультипольных формфакторов через инвариантные формфакторы вершины.

В данной работе, являющейся продолжением [6], рассматривается упругое рассеяние электронов ядрами со спином $7/2$, описываемых волновыми функциями типа функций Рариты–Швингера. Получено выражение для электромагнитного тока ядра, содержащее восемь инвариантных формфакторов, а также найдено выражение для проекционного оператора частиц со спином $7/2$. На их основе вычислено сечение рассеяния и с помощью мультипольного разложения [5] получены соотношения для мультипольных и инвариантных формфакторов.

1. Вершинный оператор электромагнитного тока и его симметризованное представление

Следуя [8, 9], основное состояние ядра спина $7/2$ будем описывать симметричной по всем трем индексам спин-тензорной волновой функцией $U_{\alpha\beta\delta}(P)$, которая удовлетворяет уравнениям:

$$(\hat{P} - M)U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0, \quad (3)$$

$$P^\alpha U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0, \quad (4)$$

$$\gamma^\alpha U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0, \quad (5)$$

$$g^{\alpha\beta} U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0. \quad (6)$$

Согласно (3) «дираковские» свойства волновой функции факторизованы, поэтому вершинный оператор электромагнитного тока

$$J^\mu = \bar{U}_{\alpha\beta\delta}(P') \Gamma^{\mu;\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}(P', P) U_{\sigma\omega\varphi}(P) \quad (7)$$

можно искать в виде

$$\Gamma^{\mu;\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = \sum_{n=1}^4 \tilde{I}_n^\mu Q_n^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}. \quad (8)$$

Здесь в (8) каждая из матриц $\tilde{I}_n^\mu$ является аналогом вершинного оператора электромагнитного тока нуклона и выбирается подобно [8, 9] в форме

$$\tilde{I}_n^\mu = F_m^{(n)}(q) \gamma^\mu - \frac{1}{2M} P^\mu F_e^{(n)}(q), \quad (9)$$

при этом

$$F_m^{(n)} = F_1^{(n)} + F_2^{(n)}; \quad F_e^{(n)} = F_1^{(n)} - \tau F_2^{(n)}, \quad (10)$$

где $F_1^{(n)}$ и $F_2^{(n)}$ соответствуют дираковскому и паулиевскому формфакторам, а $F_e^{(n)}$ и $F_m^{(n)}$ — электрическому и магнитному саксовским формфакторам, и, наконец, величина P равна сумме начального (p) и конечного (p') 4-импульсов ядра. В (8) величины $Q_n^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}$ являются симметричными по каждой тройке индексов тензорами-однородными функциями порядка $2(n-1)$ от компонент переданного импульса q . Учитывая равенство нулю следа (6), получаем для них следующие выражения (несимметризованный вид):

$$Q_1^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\omega} g^{\delta\varphi}, \quad (11a)$$

$$Q_2^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = t^\alpha t^\sigma g^{\beta\omega} g^{\delta\varphi}, \quad (11b)$$

$$Q_3^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = t^\alpha t^\sigma t^\beta t^\omega g^{\delta\varphi}, \quad (11c)$$

$$Q_4^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = t^\alpha t^\sigma t^\beta t^\omega t^\delta t^\varphi. \quad (11d)$$

Способ приведения (11a)–(11b) к полностью симметричному виду легко определить из данного ниже симметризованного представления (11c):

$$\begin{aligned} Q_2^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = \frac{1}{9} \{ & g^{\alpha\sigma} t^\beta t^\omega t^\delta t^\varphi + g^{\alpha\omega} t^\beta t^\delta t^\sigma t^\varphi + g^{\alpha\varphi} t^\beta t^\delta t^\sigma t^\omega + \\ & + g^{\beta\sigma} t^\alpha t^\delta t^\omega t^\varphi + g^{\beta\omega} t^\alpha t^\delta t^\sigma t^\varphi + g^{\beta\varphi} t^\alpha t^\delta t^\sigma t^\omega + \\ & + g^{\delta\sigma} t^\alpha t^\beta t^\omega t^\varphi + g^{\delta\omega} t^\alpha t^\beta t^\sigma t^\varphi + g^{\delta\varphi} t^\alpha t^\beta t^\sigma t^\omega \}. \end{aligned} \quad (12)$$

В формулах (11a)–(12) $t = q/(2M)$, а $g^{\alpha\beta}$ — метрический тензор сигнатуры $(+ - - -)$.

2. Матрица плотности неполяризованного состояния для частицы спина 7/2

Определим матрицу плотности (проекторный оператор) неполяризованного состояния для частицы спина 7/2 выражением

$$\Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = \sum U_{\alpha\beta\delta}(P, m) \bar{U}_{\sigma\omega\varphi}(P, m), \quad (13)$$

в котором суммирование идет по всем значениям спиновой проекции m . Очевидно, что оператор (13) должен удовлетворять уравнению (3), а по каждой тройке индексов — уравнениям (4)–(6). Кроме того, он должен также удовлетворять уравнениям

$$\Lambda_{\alpha\beta\delta\rho\tau\lambda}(P)^{7/2} \Lambda_{\dots\sigma\omega\varphi}^{7/2;\rho\tau\lambda\cdot\cdot\cdot}(P) = 2M \Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P), \quad (14)$$

$$g^{\delta\varphi} \Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = \frac{4}{3} \Lambda_{\alpha\beta\sigma\omega}^{5/2}(P). \quad (15)$$

Для того, чтобы выполнялось равенство (3), достаточно представить (13) в виде

$$\Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = (\hat{P} + M) \lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P). \quad (16)$$

Если теперь тензор $\lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}$ строить из поперечных величин

$$g_P^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \frac{1}{M} P^\alpha \frac{1}{M} P^\beta; \quad \gamma_\alpha^\pm(P) = \gamma_\alpha \pm \frac{1}{M} P_\alpha, \quad (17)$$

то будет выполнено также условие (4). В силу того, что (5) является следствием (3) и (4), то остается три уравнения (6), (14) и (15), с помощью которых и фиксируется структура (16), представляемая первоначально в виде разложения с неопределенными коэффициентами по характерным тензорным комбинациям из величин (17). Выполнив соответствующие вычисления, получим, что в несимметризованном (но вполне достаточном для дальнейших целей) виде проекционный оператор для частицы спина 7/2 дается формулой (16) при

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = & g_{\alpha\sigma}^P g_{\beta\omega}^P g_{\delta\varphi}^P - \frac{3}{7} g_{\alpha\beta}^P g_{\delta\sigma}^P g_{\omega\varphi}^P + \\ & + \frac{3}{7} \gamma_\alpha^-(P) \gamma_\sigma^+(P) g_{\beta\omega}^P g_{\delta\varphi}^P - \frac{3}{35} g_{\alpha\beta}^P \gamma_\delta^-(P) \gamma_\sigma^+(P) g_{\omega\varphi}^P. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов

Дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов высокой энергии ($E = k_0 \gg m_e$) дается равенством

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \frac{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{16M^2 E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} (l_{\mu\nu} L^{\mu\nu}) , \quad (19)$$

где электронный тензор равен

$$l_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} [\hat{k}' \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu] = 2 \left[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu + \frac{1}{2} q^2 g_{\mu\nu} \right] . \quad (20)$$

Адронный тензор представим в виде

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Spur} \left[A_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P') \Gamma^{\mu;\sigma\omega\varphi\rho\tau\lambda} A_{\rho\tau\lambda\psi\chi\eta}^{7/2}(P) \Gamma^{\nu;\psi\chi\eta\alpha\beta\delta} \right] = \\ &= P^\mu P^\nu A(\tau) - 4M^2 g^{\mu\nu} B(\tau) , \end{aligned} \quad (21)$$

где структурные функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ вычисляются с помощью (8), (11) и (16). Не будем выписывать для них громоздких выражений, а воспользуемся тем, что после подстановки (20) и (21) в (19) дифференциальное сечение может быть представлено следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{Mott}}{(1+\tau)} \left\{ F_E^2(\tau) + \frac{3}{7} \tau \left[1 + 2(1+\tau) \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right] F_M^2(\tau) \right\} . \quad (22)$$

Для полных электрического $F_E(\tau)$ и магнитного $F_M(\tau)$ формфакторов справедливы мультипольные разложения:

$$\begin{aligned} F_E^2(\tau) &= F_{C0}^2(\tau) + \tau^2 \frac{4}{21} F_{C2}(\tau) + \tau^4 \frac{11 \cdot 16 \cdot 16}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3} F_{C4}^2(\tau) + \\ &+ \tau^6 \frac{4 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16}{11 \cdot 13 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} F_{C6}^2(\tau) ; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F_M^2(\tau) &= F_{M1}^2(\tau) + \tau^2 \frac{2 \cdot 11 \cdot 16}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} F_{M3}(\tau) + \tau^4 \frac{13 \cdot 16 \cdot 16}{3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 9^2} F_{M5}^2(\tau) + \\ &+ \tau^6 \frac{4 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} F_{M7}^2(\tau) . \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив (23) и (24) в (22) и воспользовавшись представлением сечения в виде (1), найдем связь мультипольных кулоновских $F_{Cl}(\tau)$ и магнитных $F_{Ml}(\tau)$

формфакторов с инвариантными формфакторами вершин (9)

$$\begin{aligned}
 F_{C0} &= \left[1 + 2\tau \left(1 + \frac{4}{5}\tau \left(1 + \frac{2}{7}\tau \right) \right) \right] F_e + \frac{2}{15}\tau^2(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{6}{7}\tau \right) H_e - \\
 &\quad - \frac{1}{3}\tau(1+\tau) \left[1 + \frac{8}{5}\tau \left(1 + \frac{3}{7}\tau \right) \right] G_e - \frac{2}{35}\tau^3(1+\tau)^3 R_e, \\
 F_{C2} &= 3 \left[1 + \frac{8}{7}\tau \left(1 + \frac{1}{3}\tau \right) \right] F_e + \frac{2}{7}\tau(1+\tau)^3 H_e - \\
 &\quad - \frac{1}{2}(1+\tau) \left[1 + \frac{16}{7}\tau \left(1 + \frac{1}{2}\tau \right) \right] G_e - \frac{1}{7}\tau^2(1+\tau)^3 R_e, \\
 F_{C4} &= \frac{9}{2} \left(1 + \frac{6}{11}\tau \right) F_e + \frac{3}{8}(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{18}{11}\tau \right) H_e - \\
 &\quad - \frac{3}{2}(1+\tau) \left(1 + \frac{9}{11}\tau \right) G_e - \frac{27}{88}\tau(1+\tau)^3 R_e, \\
 F_{C6} &= \frac{45}{4} \left[F_e - \frac{1}{2}(1+\tau)G_e + \frac{1}{4}(1+\tau)^2 H_e - \frac{1}{8}(1+\tau)^3 R_e \right];
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 F_{M1} &= \left[1 + \frac{12}{5}\tau \left(1 + \frac{6}{7}\tau \left(1 + \frac{8}{27}\tau \right) \right) \right] F_m + \frac{6}{35}\tau^2(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{8}{9}\tau \right) H_m - \\
 &\quad - \frac{2}{5}\tau(1+\tau) \left[1 + \frac{12}{7}\tau \left(1 + \frac{4}{9}\tau \right) \right] G_m - \frac{8}{105}\tau^3(1+\tau)^3 R_m, \\
 F_{M3} &= \frac{9}{2} \left[1 + \frac{4}{3}\tau \left(1 + \frac{4}{11}\tau \right) \right] F_m + \frac{1}{2}\tau(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{12}{11}\tau \right) H_m - \\
 &\quad - \frac{3}{4}(1+\tau) \left[1 + \frac{8}{3}\tau \left(1 + \frac{6}{11}\tau \right) \right] G_m - \frac{3}{11}\tau^2(1+\tau)^3 R_m, \\
 F_{M5} &= \frac{45}{2} \left[1 + \frac{8}{13}\tau \right] F_m + \frac{15}{8}\tau(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{24}{13}\tau \right) H_m - \\
 &\quad - \frac{15}{2}(1+\tau) \left(1 + \frac{12}{13}\tau \right) G_m - \frac{45}{26}\tau(1+\tau)^3 R_m, \\
 F_{M7} &= \frac{315}{4} \left[F_m - \frac{1}{2}(1+\tau)G_m + \frac{1}{4}(1+\tau)^2 H_m - \frac{1}{8}(1+\tau)^3 R_m \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь в формулах (25) и (26) (см. также (10)):

$$\begin{aligned}
 F_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(1)}}{\sqrt{1+\tau}}, & G_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(2)}}{\sqrt{1+\tau}}, \\
 H_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(3)}}{\sqrt{1+\tau}}, & R_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(4)}}{\sqrt{1+\tau}}.
 \end{aligned}$$

Заключение

Полученные здесь формулы (22)–(26) дают возможность реализовать релятивистское описание имеющихся экспериментальных данных по упругому рассеянию электронов ядрами спина 7/2. Эти формулы особенно полезны в области больших q^2 . Их следует использовать, в частности, при анализе асимптотического поведения формфакторов, которое может определяться, например, кварковой структурой ядра.

Литература

1. Ricci R. A. On Electromagnetic Structure of $1f_{7/2}$ nuclei // Proc. Topical Conf. on the Struct. of $1f_{7/2}$ nuclei. — Legnaro: 1971.
2. Sick I. Radial Wave Functions of Valence Nucleons // Comments on Nuclear and Particle Physics. — Vol. 9, No 2. — 1980. — Pp. 55–66.
3. De Witt Huberts P. K. A. On the Radial Description of the $1f_{7/2}$ Proton Orbit // Physics Letters. — Vol. 71B, No 2. — 1977. — P. 317.
4. Nascimento I. O. Elastic Electron Scattering from the $M7$ Magnetization Density of ${}^5\text{V}$ // Physics Letters. — Vol. 53B, No 2. — 1974. — P. 168.
5. Donnelly T. W., Walecka J. D. On Nuclear Moments and Nuclear Structure // Ann. Rev. Nucl. Sci. — Vol. 25. — 1975. — P. 329.
6. Rand R. E. Elastic Electron Scattering from the Magnetic Multipole Distributions of Li^6 , Li^7 , Be^9 , B^{10} , B^{11} and N^{14} // Physical Review. — Vol. 144. — 1966. — P. 859.
7. Griffy T. A., Yu D. V. L. Electron Scattering from Nuclear Magnetic Moments // Physical Review. — Vol. 139B. — 1965. — P. 880.
8. Богданов Ю. П., Керимов Б. К., Сафин М. Я. Упругое рассеяние электронов ядрами соспином $3/2$ в формализме Рариты–Швингера // Известия АН СССР. — Т. 44, вып. Физ. — 1980. — С. 2337.
9. 1981. — Тезисы докладов 31-го Совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Ленинград: Наука.

UDC 539.142

Electromagnetic Structure of State $1f_{7/2}$ for Nuclei in reactions $e^- + A \rightarrow e^- + A$

Yu. P. Bogdanov

*Department of Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Elastic electron scattering on nuclei of spin $7/2$ is considered on the base of Rarita–Schwinger wave functions. The expressions for covariant electromagnetic vertex function and projection (spin density matrix) are derived. Furthermore these results with a help of the multipole resolution method yielded in general formulas for multipole and invariant form factors, the latter are useful in the analysis of its asymptotic properties induced by the quark structure of nuclei.