

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.6

Дискретное преобразование значений функций на сетке в коэффициенты полиномов Цернике

Л. А. Севастьянов, К. П. Ловецкий, М. Г. Кокотчикова

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

Разработан инструмент для решения практической задачи серийного восстановления коэффициентов разложения функций по полиномам Цернике по их приближенно измеренным значениям на сетке. Решается серия переопределенных и несовместных систем линейных алгебраических уравнений с разными правыми частями и матрицами из одного класса точности методом тихоновской регуляризации. Исследуются условия существования единственной псевдообратной матрицы для точной системы. Доказывается сходимость регуляризованных псевдообратных матриц к точной при стремлении возмущения к нулю.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: разложение в ряд Фурье, система линейных алгебраических уравнений, регуляризация.

Введение

Во многих прикладных задачах оптики при численной обработке экспериментальных данных возникает необходимость [1, 2] отыскания вектора коэффициентов Фурье в разложении по полиномам Цернике на единичном круге $\mathcal{Q}$ функции f , значения которой известны лишь в точках некоторой сетки $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathcal{Q}$ [3, 4].

Конечный набор $S(f) = (f(s_1), \dots, f(s_n))^T$ значений функции f (след функции) позволяет найти только конечное число k информативных коэффициентов Фурье в разложении по полиномам Цернике, причём $k \leq n$. Известно, что для удовлетворительного описания экспериментальных данных в оптике обычно достаточно использовать небольшое число k первых полиномов Цернике степени $0, 1, \dots, l : k = k(l) = (l+1)(l+2)/2, \quad l \leq 10$ (см. [5, 6]).

В гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{Q})$ квадратично интегрируемых на единичном круге $\mathcal{Q}$ функций со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{Q}} f g d\mathcal{Q}$ полиномы

Цернике $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ образуют полную ортонормированную систему Φ . Для любой функции $f \in L_2(\mathcal{Q})$ однозначно определена последовательность её коэффициентов Фурье в базисе Φ : $F(f) = \{\langle f, \varphi_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots\}$.

Преобразование Фурье в базисе Φ — это отображение $F : L_2(\mathcal{Q}) \rightarrow l_2, f \rightarrow F(f)$, которое ставит в соответствие каждой функции $f \in L_2(\mathcal{Q})$ последовательность $F(f) = \{\langle f, \varphi_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots\}$, которую называют также спектром функции f по системе Φ . F является изоморфизмом гильбертовых пространств $L_2(\mathcal{Q})$ и l_2 , сохраняющим скалярное произведение, т.е. для любых функций $f, g \in L_2(\mathcal{Q})$ выполняется равенство $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \langle \varphi_i, g \rangle$.

Если для некоторой непрерывной функции f известен её след $S(f)$ только на сетке S , то точные значения скалярных произведений $\langle f, g \rangle$ для всех $i = 1, 2, \dots$ найти в общем случае невозможно. Возникает задача приближенного вычисления вектора коэффициентов Фурье функции f по её следу $S(f)$. Так как экспериментальное получение следа $S(f)$ всегда содержит некоторую ошибку, то способ вычисления вектора коэффициентов Фурье в базисе Φ должен быть устойчивым к возмущениям $S(f)$.

1. Точное дискретное преобразование

Пусть фиксировано натуральное число $k, k \leq n$. Обозначим через H_k подпространство в $L_2(\mathcal{Q})$, натянутое на первые k полиномов Цернике, через $\mathbf{F}^k(f)$ — вектор-столбец $(\langle f_1, \varphi_2 \rangle, \dots, \langle f_1, \varphi_k \rangle)^T$ первых k коэффициентов Фурье в базисе Φ . Для непрерывных функций f след $S(f)$ определён на любой сетке S . Оператор S взятия следа функции является линейным, так же как преобразование Фурье F .

Нашей задачей является построение для фиксированной сетки S дискретного преобразования Фурье D_k^s в базисе $\Phi_k = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, т.е. такого линейного отображения D_k^s пространства $R^n \supset S(H_k)$ в R^k , что значение $D_k^s(f)$ оператора D_k^s на следе $S(f)$ функции f даёт вектор $\mathbf{F}^k(f)$ первых k коэффициентов Фурье в базисе Φ . Линейное отображение D_k^s однозначно определяется матрицей

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1^1 & F_1^2 & \dots & F_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_k^1 & F_k^2 & \dots & F_k^n \end{bmatrix},$$

поэтому следует в действительности искать $n \times k$ элементов матрицы $\mathbf{F}$.

Исследуем условия, при которых дискретное преобразование Фурье D_k^s будет давать по точному следу $S(f)$ на сетке S точное значение первых k -коэффициентов Фурье в базисе Φ для любой функции f из конечномерного пространства H_k . В силу линейности операторов S , $\mathbf{F}^k$ и D_k^s для существования D_k^s на H_k необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$D_k^s(S(f)) = \mathbf{F}^k(f) \quad (1)$$

выполнялось для любой базисной функции $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, k$, что даёт систему уравнений

[illegible]

линейную относительно F_i^j . С учётом ортонормированности базиса систему уравнений (2) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} F_1^1 & F_1^2 & \dots & F_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k^1 & F_k^2 & \dots & F_k^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s_1) & \dots & \varphi_k(s_1) \\ \varphi_1(s_2) & \dots & \varphi_k(s_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(s_n) & \dots & \varphi_k(s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Таким образом, искомая матрица $\mathbf{F}$ является левой обратной для матрицы

$$S(\Phi_k) = [S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)] = \begin{bmatrix} \varphi_1(s_1) & \dots & \varphi_k(s_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(s_n) & \dots & \varphi_k(s_n) \end{bmatrix}$$

значений базисных функций φ_i в точках сетки S . Необходимым и достаточным условием существования левой обратной к $S(\Phi_k)$ является равенство ранга матрицы $S(\Phi_k)$ числу k -размерности единичной матрицы в правой части матричного уравнения (3). Это условие эквивалентно линейной независимости векторов $S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)$ -столбцов матрицы $S(\Phi_k)$. Следовательно, справедливо

Предложение 1. Точное дискретное преобразование Фурье $D_k^s : R^n \rightarrow R^k$ пространства H_k по базису $\Phi_k = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ на сетке $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ существует тогда и только тогда, когда вектор-столбцы $S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)$ матрицы $S(\Phi_k)$ — следы базисных функций на сетке — являются линейно-независимыми.

Проверка условия линейной независимости может осуществляться численно. Однако и для хорошо обусловленных матриц при больших n и k (> 100) проверка связана с трудностями, возникающими из-за приближенного вычисления элементов $\varphi_i(s_j)$ матрицы $S(\Phi_k)$ и выполнения операций в конечноразрядной арифметике.

2. Возмущенное дискретное преобразование

Рассмотрим далее ситуацию, когда требуется разложить в конечный ряд Фурье по системе полиномов Цернике Φ большое число функций f , данные о которых имеются в виде измеренных с некоторой погрешностью δ значений $f(s_j)$ в точках s_j сетки S . Такая задача обладает своей спецификой.

Во-первых, точное равенство n и k практически не осуществляется, ибо, с одной стороны, естественно брать все полиномы Цернике степени не выше какого-либо натурального числа l , что приводит к числу полиномов $k = k(l) = (l+1)(l+2)/2$, и при переходе к следующему числу $l+1$ число полиномов увеличивается сразу на $l+2$. С другой стороны, возможен выход из строя части датчиков, расположенных в точках планировавшейся сетки S' и тем самым вместо планировавшихся данных по сетке S' в распоряжении экспериментатора окажутся только данные по меньшей сетке $S < S'$.

Во-вторых, погрешность δ измеренных значений $f(s_1), \dots, f(s_n)$ на два-три порядка выше, чем погрешность δ_M в значениях базисных функций $\varphi_i(s_j)$.

Таким образом, неравенство $n > k$ оставляет некоторую свободу в построении матрицы $\mathbf{F}$ дискретного преобразования Фурье в базисе Φ_k на сетке S , которую можно использовать для минимизации ошибки в векторе дискретных коэффициентов Фурье, вызванной неустранимой ошибкой в измеренном следе $S(f)$ раскладываемой в ряд функции f .

Взаимное расположение точек сетки S может быть таким, что векторы $S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)$ окажутся линейно зависимыми, несмотря на то, что n больше k . Тогда точного на пространстве H_k дискретного преобразования Фурье D_k^s по системе Φ_k с сетки S не существует. Однако даже тогда, когда теоретически для сетки S существует точное на H_k дискретное преобразование Фурье D_k^s по системе Φ_k , матрица $\mathbf{F}$ может быть восстановлена по экспериментальным данным лишь приближенно. Численно мы оперируем не с точной f , а с некоторым её возмущением $\tilde{f}$ (хотя бы из-за усечения). Раз возмущение неизбежно, то надо сделать его разумно согласованным с возмущением δ и δ_M с целью получения достоверных значений $\tilde{c}(f) = (c_1, \dots, c_k) = \mathbf{F} \cdot S(f)$ векторов дискретных преобразований Фурье в базисе Φ_k .

3. Регуляризованное дискретное преобразование

Устойчивый метод построения искомой матрицы $\mathbf{F}$ дискретного преобразования Фурье на сетке S основан на методе регуляризации А.Н.Тихонова (см. [7, 8]) и сводится к задаче минимизации по $\mathbf{F} \in L(R^n; R^k)$ сглаживающего функционала

$$M^\alpha(\mathbf{F}) = M^0(\mathbf{F}) + \alpha \|\mathbf{F}\|^2, \quad (4)$$

где

$$M^0(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^k \|\mathbf{F} \cdot S(\varphi_i) - \mathbf{F}^k(\varphi_i)\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\sum_{m=1}^n F_j^m \varphi_i(s_m) - \delta_{ij} \right)^2$$

является квадратом невязки системы уравнений (2) (δ_{ij} — символ Кронекера),

квадрат нормы $\|\mathbf{F}\|^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^n (F_j^m)^2$ является стабилизирующим функционалом,

а α — параметр регуляризации, который должен быть выбран согласованным с погрешностью задания исходной информации [9].

Имеются два уровня погрешности: δ и δ_M , причём $\delta_M \ll \delta$. Так как решение $\mathbf{F}_\alpha$ вариационной задачи (4) обычно используется для многократного вычисления векторов $\bar{c}(f)$ конечного спектра в базисе Φ_k функций f по правилу

$$\bar{c}(f) = \mathbf{F}_\alpha \cdot S(f), \quad (5)$$

то выбор параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ в (4) должен быть осуществлён согласованно с уровнем погрешности δ измерения следа $S(f)$ [9].

Полученная указанным путём матрица $\mathbf{F}_\alpha$ является матрицей регуляризованного дискретного преобразования Фурье $D_k^s[\alpha] : R^n \rightarrow R^k$ по системе Φ_k на сетке S . Применение к $\mathbf{F}_\alpha$ и $D_k^s[\alpha]$ результатов [7, 8] о регуляризованных решениях делает справедливым

Предложение 2. Если сетка S такова, что для неё существует точное на H_k дискретное преобразование Фурье по системе Φ_k с сетки S , то при стремлении уровней погрешностей δ и $\delta_M < \delta$ к нулю и согласованном с ними стремлении к нулю параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ матрица $\mathbf{F}_\alpha$ будет стремиться к нормальному решению $\mathbf{F}$ системы уравнений (2), т.е. матрица

$$\mathbf{F} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{F}_\alpha, \quad (6)$$

будет определять по правилу (5) дискретное преобразование Фурье D_k^s на сетке S по базису Φ_k , точное на H_k и обладающее минимальной нормой $\|\mathbf{F}\|$ среди точных на H_k дискретных преобразований Фурье D_k^s .

При обработки экспериментальных данных $S(f)$ для непрерывных на $\mathcal{Q}$ функций f заранее неизвестно, принадлежат ли они выбранному пространству H_k , либо близки к нему с точностью δ измерения значений функции f в точках сетки. Оценку погрешности, вносимую в вектор коэффициентов Фурье по системе φ_k при вычислении их по правилу (5), для непрерывной функции f , близкой к конечномерному пространству H_k , даёт

Предложение 3. Если для сетки $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ существует точное на H_k дискретное преобразование Фурье по системе Φ_k , то для любой матрицы $\mathbf{F}$ точного на H_k дискретного преобразования Фурье по системе Φ_k на сетке S , для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой функции f на $\mathcal{Q}$ такой, что

$$\|f - H_k\|_C = \inf_{p \in H_k} \max_{x \in \mathcal{Q}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

выполняется неравенство

$$\|\mathbf{F}^k(f) - \mathbf{F} \cdot S(f)\| < (\sqrt{\pi} + \sqrt{n} \|\mathbf{F}\|) \varepsilon. \quad (7)$$

Доказательство. Действительно, существует полином $p \in H_k$ такой что

$$\|f - p\|_C = \max_{x \in \mathcal{Q}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Для $h = f - p$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{F}^k(h)\| \leq \|h\|_{L_2(\mathcal{Q})} = \left[\int_{\mathcal{Q}} |h|^2 d\mathcal{Q} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{\mathcal{Q}} d\mathcal{Q} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \|h\|_C < \sqrt{\pi} \varepsilon,$$

$$\|\mathbf{F} \cdot S(h)\| = \|\mathbf{F} \cdot S(-h)\| \leq \|\mathbf{F}\| \cdot \|S(h)\| \leq \|\mathbf{F}\| \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |h(s_j)| < \|\mathbf{F}\| \sqrt{n} \cdot \varepsilon.$$

Спектр $\mathbf{F}^k(p)$ вычисляется с помощью $\mathbf{F}$ по правилу (5) точно:

$$\mathbf{F}^k(p) - \mathbf{F} \cdot S(p) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}^k(f) - \mathbf{F} \cdot S(f)\| &= \|\mathbf{F}^k(f) - \mathbf{F}^k(p) - \mathbf{F} \cdot S(p) + \mathbf{F} \cdot S(p) - \mathbf{F} \cdot S(f)\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{F}^k(h)\| + \|\mathbf{F}^k(p) - \mathbf{F} \cdot S(p)\| + \|\mathbf{F} \cdot S(-h)\| < \sqrt{\pi} \cdot \varepsilon + 0 + \sqrt{n} \|\mathbf{F}\| \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1. Из (6) следует, что минимальность нормы $\|\mathbf{F}\|$ точного на H_k дискретного преобразования Фурье D_k^s по системе Φ_k на сетке S среди всевозможных точных на H_k дискретных преобразований Фурье D_k^s обеспечивает наилучшую по отношению к возмущениям следа $S(f)$ устойчивость D_k^s в сравнении с остальными точными на H_k преобразованиями D_k^s , а решение $\mathbf{F}_\alpha$ задачи (4) доставляет по правилу (5) наиболее устойчивый по отношению к возмущениям следа $S(f)$ способ вычисления вектора коэффициентов Фурье по системе Φ_k среди согласованных с δ дискретных преобразований Фурье D_k^s .

Литература

1. Войцехович В. В. Влияние атмосферной турбулентности на точность определения параметров волнового фронта // Препринт ИКИ АН СССР, Пр-862. — 1984.
2. Севастьянов Л. А., и др. Программно-математический комплекс для обработки киногортманогамм // Препринт ИКИ АН СССР, Пр-1209. — 1987.
3. Микулич А. В. О восполнении дифференцируемой функции на круге по ее неполному следу на сетке. В кн. Современные задачи мат. физики. — М.: УДН, 1986. — С. 63–70.
4. Микулич А. В., Севастьянов Л. А. О дискретном преобразовании Фурье по системе полиномов Цернике. В кн. Современные задачи мат. физики. — М.: УДН, 1986. — С. 71–78.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
6. Luneburg R. K. Mathematical theory of optics. — Berkley: University of California Press, 1965.
7. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. — Т. 151, № 3. — 1963. — С. 501–504.
8. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. — Т. 153, № 1. — 1963. — С. 49–52.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1972.

UDC 519.6

Discrete Transformation of Mesh Functions Values to Fourier Polynomials Coefficients

L. A. Sevastianov, K. P. Lovetsky, M. G. Kokotchikova

*Telecommunications Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Here is elaborated the instrument for solving the practical task of serial reconstruction of coefficients of functions expansion by Zernike polynomials when knowing approximately measured their mesh values. A series of overdetermined and incompatible systems of linear algebraic equations with different right parts and matrices within one accuracy class is solved by Tikhonov regularization method. The conditions of the existence of unique pseudoinverse matrix for exact system are considered. The convergence of regularized pseudoinverse matrices to the exact one is proved when perturbation tends to zero.