

УДК 531.36, 590.86

Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями

Р. Г. Мухарлямов

*Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

Динамические аналогии в простейших экономических объектах и в движении точки переменной массы позволяют использовать современные методы аналитической механики для решения задачи управления производственным предприятием. Целью управления полагается достижение и стабилизация заданных соотношений между объёмами и мощностями подразделений за счёт вновь поступающих основных фондов. Для решения задачи используется метод управления динамикой системы с программными связями.

Введение

Методы моделирования динамики систем с программными связями позволяют обеспечить стабилизацию связей при численном решении дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих движение механической системы и связи, наложенные на неё. Вследствие динамических аналогий, существующих между системами различной физической природы, область применения методов моделирования механических систем существенно расширяется. Анализ динамики простейшего экономического объекта выявляет аналогии с динамикой точки переменной массы и позволяет использовать методы динамики механических систем для моделирования процессов в экономических системах.

Для учёта, контроля, анализа и оптимизации финансово-хозяйственной деятельности предприятия к настоящему времени разработано большое число корпоративных экономических информационных систем. Подробная классификация таких систем приводится в [1]. Существенное значение в этой классификации придаётся системам, позволяющим решать не только проблемы планирования и финансирования, но также учитывать производственные функции, такие, как производственные мощности и их ресурсы.

Современная экономика предъявляет жёсткие требования к управлению объектом или системой. Управление предполагает достижение поставленной цели с учётом возможностей объекта и влияния внешней среды. Для моделирования решения задачи управления необходимо построение уравнений динамики, отражающих свойства объекта, возмущения, вызванные влиянием среды, и формулировка цели управления. Современные компьютерные технологии позволяют создавать аналитическую информацию об эффективности производства и других отраслей экономики, создавать системы классификации технико-экономической информации, создавать эффективные математические модели развития объектов и систем. Так, в [2] предлагается математическая модель финансирования сферы высшего образования, представленная системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно финансовых ресурсов и числа квалифицированных специалистов, выпускаемых группой вузов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №06-01-00664)

Автор выражает благодарность Действительному члену Академии наук Республики Татарстан Сиразетдинову Т. К. за ценные замечания, высказанные при редактировании работы.

Вопросы представления процессов в экономике динамическими моделями впервые были поставлены в работах [3, 4]. В качестве элемента экономики принимается простой экономический объект, которому ставится в соответствие материальная точка.

Под материальной точкой переменной массы принято понимать [5] множество частиц, которые в рассматриваемый момент времени находятся в области, ограниченной некоторой контрольной поверхностью, совершающей поступательное движение. Совокупность геометрических точек, соответствующих областям с изменяющимся составом частиц, совершающим поступательные движения, составляет механическую систему с переменными массами.

Простой экономический объект имеет свою структуру, определяемую его функциональным назначением. Так, простой производственный объект имеет два входа и один выход. Входами являются потоки основных и оборотных фондов, а выходом поток готовой продукции. Агрегированием простых экономических объектов строится аналог твёрдого тела. В [6] проводится аналогия между процессами в простейших экономических объектах и движением точки переменной массы, исследуются динамические модели различных экономических систем. В [7, 8] излагаются методы математического моделирования сложных динамических процессов и информационных технологий с учётом их особенностей, обобщение их к единой позиции с привлечением материалов, известных в области экономического моделирования.

1. Динамика простейшего производственного объекта

Рассмотрим производственный объект, выпускающий однотипную продукцию. Максимальный объем продукции, которую может выпускать объект в единицу времени при отсутствии ограничений составляет его мощность $y = y(t)$. Пусть функция $q = q(t)$ определяет состояние основных производственных фондов в момент времени t . Тогда отношение $\frac{q(t)}{y(t)} = m(t)$ является мгновенной фондоёмкостью основных фондов объекта по выпуску данного вида продукции. Дифференцирование выражения $q(t) = m(t)y(t)$ по времени t приводит к уравнению развития мощности

$$\frac{d}{dt}(m(t)y(t)) = u_0(t).$$

Величина $u_0(t)$ представляет собой истинный прирост основных фондов в единицу времени. Он учитывает вновь поступившие и используемые с момента t основные фонды $u = u(t)$, и фонды w , выбывающие из потребления за счёт износа и старения оборудования. Выбывающие фонды w в общем случае зависят от объёма Y выпускаемой продукции к моменту времени t , мощности y объекта и от времени t : $w = w(Y, y, t)$. Часто выбытие основных фондов принимается пропорциональным мощности $w = \beta y$. Величина β называется коэффициентом выбытия или коэффициентом старения основных фондов. Тогда с учётом равенства $u_0 = u - \beta y$ уравнение развития можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(my) + \beta y = u. \quad (1)$$

Объём продукции $x = x(t)$, выпускаемой объектом в единицу времени, не превосходит мощности $y = y(t)$: $0 \leq x(t) \leq y(t)$ и определяется потоком оборотных фондов $v = v(t)$: $x(t) = k(t)v(t)$, где $k(t)$ является коэффициентом эффективности оборотных фондов.

Пусть объект производит продукцию полной своей мощностью, т. е. объём выпускаемой продукции в единицу времени равняется мощности $x(t) = y(t)$. Тогда мощность объекта представляется в виде равенства

$$y(t) = \frac{dY}{dt},$$

где $Y = Y(t)$ обозначает общий объем продукции, произведённой объектом к моменту времени t , а уравнение развития (1) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dY}{dt} \right) + \beta \frac{dY}{dt} = u.$$

В случае, когда w линейно зависит от переменных Y и $\frac{dY}{dt}$, уравнение развития (1) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dY}{dt} \right) + \beta \frac{dY}{dt} + kY = u. \quad (2)$$

В общем случае поток вновь поступающих в производство основных фондов u может зависеть от мощности объекта $y(t) = \frac{dY}{dt}$ и общего объема продукции Y . Тогда уравнение мощности представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно объема выпускаемой продукции Y

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dY}{dt} \right) + w \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right) = u \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right). \quad (3)$$

Если известны величина m и заданы функции $w \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right)$, $u \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right)$, то закон изменения объема выпускаемой продукции во времени будет определяться решением дифференциального уравнения (3) при начальных значениях

$$Y(t_0) = Y_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Из выражения (3) следует, что, управляя потоком вновь поступающих в производство основных фондов u , можно добиться требуемых законов изменения во времени объема выпускаемой продукции $Y = Y(t)$ и мощности производственного объекта $y = y(t)$. В этом смысле поток основных фондов u можно рассматривать как функцию управления.

Уравнением (3) описывается динамика объектов и систем, содержащих элементы различной физической природы. В [9] приводится обоснование общих понятий динамики, и устанавливаются динамические аналогии между элементами различной физической природы. Показывается, что динамические аналогии позволяют использовать для анализа динамики и синтеза управления аналитические методы, наиболее полно развитые в классической механике.

Такой подход оказывается эффективным и для исследования динамики экономических объектов, описываемых уравнениями (2) или (3). Тем более что структура этих уравнений совпадает с уравнением динамики точки переменной массы.

2. Уравнение движения точки переменной массы

Под материальной точкой переменной массы [5, 10] принято понимать множество частиц, которые в рассматриваемый момент времени t будут находиться в области, ограниченной некоторой контрольной поверхностью. При этом считают, что эта область совершает поступательное движение, определяемое движением некоторой геометрической точки. Совокупность геометрических точек, соответствующих областям с изменяющимся составом частиц, совершающим поступательные движения, составляет механическую систему с переменными массами.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки переменной массы. Обозначим через m_0 массу материальной точки в момент времени t , m_1 — массу тех частиц, которые присоединились к материальной точке за время Δt и m_2 — массу частиц, которые от неё отделились за то же время. Тогда масса материальной точки на отрезке времени от t до $t + \Delta t$ определяется суммой

$$m = m_0 + m_1 - m_2.$$

Будем считать, что m_1 и m_2 не зависят от скорости точки. Пусть u_1 и u_2 определяют значения скоростей центров инерции частиц, присоединяющихся к точке и отделяющихся от неё. Движение свободной материальной точки описывается уравнением Мещерского

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + R, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

где v есть скорость материальной точки, F — внешние силы, действующие на точку,

$$R = -u_1 \frac{dm_1}{dt} - u_2 \frac{dm_2}{dt}$$

представляет собой реактивную силу, вызванную изменением массы точки и относительными скоростями присоединяющихся и отделяющихся частиц.

3. Управление производственным предприятием

Общая структура уравнения (3) динамики простейшего экономического объекта и уравнения (4) динамики точки переменной массы позволяет использовать методы моделирования динамики механических систем для решения задачи исследования динамики экономических систем.

Рассмотрим задачу управления производственным предприятием, состоящим из n подразделений или выпускающим n видов продукции. Каждое подразделение рассматривается как простой производственный объект. Будем считать, что предприятие допускает управление за счёт поступающих в производство основных фондов $u_1, \dots, u_k$, распределённых по подразделениям с коэффициентами b_{is} , $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, k$. В качестве поступающих основных фондов могут быть материалы, оборудование, финансы, рабочая сила и другие показатели. Представим уравнение мощности предприятия системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}(q_i) + w_i \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right) = f_i \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right) + \sum_{s=1}^k b_{is} \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right) u_s. \quad (5)$$

В равенстве (5) приняты следующие обозначения: q_i — состояние основных производственных фондов i -го подразделения в момент времени t , используемых всеми подразделениями,

x_i — объем продукции i -го подразделения,

$\frac{dx_i}{dt}$ — мощность i -го подразделения,

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор с компонентами $x_1, \dots, x_n$,

$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$ — вектор с компонентами $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$,

$q_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \frac{dx_j}{dt}$, m_{ij} — мгновенная фондёмкость i -го подразделения, используемая для j -го подразделения,

$f_i = f_i(x, \dot{x}, t)$ — факторы, влияющие на изменение основных производственных фондов в момент времени t .

Предположим, что мгновенные фондѐмкости подразделений в общем случае могут зависеть от переменных x, t : $m_{ij} = m_{ij}(x, t)$. Введѐм обозначения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt}, \\ a_i(x, \dot{x}, t) &= \sum_{j=1}^n \dot{m}_{ij} \dot{x}_{ij} + w_i(x, \dot{x}, t) - f_i(x, \dot{x}, t), \\ \dot{m}_{ij} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial m_{il}}{\partial x_l} \dot{x}_l + \frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\end{aligned}$$

и перепишем систему (5) в виде

$$\sum_{j=1}^k m_{ij} \ddot{x}_j + a_i = \sum_{s=1}^k b_{is} u_s. \tag{6}$$

Система (6) представляет собой математическую модель управляемой системы с функциями управления $u_1, \dots, u_k$. Примем за цель управления достижение и стабилизация заданных соотношений между объѐмами x_i и мощностями $\dot{x}_i$ подразделений

$$g_\mu(x, t) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m, \tag{7}$$

$$g_\rho(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \rho = m + 1, \dots, r, \quad r \leq k. \tag{8}$$

Если рассматривать систему дифференциальных уравнений (6) как уравнения динамики управляемой механической системы, то равенства (7), (8) соответственно являются уравнениями голономных и неголономных связей, наложенных на неё. Функции управления $u_1, \dots, u_k$ должны быть подобраны так, чтобы равенства (7), (8) выполнялись при всех значениях $t > t_0$, если они выполняются в начальный момент

$$g_\mu(x^0, t_0) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial x_i} \dot{x}_i^0 + \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

$$g_\rho(x^0, \dot{x}^0, t_0) = 0, \tag{10}$$

$$x^0 = x(t_0), \quad \dot{x}^0 = \dot{x}(t_0). \tag{11}$$

Если условия (9), (10) не выполняются:

$$g_\mu(x^0, t_0) = y_\mu^0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial x_i} \dot{x}_i^0 + \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial t} = \dot{y}_\mu^0, \tag{12}$$

$$g_\rho(x^0, \dot{x}^0, t_0) = \dot{y}_\rho^0, \tag{13}$$

то на решении $x = x(t), \dot{x} = \dot{x}(t)$ системы (6), соответствующем определённым функциям управления $u_1, \dots, u_k$ и начальным условиям (11), будут выполняться равенства

$$g_\mu(x, t) = y_\mu(t), \quad y_\mu(t_0) = y_\mu^0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu(x, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial g_\mu(x, t)}{\partial t} = \dot{y}_\mu(t), \quad \dot{y}_\mu(t_0) = \dot{y}_\mu^0, \tag{14}$$

$$g_\rho(x, \dot{x}, t) = \dot{y}_\rho(t), \quad \dot{y}_\rho(t_0) = \dot{y}_\rho^0. \tag{15}$$

Продифференцируем равенства (14), (15) по времени

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \ddot{x}_i + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i + \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial t^2} = \ddot{y}_\mu(t), \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\rho}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\rho}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial g_\rho}{\partial t} = \ddot{y}_\rho(t). \quad (17)$$

Заменив $\ddot{x}_i$ в равенствах (16), (17) их выражениями из (6), получим систему из r уравнений относительно k управлений u_s

$$\sum_{s=1}^k h_{\kappa s} u_s = \ddot{y}_\kappa - p_\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, r, \quad (18)$$

$$h_{\kappa s} = \sum_{i=1}^n g_{\kappa i} c_{is}, \quad c_{is} = \sum_{j=1}^n m_{ij}^{(-1)} b_{js},$$

$$p_\kappa = \tilde{g}_\kappa - \sum_{i=1}^n g_{\kappa i} m_i, \quad m_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}^{(-1)} a_j, \quad g_{\kappa i} = \frac{\partial g_\kappa}{\partial x_i},$$

$$\tilde{g}_\mu = 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i + \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial t^2}, \quad \tilde{g}_\rho = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\rho}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial g_\rho}{\partial t},$$

$m_{ij}^{(-1)}$ — элемент матрицы, обратной к матрице (m_{ij}) .

4. Стабилизация целевых соотношений

Определим управляющие функции u_s так, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{s=1}^k h_{\kappa s} u_s = h_\kappa, \quad h_\kappa = \sum_{\lambda=1}^r k_{\kappa \lambda} \dot{y}_\lambda + \sum_{\nu=1}^k l_{\kappa \nu} y_\nu - p_\kappa. \quad (19)$$

Стабилизация заданных соотношений (7), (8) между объёмами x_i и мощностями $\dot{x}_i$ подразделений достигается соответствующим выбором коэффициентов $k_{\kappa \lambda}$, $l_{\kappa \nu}$ при $\dot{y}_\lambda$, y_ν в правой части равенства (18), которые являются произвольными функциями переменных x_i , $\dot{x}_j$, t . Из (18), (19) следует, что переменные y_μ , $\dot{y}_\kappa$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_\mu}{dt} = \dot{y}_\mu, \quad \frac{d\dot{y}_\kappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^r k_{\kappa \lambda} \dot{y}_\lambda + \sum_{\nu=1}^k l_{\kappa \nu} y_\nu \quad (20)$$

с начальными условиями (12), (13). Система (20) допускает тривиальное решение $y_\kappa = 0$, $\dot{y}_\kappa = 0$, соответствующее уравнениям связей (7), (8). Коэффициенты $k_{\kappa \lambda}$, $l_{\kappa \nu}$ системы являются произвольными и их можно выбрать так, чтобы решение $y_\kappa = 0$, $\dot{y}_\kappa = 0$ было устойчиво или асимптотически устойчиво. Для определения условий устойчивости тривиального решения системы (20) построим функцию Ляпунова V в виде квадратичной формы

$$2V = \sum_{\mu,\nu=1}^m a_{\mu\nu}^{(00)} y_\mu y_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=1}^r a_{\mu\kappa}^{(01)} y_\mu \dot{y}_\kappa + \sum_{\kappa,\lambda=1}^r a_{\kappa\lambda}^{(11)} \dot{y}_\kappa \dot{y}_\lambda. \quad (21)$$

Будем считать, что коэффициенты функции V зависят только от переменных x_i , t и квадратичная форма (21) является определённо-положительной при всех значениях переменных $x_i : 0 \leq x_i \leq X$ и $t \geq t_0$. Вычислим производную функции V в силу уравнений системы (20)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{\mu,\nu=1}^m b_{\mu\nu}^{(00)} y_\mu y_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=1}^r b_{\mu\kappa}^{(01)} y_\mu \dot{y}_\kappa + \sum_{\kappa,\lambda=1}^r b_{\kappa\lambda}^{(11)} \dot{y}_\kappa \dot{y}_\lambda, \\ b_{\mu\nu}^{(00)} &= \dot{a}_{\mu\nu}^{(00)} + \sum_{\kappa=1}^r a_{\mu\kappa}^{(00)} l_{\kappa\nu}, \quad \dot{a}_{\mu\nu}^{(00)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{\mu\nu}^{(00)}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial a_{\mu\nu}^{(00)}}{\partial t}, \\ 2b_{\mu\kappa}^{(01)} &= \dot{a}_{\mu\kappa}^{(01)} + a_{\mu\kappa}^{(00)} + \sum_{\kappa=1}^r a_{\mu\lambda}^{(01)} k_{\lambda\kappa} + \sum_{\nu=1}^m a_{\kappa\lambda}^{(11)} l_{\lambda\nu}, \quad a_{\mu\kappa}^{(00)} = 0, \quad \kappa > m, \\ b_{\kappa\lambda}^{(11)} &= \dot{a}_{\kappa\lambda}^{(11)} + 2a_{\kappa\lambda}^{(01)} + \sum_{\theta=1}^r a_{\kappa\theta}^{(11)} k_{\theta\lambda}, \quad a_{\kappa\lambda}^{(01)} = 0, \quad \kappa > m. \end{aligned} \tag{22}$$

Если функция (22) является определённо-отрицательной при всех значениях переменных $x_i : 0 \leq x_i \leq X$, $\dot{x}_i \leq X_1$ и $t \geq t_0$, и допускает бесконечно малый высший предел по отношению к переменным y_μ , $\dot{y}_\kappa$, то тривиальное решение системы (20) устойчиво асимптотически, что обеспечивает стабилизацию соотношений (7), (8).

5. Определение управляющих воздействий

Решение системы (19) зависит от соотношения величин r и k [11]. Если $r = k$, то матрица $(h_{s\nu})$ квадратная и

$$u_s = \sum_{\nu=1}^r h_{s\nu}^{(-1)} h_\nu,$$

где $h_{s\nu}^{(-1)}$ — элемент матрицы, обратной к матрице $(h_{s\nu})$. В случае $r < k$ решение системы (19) определяется суммой двух слагаемых

$$\begin{aligned} u_s &= cu_s^\tau + u_s^\nu, \\ u_s^\tau &= \det(d_{pq}), \quad d_{1q} = \delta_{sq}; \quad \delta_{sq} = 0, \quad s \neq q, \quad \delta_{ss} = 1, \quad d_{\kappa+1,q} = h_{\kappa q}, \quad p, q = 1, \dots, k, \\ d_{r+2,q}, \dots, d_{kq} &\text{ — произвольные функции переменных } x_i, \dot{x}_i, t, \end{aligned}$$

$$u_s^\nu = \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha h_{\alpha s}, \quad \lambda_\alpha = \sum_{\beta=1}^r w_{\alpha\beta}^{-1} h_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, r,$$

$w_{\alpha\beta}^{-1}$ — элемент матрицы, обратной к матрице $(w_{\kappa\alpha})$, $w_{\kappa\alpha} = \sum_{s=1}^k h_{\kappa s} h_{\alpha s}$.

6. Управление предприятием, состоящим из двух подразделений

Рассмотрим в качестве примера задачу управления производственным предприятием, состоящим из двух подразделений, которые рассматриваются как простой производственный объект. Будем считать, что предприятие допускает управление за счёт поступающих в производство основных фондов u_1 , u_2 , распределённых по подразделениям с коэффициентами b_{11} , b_{12} и b_{21} , b_{22} соответственно. Мгновенные фондоёмкости подразделений для простоты будем считать постоянными:

$m_{11} = m_1 = \text{const}$, $m_{22} = m_2 = \text{const}$, $m_{12} = m_{21} = 0$. Функции, оценивающие вы-
бытие основных фондов подразделений будем считать линейными относительно
мощностей и объёмов выпускаемой продукции

$$w_i = \beta_{i1}\dot{x}_1 + \beta_{i2}\dot{x}_2, \quad i = 1, 2.$$

Факторы f_i , влияющие на изменение основных производственных фондов в
момент времени t , предполагаются пропорциональными общему объёму продук-
ции подразделений x_1, x_2 с коэффициентами c_{11}, c_{12} и c_{21}, c_{22} соответственно

$$f = -cx, \quad f = (f_1, f_2), \quad c = (c_{ij}).$$

Система (6) при сделанных предположениях записывается в виде

$$m_i\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^2 c_{ij}x_j = \sum_{j=1}^2 b_{1j}u_j. \quad (23)$$

Примем за цель управления достижение и поддержание заданного объёма про-
дукции

$$\alpha(t)x_1 + (1 - \alpha(t))x_2 = v(t), \quad 0 \leq \alpha(t) \leq 1. \quad (24)$$

Положим

$$y = \alpha(t)x_1 + (1 - \alpha(t))x_2 - v(t), \quad (25)$$

$$\ddot{y} = -k_1\dot{y} - k_0y. \quad (26)$$

Стабилизация связей (24) обеспечивается, если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Из (23)–(26)
следует уравнение для определения u_1, u_2

$$b_1u_1 + b_2u_2 = b, \quad (27)$$

$$b_1 = \frac{\alpha}{m_1}b_{11} + \frac{1 - \alpha}{m_2}b_{21}, \quad b_2 = \frac{\alpha}{m_1}b_{12} + \frac{1 - \alpha}{m_2}b_{22},$$

$$\begin{aligned} b = & (\beta_1 - 2\dot{\alpha} - k_1\alpha)\dot{x}_1 + (\beta_2 + 2\dot{\alpha} - k_1(1 - \alpha))\dot{x}_1 + \\ & + (c_1 - \ddot{\alpha} - k_1\dot{\alpha} - k_0\alpha)x_1 + (c_2 + \ddot{\alpha} + k_1\dot{\alpha} - k_0(1 - \alpha))x_2 + \\ & + \ddot{v} + k_1\dot{v} + k_0v, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha}{m_1}c_{11} + \frac{1 - \alpha}{m_2}c_{21}, & c_2 &= \frac{\alpha}{m_1}c_{12} + \frac{1 - \alpha}{m_2}c_{22}, \\ \beta_1 &= \frac{\alpha}{m_1}\beta_{11} + \frac{1 - \alpha}{m_2}\beta_{21}, & \beta_2 &= \frac{\alpha}{m_1}\beta_{12} + \frac{1 - \alpha}{m_2}\beta_{22}. \end{aligned}$$

Уравнение (27) имеет решение

$$u_1 = -cb_2 + \frac{b_1b}{b_1^2 + b_2^2}, \quad u_2 = cb_1 + \frac{b_2b}{b_1^2 + b_2^2}, \quad (29)$$

где $c = c(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, t)$ — произвольная функция. Так как уравнение (26) имеет
асимптотически устойчивое тривиальное решение $y = 0$, то управления (29) обес-
печивают заданный объём выпуска продукции (24) и сохранение его на заданном
уровне.

Если в правой части системы (23) содержится одно управление $u_1 = u_2 = u$,
 $b_{12} = b_{21} = 0$, то уравнение (27) принимает вид

$$(m_2\alpha b_{11} + m_1(1 - \alpha)b_{22})u = m_1m_2b$$

и при определённых коэффициентах k_1, k_2 имеет единственное решение

$$u = \frac{m_1m_2b}{(m_2\alpha b_{11} + m_1(1 - \alpha)b_{22})}.$$

Заключение

Использование методов решения задачи управления динамикой системы с программными связями позволяет решать задачу управления мощностью предприятия, обеспечивающего стабилизацию заданных соотношений между мощностями подразделений и выпуском продукции. В случае, когда число управляющих воздействий превышает размерность целевого многообразия, определяются выраженные управляющих воздействий, позволяющие рационально использовать основные фонды.

Литература

1. *Абрамов Н. В., Мотовилов Н. В.* Взаимодействие концепций и модульный состав корпоративных экономических информационных систем // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. Специальный выпуск «Актуальные проблемы экономики и права». — 2005. — С. 74–80.
2. *Левченко Л. В., Максимов В. В.* Проблема оптимизации стратегии финансирования российской высшей школы // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. Специальный выпуск «Актуальные проблемы экономики и права». — 2005. — С. 190–194.
3. *Сиразетдинов Т. К.* Динамическая модель прогнозирования и оптимальное управление экономическим объектом // Изв. ВУЗов, Авиационная техника. — № 4. — 1972. — С. 3–8.
4. *Сиразетдинов Т. К.* Динамическая модель многоцелевых экономических объектов // Изв. ВУЗов, Авиационная техника. — № 1. — 1973. — С. 12–17.
5. *Новоселов В. С.* Аналитическая механика с систем с переменными массами. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. — 240 с.
6. *Сиразетдинов Т. К.* Динамическое моделирование экономических объектов. — Казань: Изд-во «Фэн» Академии Наук РТ, 1996. — 223 с.
7. *Сиразетдинов Т. К., Родионов В. В., Сиразетдинов Р. Т.* Динамические модели экономического региона. — Казань: Изд-во «Фэн» Академии Наук РТ, 2005. — 320 с.
8. Проблемы инновационной экономики и информационных технологий / под ред. Т. К. Сиразетдинова. — М., Казань, 2005. — 412 с.
9. *Layton R. A.* Differential-Algebraic Equations of Dynamical Systems. — N.Y.: Springer, 2001. — P. 159.
10. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1952. — 280 с.
11. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифф. уравнения. — Т. 39, № 3. — 2003. — С. 343–353.

UDC 531.36, 590.86

Modeling of Dynamics of the Elementary Economic Objects as Systems with Program Constraints

R. G. Mukharlyamov

*Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Dynamic analogies in the elementary economic objects and in movement of a point of variable masse allow using modern methods of analytical mechanics for the decision of a problem of control of the enterprise. The purpose of control achievement and stabilization of the set parities between volumes and capacities of divisions due to again acting fixed capital is necessary. For the decision of a problem the method of control of dynamics of system with program constraints is used.