

УДК 531.31:62-56

О построении систем с квазиинвариантными программными связями

И. А. Мухаметзянов

*Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

Предлагается процедура построения множества дифференциальных уравнений регуляторов, обеспечивающих стабилизацию программного многообразия управляемой системы при произвольных значениях случайных параметров, входящих в выражения возмущающих функций заданного класса.

1. Постановка задачи

Пусть дана система дифференциальных уравнений движения объекта управления в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varphi_1(x, u, t) + R(x, t)\delta, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x, u, \delta, t),\end{aligned}\tag{1}$$

где x_1 , φ_1 , δ — s -мерные, x_2 , φ_2 — $(n - s)$ -мерные, u — r -мерный, $x(x_1, x_2)$ — n -мерный векторы; R — $(s \times s)$ -мерная матрица.

Предполагается, что $\det \|R\| \neq 0$ в некоторой ограниченной области G .

Требуется построить множество дифференциальных уравнений регуляторов, определяющих изменения вектора управления u , обеспечивающих интегральность и асимптотическую устойчивость «в большом» $(n - k)$ -мерного программного многообразия

$$\omega(x, t) = 0\tag{2}$$

системы (1), подверженной действию возмущений $\delta(c, t)$, при любых случайных значениях конечномерного ограниченного постоянного вектора c .

Заметим, что функция $\omega(x, t)$ в (2) является k -мерной непрерывной и непрерывно дифференцируемой в G вектор-функцией.

В общем случае каждая компонента вектора δ может зависеть от соответствующего количества компонент вектора c . Следовательно, максимальная размерность вектора c может достигать величины $\sum_{i=1}^s n_i$, где n_i — количество постоянных

$c_1^i, \dots, c_n^i$, входящих во все компоненты δ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) вектора δ .

Таким образом, предполагается аппроксимация любой реализации возмущений δ конкретным выбором постоянных параметров c_ν^i ($\nu = 1, \dots, n_i$; $i = 1, \dots, s$).

Идея метода борьбы с возмущениями δ заключается в том, чтобы сделать заданное невозмущенное состояние (2) системы (1), замкнутой дифференциальными уравнениями регулятора, асимптотически устойчивым «в большом» не только к случайным начальным отклонениям от многообразия (2), но также и к случайному изменению вектора c для любых реализаций из некоторой заданной ограниченной области, не выводящей систему (1) из области G .

В случае, когда в качестве невозмущенного состояния принимается одно из частных решений системы (1), инвариантность и квазиинвариантность сводятся

к определениям, принятым в работах В. С. Кулебакина [1], Б. Н. Петрова [2], тесно связанным с теорией К(D)-изображения [3].

В этом случае многообразие (2) невозмущённого состояния системы имеет нулевую меру и, следовательно, не охватывает в полной мере поставленную здесь задачу.

Следует отметить, что литература, посвящённая решению проблемы инвариантности, восходит к работам Г. В. Щипанова [4], Н. Н. Лузина [5], В. С. Кулебакина [1, 6]. Проблемам возникновения, развитию и обсуждению состояния теории инвариантности были посвящены три Всесоюзных совещания учёных-специалистов, труды которых изданы АН СССР в 1959 г. [7], в 1964 г. [8] и в 1970 г. [9]. В дальнейшем развитию этой проблемы были посвящены работы В. В. Величенко [10], О. Н. Фоменко [11] и других.

2. Решение задачи в упрощённой постановке

Рассмотрим случай, когда вектор возмущений $\delta(t, c_1, c_2, \dots, c_s)$ в системе (1) является общим решением уравнения

$$\dot{\delta} = f_0(\delta, t)$$

с постоянными интегрирования $c_1, c_2, \dots, c_s$.

Например, когда система (1) возмущается $(2s_1 + 1)$ -мерным вектором $\delta(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2s_1})$ с элементами

$$\begin{aligned} \delta_0 &= c_0, & \delta_i &= c_i \sin p_i t, & \delta_j &= c_j \cos p_j t, \\ i &= 1, 2, \dots, s_1; & j &= s_1 + 1, \dots, 2s_1 \end{aligned} \quad (3)$$

компоненты вектор-функции $f_0(\delta, t)$ можно задавать в виде

$$f_{00} = 0, \quad f_{0i} = \delta_i p_i \operatorname{ctg} p_i t, \quad f_{0j} = -\delta_j p_j \operatorname{tg} p_j t,$$

где $p_i > 0$ — заданные постоянные, c_0, c_i, c_j — случайные постоянные. Заметим, что возмущения (3), в частности, могут задаваться $s = 2s_1 + 1$ членами ряда Фурье при разложении семейства произвольных периодических функций с любым заданным периодом.

Условие $\det \|R\| \neq 0$ в области G позволяет выражать вектор δ с помощью первого уравнения (1) в виде

$$\delta = R^{-1}[\dot{x}_1 - \varphi_1(x, t)]. \quad (4)$$

Дифференцируя (1) по t и подставляя в них (4) и $\dot{\delta} = f_0(\delta, t)$, где δ заменяется правой частью (4), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \dot{x}_1 - \varphi_1 + \frac{dR}{dt} R^{-1}(\dot{x}_1 - \varphi_1), \\ \ddot{x}_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \delta} f_0 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \dot{u} + \tilde{f}(\dot{x}, x, u, t),$$

где $\varphi = \|\varphi_2^1\|$; $\tilde{f}$ — n -мерная вектор-функция, составленная из элементов правых частей (5), не содержащих вектора $\dot{u}$.

Дифференцируя (2) в силу этих уравнений два раза по t и приравнивая правую часть некоторой вектор-функции Φ , получим

$$\Omega \dot{u} = Q, \quad (6)$$

где

$$\Omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad Q = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \tilde{f} - \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial t} + \Phi(\dot{\omega}, \omega, \dot{x}, x, u, t),$$

$\Phi(\dot{\omega}, \omega, \dot{x}, x, u, t)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0, 0, \dot{x}, x, u, t) \equiv 0$ и обладающая способностью обеспечивать асимптотическую устойчивость «в большом» тривиального решения $\omega = 0, \dot{\omega} = 0$ уравнения [12]

$$\ddot{\omega} = \Phi(\dot{\omega}, \omega, \dot{x}, x, u, t). \quad (7)$$

Предположим, что $\det \|\Omega \Omega^T\| \neq 0$ в области G . В этом случае общее решение системы (6), состоящей из k конечных уравнений относительно r компонентов вектора $\dot{u}$, при $r \geq k$ имеет вид [13]

$$\dot{u} = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} Q + [E - \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} \Omega] \tilde{u}, \quad (8)$$

где E — единичная $(r \times r)$ -матрица, $\tilde{u}$ — произвольная r -мерная вектор-функция.

Полученное уравнение (8) является искомым множеством дифференциальных уравнений регуляторов объекта управления (1).

Необходимо отметить, что от подходящего выбора произвольной вектор-функции Φ в правой части (7) зависит качество переходного процесса в системе (1), (8). В связи с этим приведём один из возможных способов выбора функции Φ , позволяющего наделить систему необходимым качеством переходного процесса. С этой целью, умножая (7) на некоторую симметрическую определённо-положительную $(k \times k)$ -матрицу $A(x, t)$, получим

$$A \ddot{\omega} = A \Phi. \quad (9)$$

Введём замену [14]

$$y = \dot{\omega} - f(\omega, t), \quad f(0, t) \equiv 0, \quad (10)$$

где $f(\omega, t)$ — произвольная k -мерная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми в области G элементами, допускающая бесконечно малый высший предел по модулю.

Умножая уравнение (9) скалярно на y , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^T A y) = y^T A \Phi. \quad (11)$$

Если вектор $A \Phi$ в правой части этого уравнения выбрать в виде [14]

$$A \Phi = -Dy - F\omega - A \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)^T y + A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y, \quad (12)$$

то (11) принимает выражение

$$\frac{1}{2} \frac{dV}{dt} = -y^T D y + \left(f^T F + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega, \quad (13)$$

где D, F — некоторые произвольно выбираемые симметрические определённо-положительные матрицы, $V = y^T A y + \omega^T F \omega$ — определённо-положительная функция Ляпунова, допускающая бесконечно малый высший предел. Следовательно, при достижении определённой отрицательности функции $(f^T F + \omega^T \dot{F}/2)\omega$

соответствующим выбором матрицы F и функции f правая часть (13) будет определённо-отрицательной по y , ω и при этом программное многообразие (2) будет асимптотически устойчивым «в большом» в области G . В частности, при $f = -\omega$ вектор (12) имеет вид

$$A\Phi = -Dy - F\omega - A\dot{\omega} - \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y.$$

Здесь dA/dt предполагается ограниченной в G . Теперь из (12) получим

$$\Phi = -A^{-1}(Dy + F\omega) - \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^T y + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} A^{-1} \frac{dA}{dt} y. \quad (14)$$

Для оценки качества переходного процесса, интегрируя обе части (13), получим

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T Dy - \left(f^T + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega \right] dt = \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0). \quad (15)$$

Это равенство является интегральным критерием качества переходного процесса. Имея свободу выбора матриц D , F , A и функции f , подынтегральному выражению и функции V можно придать нужную структуру с необходимыми весовыми элементами.

При задании конкретного числового значения V_0 уравнение

$$\frac{1}{2} (y_0^T A y_0 + \omega_0^T F \omega_0) = V_0 \quad (16)$$

в $2k$ -мерном пространстве $\dot{\omega}_0$, ω_0 описывает эллипсоид, поверхность которого является геометрическим местом точек, обладающих следующим свойством. Для начавшихся из них движений имеет место интегральный критерий качества переходного процесса (15), а для всех начальных значений $\dot{\omega}_0$, ω_0 внутри эллипсоида (16) справедлива оценка качества переходного процесса

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T Dy - \left(f^T + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega \right] dt < \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0),$$

где V_0 — значение $V(t)$ на поверхности (16).

3. Алгоритм решения задачи в общей постановке

Допустим, что удалось построить дифференциальные операторы

$$P_i [\delta_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{n_i})] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (17)$$

Подставляя в (17) найденное из первого уравнения (1) выражение δ вида (4), получим векторную формулу (17)

$$P[R^{-1}\dot{x}_1 - R^{-1}\varphi_1(x, u, t)] = 0. \quad (18)$$

Система (18) состоит из s дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет порядок $(1 + n_i)$. Таким образом, вместо (1) получается расширенная система

$$P[R^{-1}\dot{x}_1 - R^{-1}\varphi_1(x, u, t)] = 0, \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x, u, \delta, t). \quad (20)$$

Для того чтобы эта система была эквивалентна системе (1) необходимо найти соответствующие начальные условия. Для этого нужно продифференцировать уравнения первой группы системы (1) $(n_i - 1)$ раз и подставить в них $x_{i0}, u_{r0}, \delta_{i0}$, т. е. снова получить случайные начальные условия для системы (19), (20).

Заметим, что построением системы (19), (20) вместо (1) достигается явная независимость системы уравнений движения от возмущений $\delta(c, t)$, но при этом сохраняется их влияние на начальные условия.

Теперь решение поставленной задачи может быть получено путём построения дифференциальных уравнений регулятора, обеспечивающего интегральность многообразия (2) для системы (19), (20) и асимптотическую устойчивость «в большом» этого многообразия при начальных отклонениях от этого многообразия, зависящих от случайных постоянных компонентов вектора c .

Предположим, что система (19) в области G разрешима относительно старших производных переменных x . Тогда систему (19), (20) можно привести к виду

$$\begin{aligned} x_\mu^{(N)} &= \tilde{\varphi}_\mu^{(N)}(x, u, t) + F_\mu(x_\mu^{(N-1)}, x_\nu^{(m_\nu-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-1)}, \dots, \dot{u}, u, t), \\ \mu &= 1, \dots, l_1, \\ x_\nu^{(m_\nu)} &= \varphi_\nu^{(m_\nu)}(x, u, t) + F_\nu(x_\mu^{(N-1)}, x_\nu^{(m_\nu-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-1)}, \dots, \dot{u}, u, t), \\ \nu &= l_1 + 1, \dots, s, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x, u, \delta, t), \end{aligned} \quad (21)$$

где δ имеет выражение (4); N — наибольшее из чисел n_i ; l_1 — количество уравнений системы (19), имеющих порядок N ; $m_\nu < N$; x_μ — компоненты вектора x , входящие в (19) с наибольшим порядком N дифференцирования по t ; x_ν — компоненты вектора x , входящие в (19) с порядком дифференцирования по t меньше N .

После дифференцирования (2) в силу системы (21) по t N раз получим

$$\omega^{(N)} = \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \psi}{\partial u} u^{(N-1)} + F(x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t), \quad (22)$$

где F — часть $\omega^{(N)}$, не содержащая $u^{(N-1)}$; $\tilde{x}$ — вектор с компонентами x_μ ($\mu = 1, 2, \dots, l_1$); ψ — вектор с компонентами $\tilde{\varphi}_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, l_1$).

Приравниваем правую часть (22) произвольной k -мерной вектор-функции $\Phi(\omega^{(N-1)}, \dots, \dot{\omega}, \omega, x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t)$, удовлетворяющей условию

$$\Phi(0, \dots, 0, 0, x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t) \equiv 0$$

и обладающей способностью обеспечивать асимптотическую устойчивость «в большом» тривиального решения $\omega = 0, \dot{\omega} = 0, \dots, \omega^{(N-1)} = 0$ уравнения

$$\omega^{(N)} = \Phi.$$

Тогда для определения r компонентов вектора $u^{(N-1)}$ получим k конечных уравнений вида

$$\Omega u^{(N-1)} = Q(x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t), \quad (23)$$

где

$$\Omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad Q = \Phi - F.$$

Если в области G $\det |\Omega \Omega^T| \neq 0$, то общее решение системы (23) может быть представлено в виде [13]

$$u^{(N-1)} = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} Q + [E - \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} \Omega] \tilde{u}, \quad (24)$$

где $\tilde{y}$ — произвольная r -мерная вектор-функция, E — единичная $(r \times r)$ -матрица.

Уравнение (24) и есть множество искомым дифференциальных уравнений регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость «в большом» и интегральность многообразия (2) при действии на исходную систему возмущений $\delta(c, t)$. Заметим, что при $r = k$ уравнение (24) становится единственным, так как при этом $[E - \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega] = 0$.

Следует отметить, что некоторые элементы вектора ω в (2) могут быть заданы независимыми от переменных x_μ или одновременно и от x_μ , и от x_ν . При этом такие элементы вектора ω необходимо дифференцировать по t в первом случае m_ν раз, а во втором — один раз. В этих случаях в систему конечных уравнений (23) войдут элементы вектора u со старшими производными разных порядков. Систему (23) в таких случаях следует решать относительно старших производных всех элементов вектора u . При этом система дифференциальных уравнений регуляторов будет состоять из уравнений разных порядков относительно производных вектора u .

В заключении приведём способ получения дифференциального оператора (17), предложенный в работе [11].

Пусть элемент δ_i вектора δ задан в виде

$$\delta_i = \tilde{\Phi}_i(t, c_1, \dots, c_m) \quad (25)$$

и определены его производные по t

$$\tilde{\Phi}_i^{(k)}(t, c_1, \dots, c_m) = \delta_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (26)$$

Если удастся разрешить системы (25), (26) относительно одного из постоянных c_μ

$$\tilde{\psi}_\mu(t, \delta_i, \dot{\delta}_i, \dots, \delta_i^{(m-1)}) = c_\mu,$$

то производная по t функции $\tilde{\psi}_\mu$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_\mu}{\partial \delta_i} \dot{\delta}_i + \sum_{\lambda=1}^{m-1} \frac{\partial \tilde{\psi}_\mu}{\partial \delta_i^{(\lambda)}} \delta_i^{(\lambda+1)} + \frac{\partial \tilde{\psi}_\mu}{\partial t} = 0$$

будет представлять собой оператор (17) порядка m . В [11] приведены операторы (17) некоторых наиболее характерных типов возмущений.

Если возмущение линейно зависит от постоянных c_k

$$\delta_i = \sum_{k=1}^m c_k \alpha_k(t),$$

то оператор (17) ищется в виде линейного однородного уравнения m -го порядка

$$\delta_i^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(t) \delta_i^{(k)} = 0. \quad (27)$$

В этом случае функции $\alpha_k(t)$ являются фундаментальными решениями уравнения (27). Следовательно, коэффициенты $b_k(t)$ этого уравнения определяются из системы конечных уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_j^{(k)} b_k = -\alpha_j^{(m)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

4. Построение уравнений регулятора системы квазиинвариантной стабилизации программной ориентации преследующего тела

В качестве примера рассмотрим твёрдое тело, жёстко связанное с подвижной системой координат $sxyz$. Дифференциальное уравнение для главного вектора управляющих сил $\tilde{u}_2$ построим так, чтобы центр масс s двигался по кривой погони за преследуемой точкой o при её движении по произвольному закону $r_0(t)$ относительно инерциальной системы координат $o_1x_1y_1z_1$. При этом вектор управляющих моментов $\tilde{u}_1$ относительно центра масс тела должен быть таким, чтобы одна ось тела, например sz , асимптотически стремилась занять направление so . Следовательно, программная ориентация тела в этом случае может быть задана выражениями

$$\omega_1^i = k_i \cdot e = 0, \quad \omega_2^i = k_i \cdot v = 0, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

где k_1, k_2 — орты осей sx и sy ; e — орт вектора so ; v — вектор абсолютной скорости центра масс тела; $(\cdot)$ — знак скалярного произведения.

Известно, что движение центра масс в инерциальной системе координат $o_1x_1y_1z_1$ и вращательное движение тела вокруг центра масс в осях подвижной системы координат $sxyz$ описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_0 &= I\omega_0 \times \omega_0 + M_* + \tilde{u}_1 + \tilde{R}_1\delta, \\ m\dot{v} &= f_0 + \tilde{u}_2 + \tilde{R}_2\delta, \end{aligned} \quad (29)$$

где I — тензор инерции тела в точке s ; $\omega_0(p, q, r)$ — мгновенная угловая скорость тела; p, q, r — проекции ω_0 на оси sx, sy, sz ; m — масса тела; M_* — главный момент заданных сил относительно центра масс s ; f_0 — главный вектор заданных сил; δ — вектор возмущений; $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ — заданные (3×3) -матрицы, причём элементы $\tilde{R}_1$ предполагаются постоянными.

Систему (29) представим в виде

$$\dot{\omega}_0 = I^{-1}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) + u_1 + R_1\delta, \quad \dot{v} = f_0/m + u_2 + R_2\delta, \quad (30)$$

где $u_1 = I^{-1}\tilde{u}_1$, $u_2 = \tilde{u}_2/m$, $R_1 = I^{-1}\tilde{R}_1$, $R_2 = \tilde{R}_2/m$.

Предположим, что $\det \|R_1\| \neq 0$.

Вектор возмущений зададим в виде

$$\delta = c_1 + c_2 \sin(pt + c_3), \quad (31)$$

$c_i(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ — случайные трёхмерные постоянные векторы, $\tilde{p}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ — заданный постоянный вектор.

Поставим задачу: построить множество дифференциальных уравнений регулятора, определяющего изменения векторов управления u_1, u_2 так, чтобы обеспечивалась интегральность и асимптотическая устойчивость «в большом» программного многообразия (28) системы (30) при любых случайных значениях постоянных c_i , входящих в выражение (31) возмущающего вектора δ . Заметим, что (31) является общим решением системы дифференциальных уравнений

$$\delta_i^{(3)} + \tilde{p}^2 \dot{\delta}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

которая может быть представлена в следующей векторной форме:

$$\delta^{(3)} + \tilde{p} \dot{\delta} = 0, \quad (32)$$

где $\tilde{p}$ — диагональная матрица (3×3) с элементами $\tilde{p}_i^2$.

Из первого уравнения системы (30) имеем

$$\delta = R_1^{-1}\dot{\omega}_0 - R_1^{-1}I^{-1}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) - R_1^{-1}u_1. \quad (33)$$

Умножая (32) на R_1 и подставляя в него значения $\dot{\delta}$ и $\delta^{(3)}$, полученные дифференцированием (33) по t , имеем

$$\omega_0^{(4)} = \frac{d^3}{dt^3} [I^{-1}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*)] + u_1^{(3)} - \tilde{p} \frac{d}{dt} [\dot{\omega}_0 - I^{-2}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) - u_1]. \quad (34)$$

Присоединим к этому уравнению второе уравнение (30), подставляя в него выражение (33)

$$\dot{v} = f_0/m + u_2 + R_2 R_1^{-1} [\dot{\omega}_0 - I^{-2}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) - u_1]. \quad (35)$$

Дифференцируя (28) по t , получим

$$\frac{d^5 \omega_1^i}{dt^5} = \frac{d^5 k_i}{dt^5} \cdot e + k_i \cdot \frac{d^5 e}{dt^5}, \quad \frac{d \omega_2^i}{dt} = \frac{d k_i}{dt} \cdot v + k_i \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (36)$$

Для производных векторов k_i имеет место формула Пуассона $\dot{k}_i = \omega_0 \times k_i$. Следовательно, имеем

$$k_i^{(\nu)} = \omega_0^{(\nu-1)} \times k_i + \omega_0 \times k_i^{(\nu-1)}, \quad \nu = 2, 3, 4, 5.$$

Подставим эти выражения в (36). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \omega_1^i}{dt^5} &= \omega_0^{(4)} \cdot (k_i \times e) + \omega_0 \cdot (k_i^{(4)} \times e) + k_i \cdot e^{(5)}, \\ \frac{d \omega_2^i}{dt} &= (\omega_0 \times k_i) \cdot v + k_i \cdot \dot{v}. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя в (37) выражения (34), (35), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \omega_1^i}{dt^5} &= (k_i \times e) \cdot u_1^{(3)} + F_1^i(\ddot{u}_1, \dot{u}_1, u_1, \omega_0^{(3)}, \ddot{\omega}_0, \dot{\omega}_0, \omega_0, t), \\ \frac{d \omega_2^i}{dt} &= k_1 \cdot u_2 + F_2^i(u_1, \dot{\omega}_0, \omega_0, f, m, I, M_*, R_2), \end{aligned} \quad (38)$$

где F_1^i — члены, не содержащие $u_1^{(3)}$; F_2^i — члены, не содержащие u_2 .

Приравниваем правые части уравнений (38), соответственно, двумерным вектор-функциям

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -a_1 \omega_1^{(4)} - a_2 \omega_1^{(3)} - a_3 \ddot{\omega}_1 - a_4 \dot{\omega}_1 - a_5 \omega_1, \\ \Phi_2 &= -a_6 \omega_2, \end{aligned}$$

где a_i ($i = 1, \dots, 5, 6$) — произвольные (2×2) постоянные матрицы такие, что вещественные части корней характеристических уравнений, соответствующих системе

$$\begin{aligned} \omega_1^{(5)} + a_1 \omega_1^{(4)} + a_2 \omega_1^{(3)} + a_3 \ddot{\omega}_1 + a_4 \dot{\omega}_1 + a_5 \omega_1 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 + a_6 \omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

являются отрицательными. Здесь ω_1 и ω_2 двумерные векторы с элементами ω_1^i, ω_2^i .

После этого получим

$$\Omega_1 u_1^{(3)} = Q_1, \quad \Omega_2 u_2 = Q_2, \quad Q_i = \Phi_i - F_i, \quad i = 1, 2, \quad (39)$$

где Ω_1 и Ω_2 — (2×3) -матрицы, элементы которых, соответственно, равны элементам векторов $(k_i \times e)$ и k_i .

Следовательно, они имеют вид

$$\Omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & -(e \cdot k_3) & (e \cdot k_2) \\ (e \cdot k_3) & 0 & -(e \cdot k_1) \end{vmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

При $\det \|\Omega_i \Omega_i^T\| \neq 0$ общее решение уравнений (39) может быть представлено в виде [13]

$$\begin{aligned} u_1^{(3)} &= \Omega_1^T (\Omega_1 \Omega_1^T)^{-1} Q_1 + [E - \Omega_1^T (\Omega_1 \Omega_1^T)^{-1} \Omega_1] u_1^0, \\ u_2 &= \Omega_2^T (\Omega_2 \Omega_2^T)^{-1} Q_2 + [E - \Omega_2^T (\Omega_2 \Omega_2^T)^{-1} \Omega_2] u_2^0, \end{aligned} \quad (40)$$

где E — единичная (3×3) -матрица; u_1^0 , u_2^0 — произвольные трёхмерные вектор-функции.

Таким образом, построено множество уравнений (40) регуляторов, присоединяемых к уравнениям объекта управления (29), которые обеспечивают интегральность и асимптотическую устойчивость «в большом» программного многообразия (28).

Литература

1. Кулебакин В. С. О применимости принципа абсолютной инвариантности в физических реальных системах // Докл. АН СССР. — Т. 68, № 5. — 1948.
2. Петров Б. Н. О реализуемости условий инвариантности // Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Труды совещания, состоявшегося в г.Киеве 16-20 октября 1958 г. — Киев: Изд-во АН УССР, 1959. — С. 59–80.
3. Уланов Г. М., Птичкин В. А. Статистическая оптимизация и теория К(D)-изображений // Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды II-го Всесоюзного совещания. — М.: Наука, 1964. — С. 109–114.
4. Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. — № 1. — 1939. — С. 49–66.
5. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. — № 5. — 1940. — С. 3–66.
6. Кулебакин В. С. Общие основы автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. — № 6. — 1940.
7. Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Труды совещания, состоявшегося в г. Киеве 16–20 октября 1958 г. — Киев: Изд-во АН УССР, 1959. — 384 с.
8. Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды II-го Всесоюзного совещания, состоявшегося в г. Киеве 29 мая–1 июня 1962 г. — М.: Наука, 1964. — 504 с.
9. Теория инвариантности автоматических систем. Труды III-го Всесоюзного совещания по теории инвариантности и ее применению в системах автоматического управления, состоявшегося в г. Киеве 31 мая–5 июня 1966 г. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
10. Величенко В. В. О структуре, управляемости и синтезе инвариантных систем // Докл. АН СССР. — Т. 200, № 5. — 1971. — С. 1044–1047.
11. Фоменко О. Н. Квазиинвариантные оптимальные системы автоматического управления // Автоматика и телемеханика. — № 2. — 1970. — С. 145–148.
12. Мухаметзянов И. А. Построение множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по заданной программе // Труды Университета дружбы народов. Теоретическая механика. — М.: Изд-во УДН, 1963. — С. 52–55.
13. Мухаметзянов И. А. Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. — № 10. — 1972. — С. 16–23.
14. Мухаметзянов И. А. Построение систем с асимптотически устойчивыми программными связями // ПММ. — Т. 65, № 5. — 2001. — С. 822–830.

UDC 531.31:62-56

On Construction of the Systems with Quasi-Invariant Program Constraints

I. A. Mukhametzyanov

*Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

The procedure of construction of the systems with the quasi-invariant program constraints is proposed.