

УДК 519.633.2, 517.958: 530.145.6

Ньютоновский потенциал в Общей теории относительности в конечном пространстве

И. В. Амирханов, Б. М. Барбашов, А. А. Гусев,
В. Н. Первушин, С. А. Шувалов, С. И. Веницкий,
А. Ф. Захаров, В. А. Зинчук

*Объединенный институт ядерных исследований
Россия, 141980, Дубна, Московской обл., ул. Жолио-Кюри, 6*

Ньютоновский потенциал вычисляется в гамильтоновом подходе к Общей теории относительности (ОТО) в конечном пространстве, где координатное время калибровочно-инвариантно и не может рассматриваться как измеряемая величина теории. Наблюдаемый (калибровочно-инвариантный) параметр эволюции отождествляется с однородным космологическим масштабным фактором $a(x^0)$, определенным с помощью усреднения логарифма детерминанта пространственной метрики по масштабнo инвариантному пространству Лихнеровича, а соответствующая калибровочно-инвариантная энергия в ОТО определяется как решение уравнения энергетической связи относительно канонического импульса масштабного фактора. В этом случае дается космологическое обобщение ньютоновского потенциала, заданного в неоднородном классе функций.

Введение

Потенциалами в релятивистской теории поля называют полевые переменные, которые удовлетворяют уравнениям типа Лапласа $\Delta A_0 = J_0$. В отличие от динамических переменных, которые удовлетворяют уравнениям типа Даламбера $\square A_0 = J_0$ и которые будем далее называть степенями свободы, так как они имеют свободные начальные данные.

Определение потенциала в релятивистской теории поля связано с так называемой сопутствующей системой отсчета, выделяемой единичным временноподобным вектором $l_\mu^0 = (1, 0, 0, 0)$. Этот вектор помогает разделить все координаты и компоненты полей на пространственные и временноподобные части, в соответствии с теорией неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре.

Начальные данные в теории калибровочных полей, включая общую теорию относительности (ОТО) [1, 2], должны быть определены как инварианты относительно группы калибровочных и общековариантных преобразований, которые радикально отличаются от преобразований систем отсчета. Это различие было показано двумя теоремами Нетер [3]. Параметры преобразований систем отсчета непосредственно измеряемы как начальные данные, в то время как параметры калибровочных преобразований не наблюдаемы; калибровочная инвариантность ведет лишь к связям начальных данных, выявленных симметриями теории относительно преобразований систем отсчета.

Для того, чтобы отделить группу калибровочных преобразований от преобразований систем отсчета в общей теории относительности (ОТО), Фок ввел описание ОТО в терминах лоренц-ковариантного и калибровочно-инвариантного ортогонального репера [4].

Главной трудностью в ОТО при вычислении потенциала является инвариантность этой теории относительно параметризации координатного времени $x^0 \rightarrow \tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0)$.

В случае, когда мы имеем дело с конечным пространством-временем, которое активно рассматривается в современной космологии, роль репараметризационно-инвариантного параметра эволюции играет космологический масштабный фактор [5–8]. Этот фактор отделяется масштабным преобразованием от метрики. Отделение космологического масштабного фактора от метрики в ОТО известно как космологическая теория возмущений, предложенная Лившицем [9] и применяемая для анализа современных наблюдательных данных в астрофизике и космологии [10]. Обычно предполагают, что этот фактор является дополнительной переменной, заданной в классе однородных функций. Это предположение ведет к удвоению числа однородных переменных, что не позволяет использовать гамильтонов подход к ОТО [11, 12].

В данной статье мы вычисляем ньютоновский потенциал в последовательном гамильтоновом подходе к ОТО [11, 12], где этот потенциал задан в классе неоднородных локальных функций.

1. Инвариантный параметр эволюции в ОТО

1.1. Действие, интервал и симметрии ОТО

ОТО [1, 2] дается двумя фундаментальными величинами: «динамическим» действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{\varphi_0^2}{6} R(g) + \mathcal{L}_{(M)} \right], \quad (1)$$

где $\varphi_0^2 = \frac{3}{8\pi} M_{\text{Planck}}^2$ — постоянная Ньютона, а $\mathcal{L}_{(M)}$ — лагранжиан поля материи, и «геометрическим интервалом»

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \omega_{(\alpha)} \omega_{(\alpha)} = \omega_{(0)} \omega_{(0)} - \omega_{(1)} \omega_{(1)} - \omega_{(2)} \omega_{(2)} - \omega_{(3)} \omega_{(3)}, \quad (2)$$

где $\omega_{(\alpha)}$ — линейные дифференциалы, определяемые как компоненты ортогонального репера [4]. ОТО в терминах компонент фоковского репера содержит два принципа относительности: «геометрический» — общее преобразование координат

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \omega_{(\alpha)}(x^\mu) \rightarrow \omega_{(\alpha)}(\tilde{x}^\mu) = \omega_{(\alpha)}(x^\mu) \quad (3)$$

и «динамический» принцип, сформулированный как преобразования Лоренца систем отсчета заданных ортогональным репером

$$\omega_{(\alpha)} \rightarrow \bar{\omega}_{(\alpha)} = L_{(\alpha)(\beta)} \omega_{(\beta)}. \quad (4)$$

1.2. Система отсчета гамильтонова похода к ОТО

Гамильтонов подход к ОТО сформулирован в работе [5, 6] в определенной системе координат в терминах переменных

$$\omega_{(0)} = \psi^6 N_d dx^0 \equiv \psi^2 \omega_{(0)}^{(L)}, \quad \omega_{(b)} = \psi^2 \mathbf{e}_{(b)i} (dx^i + N^i dx^0) \equiv \psi^2 \omega_{(b)}^{(L)}; \quad (5)$$

где $\omega_{(\mu)}^{(L)}$ [13] — преобразование Лихнеровича к скалярно-инвариантным величинам, а триады $\mathbf{e}_{(a)i}$ формируют пространственную метрику с $\det |\mathbf{e}| = 1$, N_d — функция смещения Дирака, N^i — вектора сдвига начала координат, а ψ — детерминант пространственной метрики.

Зельманов установил [7, 8], что система координат, определенная в виде (5), является инвариантной относительно преобразований

$$x^0 \rightarrow \tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0), \quad x_i \rightarrow \tilde{x}_i = \tilde{x}_i(x^0, x_1, x_2, x_3), \quad (6)$$

$$\tilde{N}_d = N_d \frac{dx^0}{d\tilde{x}^0}, \quad \tilde{N}^k = N^i \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x_i} \frac{dx^0}{d\tilde{x}^0} - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x_i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^0}. \quad (7)$$

Группа преобразований сохраняет семейство гиперповерхностей $x^0 = \text{const}$, которое называют «кинеметрической» подгруппой группы общих преобразований координат. «Кинеметрическая» подгруппа содержит репараметризацию координатного параметра эволюции (x^0). Это означает, что координатный параметр эволюции (x^0) не измеряем, роль наблюдаемого параметра эволюции в этом случае играет одна из переменных теории. В космологических приложениях ОТО в качестве такой репараметризационно-инвариантной времени-подобной переменной выбирают однородный масштабный фактор [14, 15].

1.3. Однородный масштабный фактор, как нулевая Фурье-гармоника

Космология Фридмана и космологическая теория возмущения [9, 10], применяемые для анализа современных наблюдательных данных в астрофизике и космологии, отождествляют инвариантный «параметр эволюции» с космологическим масштабным фактором $a(x_0)$. Последний вводится масштабным преобразованием метрики $g_{\mu\nu} = a^2(x^0)\tilde{g}_{\mu\nu}$ и любого поля $F^{(n)}$ с конформным весом (n): $F^{(n)} = a^n(x_0)\tilde{F}^{(n)}$. В частности кривизна

$$\sqrt{-g}R(g) = a^2\sqrt{-\tilde{g}}R(\tilde{g}) - 6a\partial_0\left[\partial_0 a\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{00}\right] \quad (8)$$

может быть выражена в терминах новой функции смещения $\tilde{N}_d$ и пространственного детерминанта $\tilde{\psi}$ в уравнении (5)

$$\tilde{N}_d = [\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{00}]^{-1} = a^2 N_d, \quad \tilde{\psi} = (\sqrt{a})^{-1}\psi. \quad (9)$$

Чтобы сохранить число переменных, мы определяем $\log \sqrt{a}$ следующим образом

$$\log \sqrt{a} = \langle \log \psi \rangle \equiv \frac{1}{V_0} \int d^3x \log \psi, \quad (10)$$

где $V_0 = \int d^3x < \infty$ — конечный объем. В этом случае новый детерминант переменной $\tilde{\psi}$ удовлетворяет тождеству

$$\int d^3x \log \tilde{\psi} = \int d^3x [\log \psi - \langle \log \psi \rangle] \equiv 0. \quad (11)$$

Можно назвать эти функции «отклонениями» от среднего значения. Можно заметить, что операции «усреднения» $\Pi_{av} \cdot \mu = \langle \mu \rangle$ и «отклонения» $\Pi_{de} \cdot \mu = \bar{\mu} = \mu - \langle \mu \rangle$ имеют свойства операторов проектирования: $\Pi_{de} \cdot \mu + \Pi_{av} \cdot \mu = I\mu$, $\Pi_{de}^2 = \Pi_{de}$ и $\Pi_{av}^2 = \Pi_{av}$.

После масштабного преобразования (8), (9) действие (1) принимает вид

$$S[\varphi_0] = \tilde{S}[\varphi] - \int dx^0 (\partial_0 \varphi)^2 \int \frac{d^3x}{\tilde{N}_d}; \quad (12)$$

здесь $\tilde{S}[\varphi]$ — действие (1) в терминах метрики $\tilde{g}$. Энергетическая связь $\delta S[\varphi_0]/\delta \tilde{N}_d = 0$ принимает вид [14]

$$-\frac{\delta \tilde{S}[\varphi]}{\delta \tilde{N}_d} \equiv \tilde{T}_0^0 = \frac{(\partial_0 \varphi)^2}{\tilde{N}_d^2}, \quad (13)$$

где $\tilde{T}_0^0$ — локальная плотность энергии. Это уравнение имеет точное решение

$$\left[\frac{d\varphi}{d\zeta} \right]^2 \equiv \varphi'^2 = \left\langle \sqrt{\tilde{T}_0^0} \right\rangle^2, \quad \langle (\tilde{N}_d)^{-1} \rangle \tilde{N}_d = \frac{\left\langle \sqrt{\tilde{T}_0^0} \right\rangle}{\sqrt{\tilde{T}_0^0}}, \quad (14)$$

где

$$\zeta(\varphi_0|\varphi) \equiv \int dx^0 \langle (\tilde{N}_d)^{-1} \rangle^{-1} = \pm \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\tilde{\varphi}}{\langle \sqrt{\tilde{T}_0^0(\tilde{\varphi})} \rangle} \quad (15)$$

— инвариантное время. Данная эволюция в ОТО является аналогией закона Хаббла в космологии. Эти уравнения появляются, если $\tilde{T}_0^0$ не зависит от однородной скорости φ' .

2. Модель массивной электродинамики

2.1. Действие

В качестве модели материи рассмотрим массивную электродинамику в ОТО

$$S = S_{\text{GR}} + S_{\text{m}} = \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{L}_{\text{GR}} + \mathcal{L}_{\text{m}}], \quad (16)$$

где $\mathcal{L}_{\text{GR}}$ — лагранжиан ОТО

$$\mathcal{L}_{\text{GR}} = -\frac{\varphi_0^2}{6} R(g) \quad (17)$$

и $\mathcal{L}_{\text{m}}$ — лагранжиан массивных векторных и спинорных полей

$$\mathcal{L}_{\text{m}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - M_0^2 A_\mu A_\nu g^{\mu\nu} - \bar{\Psi} i \gamma^\sigma (D_\sigma - ie A_\sigma) \Psi - m_0 \bar{\Psi} \hat{\Psi}. \quad (18)$$

Здесь

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор напряженности,
 $D_\delta = \partial_\delta - i \frac{1}{2} [\gamma_{(\alpha)} \gamma_{(\beta)}] \sigma_{\delta(\alpha)(\beta)}$ — ковариантная производная Фока [4],
 $\gamma_{(\beta)} = \gamma^\mu e_{(\beta)\mu} - \gamma$ -матрицы Дирака, свернутые с тетрадами $e_{(\beta)\nu}$, и
 $\sigma_{\sigma(\alpha)(\beta)} = e_{(\beta)}^\nu (\nabla_\mu e_{(\alpha)\nu})$ — коэффициенты спиновой связности [4].

2.2. Лагранжиан ОТО

Для вычисления канонических импульсов можно записать гильбертово действие (1) в терминах новых переменных Дирака (9)

$$S_{\text{GR}}[g = a^2 \tilde{g}] = \int d^4x (\mathbf{K}[\varphi|\tilde{g}] - \mathbf{P}[\varphi|\tilde{g}]) - \int dx^0 \frac{(\partial_0 \varphi)^2}{\tilde{N}_d} = \int dx^0 L_{\text{GR}}, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{K}[\varphi|e] = \tilde{N}_d \varphi^2 \left[-4\tilde{v}^2 + \frac{v_{(ab)}^2}{6} \right], \quad (20)$$

$$\mathbf{P}[\varphi|e] = \frac{\tilde{N}_d \varphi^2 \tilde{\psi}^7}{6} \left[{}^{(3)}R(\mathbf{e}) \tilde{\psi} + 8\Delta \tilde{\psi} \right] \quad (21)$$

являются соответственно кинетическими и потенциальными условиями

$$\tilde{v} = \frac{1}{\tilde{N}_d} \left[(\partial_0 - N^l \partial_l) \log \tilde{\psi} - \frac{1}{6} \partial_l N^l \right], \quad (22)$$

$$v_{(ab)} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{(a)i} v_{(b)}^i + \mathbf{e}_{(b)i} v_{(a)}^i), \quad (23)$$

$$v_{(a)i} = \frac{1}{\tilde{N}_d} \left[(\partial_0 - N^l \partial_l) \mathbf{e}_{(a)i} + \frac{1}{3} \mathbf{e}_{(a)i} \partial_l N^l - \mathbf{e}_{(a)l} \partial_i N^l \right] \quad (24)$$

— скорости метрических компонент, $\Delta\psi = \partial_i (\mathbf{e}_{(a)}^i \mathbf{e}_{(a)}^j \partial_j \psi)$ — ковариантный оператор Лапласа, ${}^{(3)}R(\mathbf{e})$ — трехмерная кривизна, в терминах триад $\mathbf{e}_{(a)i}$

$${}^{(3)}R(\mathbf{e}) = -2\partial_i [\mathbf{e}_{(b)}^i \sigma_{(c)|(b)(c)}] - \sigma_{(c)|(b)(c)} \sigma_{(a)|(b)(a)} + \sigma_{(c)|(d)(f)} \sigma_{(f)|(d)(c)}. \quad (25)$$

Здесь

$$\sigma_{(a)|(b)(c)} = \mathbf{e}_{(c)}^j \nabla_i \mathbf{e}_{(a)k} \mathbf{e}_{(b)}^k = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{(a)j} [\partial_{(b)} \mathbf{e}_{(c)}^j - \partial_{(c)} \mathbf{e}_{(b)}^j] \quad (26)$$

— коэффициенты спиновой-связности, $\nabla_i \mathbf{e}_{(a)j} = \partial_i \mathbf{e}_{(a)j} - \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_{(a)k}$ — ковариантные производные, а $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{(b)}^k (\partial_i \mathbf{e}_{(b)j} + \partial_j \mathbf{e}_{(b)i})$.

2.3. Лагранжиан массивных полей

Лагранжиан массивных полей (18) можно переписать в терминах переменных Лихнеровича [13]

$$A^L_\mu = A_\mu, \quad \Psi^L = a^{3/2} \psi^3 \Psi, \quad (27)$$

что приводит к полям с массами, зависящими от масштабного фактора $a\psi^2$

$$m_{(L)} = m_0 a \psi^2 = m \psi^2, \quad M_{(L)} = M_0 a \psi^2 = M \psi^2, \quad (28)$$

находящимся в пространстве, заданном компонентами репера (5)

$$\omega_{(0)}^{(L)} = \tilde{\psi}^4 \tilde{N}_d dx^0, \quad (29)$$

$$\omega_{(a)}^{(L)} = \mathbf{e}_{(a)i} (dx^i + N^i dx^0) \quad (30)$$

с единичным детерминантом метрики $|\mathbf{e}| = 1$.

В результате лагранжиан массивных полей (18) принимает вид

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(A, \bar{\Psi}, \Psi) = & \frac{1}{i} \bar{\Psi}^L \gamma^0 \left(\partial_0 - N^k \partial_k + \frac{1}{2} \partial_l N^l - ie A_0 \right) \Psi^L - \\ & - \tilde{N}_d \mathcal{H}_\Psi + \tilde{N}_d \left[-J_{5(c)} v_{[ab]} \varepsilon_{(c)(a)(b)} + \right. \\ & + \frac{\tilde{\psi}^4}{2} \left(v_{i(A)} v_{(A)}^i - \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right) - \tilde{\psi}^8 M^2 A_{(b)}^2 - \frac{\pi_0^2}{M^2} \left. \right] - \\ & - \tilde{N}_d \tilde{\psi}^6 m \bar{\Psi}^L \Psi^L - \pi_0 [N^i A_i - A_0], \quad (31) \end{aligned}$$

где для линеаризации массового члена использовано преобразование Лежандра $A_0^2/(2\tilde{N}_d) = \pi_0 A_0 - \tilde{N}_d \pi_0^2/2$ с вспомогательным полем π_0 ;

$$\mathcal{H}_\Psi = -\tilde{\psi}^4 [i \bar{\Psi}^L \gamma_{(b)} D_{(b)} \Psi^L + J_5^0 \sigma - \partial_k J^k] \quad (32)$$

— гамильтонова плотность фермионов,

$$v_{[ab]} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{(a)i} v_{(b)}^i - \mathbf{e}_{(b)i} v_{(a)}^i), \quad (33)$$

$$D_{(b)} \Psi^L = \left[\partial_{(b)} - \frac{1}{2} \partial_k \mathbf{e}_{(b)}^k - ie A_{(b)} \right] \Psi^L, \quad (34)$$

$$v_{i(A)} = \frac{1}{\psi^4 \tilde{N}_d} [\partial_0 A_i - \partial_i A_0 + F_{ij} N^j] \quad (35)$$

— скорости полевых переменных, а величины

$$J_{5(c)} = \frac{i}{2} (\bar{\Psi}^L \gamma_5 \gamma_{(c)} \Psi^L), \quad J_5^0 = \frac{i}{2} (\bar{\Psi}^L \gamma_5 \gamma^0 \Psi^L), \quad J_k = \frac{i}{2} \bar{\Psi}^L \gamma_k \Psi^L \quad (36)$$

являются потоками, $\sigma = \sigma_{(a)(b)|(c)} \varepsilon_{(a)(b)(c)}$, где $\varepsilon_{(a)(b)(c)}$ обозначает тензор Леви–Чивита.

2.4. Гамильтонов подход

Перейдем от скоростей к канонически сопряженным импульсам:

$$P_\varphi = -2V_0 \frac{\partial_0 \varphi}{N_0} = -2V_0 \frac{d\varphi}{d\zeta} \equiv -2V_0 \varphi', \quad (37)$$

$$\tilde{p}_\psi = \frac{\partial \mathbf{K}[\varphi|e]}{\partial (\partial_0 \ln \psi)} = -8\varphi^2 \tilde{v}, \quad (38)$$

$$p_{(b)}^i = \frac{\partial [\mathbf{K}[\varphi|e] + \sqrt{-g} \mathcal{L}_m]}{\partial (\partial_0 \mathbf{e}_{(a)i})} = \mathbf{e}_{(a)}^i \left[\frac{\varphi^2}{3} v_{(ab)} - J_{5(c)} \varepsilon_{(c)(a)(b)} \right], \quad (39)$$

$$P_{(A)}^i = \frac{\partial [\sqrt{-g} \mathcal{L}_m]}{\partial (\partial_0 A_i)} = \tilde{\psi}^4 v_{(A)}^i, \quad (40)$$

$$P_{(\Psi)} = \frac{\partial [\sqrt{-g} \mathcal{L}_m]}{\partial (\partial_0 \Psi^L)} = \frac{1}{i} \bar{\Psi}^L \gamma^0. \quad (41)$$

Тогда действие (16) можно записать в гамильтоновой форме

$$S = \int dx^0 \left[-P_\varphi \partial_0 \varphi + N_0 \frac{P_\varphi^2}{4V_0} + \int d^3x \left(\sum_F P_F \partial_0 F + \mathcal{C} - \tilde{N}_d T_{0t}^0 \right) \right], \quad (42)$$

где P_F — набор полевых импульсов (38)–(41), а

$$\tilde{T}_0^0 = \tilde{\psi}^7 \hat{\Delta} \tilde{\psi} + \sum_{I=0,4,6,8} \tilde{\psi}^I \tau_I \quad (43)$$

— сумма гамильтоновых плотностей, включая плотность гравитации

$$\tilde{\psi}^7 \hat{\Delta} \tilde{\psi} \equiv \tilde{\psi}^7 \frac{4\varphi^2}{3} \partial_{(b)} \partial_{(b)} \tilde{\psi}, \quad (44)$$

$$\tau_{I=0} = \frac{6\tilde{p}_{(ab)} \tilde{p}_{(ab)}}{\varphi^2} - \frac{16}{\varphi^2} \tilde{p}_\psi^2 + \frac{\pi_0^2}{2a^2 M^2}, \quad (45)$$

$$\tau_{I=4} = \frac{P_{i(A)} P_{(A)}^i + F_{ij} F^{ij}}{2} - \left[i \bar{\Psi}^L \gamma_{(b)} D_{(b)} \Psi^L + J_5^0 \sigma - \partial_k J^k \right], \quad (46)$$

$$\tau_{I=6} = m \bar{\Psi}^L \Psi^L \quad (47)$$

$$\tau_{I=8} = \frac{\varphi^2}{6} R^{(3)}(\mathbf{e}) + \frac{M^2 A_{(b)}^2}{2}, \quad (48)$$

где $\tilde{p}_{(ab)} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{(a)}^i \tilde{p}_{(b)i} + \mathbf{e}_{(b)}^i \tilde{p}_{(a)i})$, $\tilde{p}_{(b)i} = p_{(b)i} + \mathbf{e}_{(a)}^i \varepsilon_{(c)(a)(b)} J_{(c)}$,

$$\mathcal{C} = A_0 [\partial_i P_{(A)}^i + e J_0 - \pi_0] + N_{(b)} T_{(b)t}^0 + \lambda_0 \tilde{p}_\psi + \lambda_{(a)} \partial_k \mathbf{e}_{(a)}^k \quad (49)$$

($J_0 = \bar{\Psi}^L \gamma_0 \Psi^L$ — нулевая компонента тока; $A_0, N_d, N^i, \lambda_0, \lambda_{(a)}$ являются множителями Лагранжа) обозначает сумму связей, включающую условие Дирака минимальной трехмерной гиперповерхности [5, 6]

$$p_{\tilde{\psi}} = \tilde{v} = 0 \rightarrow (\partial_0 - N^l \partial_l) \log \tilde{\psi} = \frac{1}{6} \partial_l N^l, \quad (50)$$

означающей положительную определенность плотности гамильтониана (45). Если обозначить компоненты полного тензора энергии-импульса $T_{(a)}^0 = T_i^0 \mathbf{e}_{(a)}^i$, то

$$T_{(a)}^0 = -p_{\psi} \partial_{(a)} \psi + \frac{1}{6} \partial_{(a)} (p_{\psi} \psi) + 2p_{(b)(c)} \gamma_{(b)|(a)(c)} - \partial_{(b)} p_{(b)(a)} - \\ - \frac{1}{i} \bar{\Psi}^I \gamma^0 \partial_{(a)} \Psi^I - \frac{1}{2i} \partial_{(a)} (\bar{\Psi}^I \gamma^0 \Psi^I) - P_{(A)}^j F_{jk} \mathbf{e}_{(a)}^k - \pi_0 A_{(a)}. \quad (51)$$

2.5. Гамильтонова редукция

Энергетическая связь $\delta S[\varphi|\tilde{F}]/\delta \tilde{N}_d = 0$ в виде уравнения $N_0^2 P_{\varphi}^2 / (\tilde{N}_d)^2 = \tilde{T}_0^0(\varphi|\tilde{F})$ имеет точное решение

$$P_{\varphi}^2 = E_{\varphi}^2, \quad \frac{N_0}{\tilde{N}_d} = \frac{\sqrt{\tilde{T}_0^0}}{\langle \sqrt{\tilde{T}_0^0} \rangle}, \quad (52)$$

где

$$E_{\varphi} = 2V_0 \langle \sqrt{\tilde{T}_0^0} \rangle, \quad (53)$$

и подстановка этого решения $P_{\varphi(\pm)} = \pm E_{\varphi}$ в действие

$$S = \int dx^0 \left[-P_{\varphi} \partial_0 \varphi + N_0 \frac{P_{\varphi}^2}{4V_0} + \int d^3x \left(\sum_F P_F \partial_0 F + \mathcal{C} - \tilde{N}_d \tilde{T}_0^0 \right) \right], \quad (54)$$

дает редуцированное действие

$$S_{\pm}[\varphi_I|\varphi_0]|_{\text{energy constraint}} = \int_{\varphi_I}^{\varphi_0} d\varphi \left\{ \left[\int d^3x \left(\sum_{\tilde{F}} \tilde{P}_F \partial_{\varphi} \tilde{F} + \bar{\mathcal{C}} \right) \pm E_{\varphi} \right] \right\} \quad (55)$$

в полевом пространстве событий $[\varphi|\tilde{F}]$. Здесь $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\partial_0 \varphi$, φ_I есть начальные данные рождения (или уничтожения) Вселенной.

Окончательно для десяти компонент дираковской тетрады [4] имеем следующие уравнения

$$\frac{\delta S}{\delta e_{(b)i}^{(T)}} = -T_{(b)}^{i(T)} = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta N^{j(T)}} = -T_0^{j(T)} = 0, \\ \partial_j e_{(b)}^{(T)} = 0, \\ \partial_j N^{jT} = 0.$$

Для N_{int} и $\partial_i N^0$ имеем соответственно

$$N_{int} = \langle (\tilde{N}_d)^{-1} \rangle \tilde{N}_d = \frac{\langle \sqrt{\tilde{T}_0^0} \rangle}{\sqrt{\tilde{T}_0^0}}, \quad \left[\frac{d\varphi}{d\zeta} \right]^2 \equiv \varphi'^2 = \langle \sqrt{\tilde{T}_0^0} \rangle^2,$$

$$p_{\tilde{\psi}} = \tilde{v} = 0 \rightarrow (\partial_0 - N^l \partial_l) \log \tilde{\psi} = \frac{1}{6} \partial_l N^l,$$

а для $\tilde{\psi}$ — уравнение

$$\frac{\delta S}{\delta \ln \tilde{\psi}} = \frac{\delta S}{\delta \ln \psi} - \left\langle \frac{\delta S}{\delta \ln \psi} \right\rangle = 0,$$

которое будет рассмотрено в следующем разделе.

3. Ньютоновский потенциал в конечном пространстве

3.1. Эффективное действие для скалярных потенциалов в конечном пространстве

В диффеоинвариантной формулировке в ОТО скалярные потенциальные возмущения в определенной системе отсчета могут быть определены как $N_{\text{int}}^{-1} = 1 + \bar{\nu}$ и $\tilde{\psi} = e^{\bar{\mu}}$, где $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ даются в классе функций, определенных оператором проектирования (11) $\bar{F} = F - \langle F \rangle$, причем $\langle \bar{F} \rangle \equiv 0$.

Явную зависимость метрики и тензора энергии $\tilde{T}_0^0$ от $\tilde{\psi}$ можно получить в терминах масштабно-инвариантных переменных Лихнеровича [13]

$$\omega_{(0)}^{(L)} = \tilde{\psi}^4 N_{\text{int}} d\zeta, \quad \omega_{(b)}^{(L)} = \mathbf{e}_{(b)k} [dx^k + \mathcal{N}^k d\zeta], \quad (56)$$

$$\tilde{T}_0^0 = \tilde{\psi}^7 \hat{\Delta} \tilde{\psi} + \sum_I \tilde{\psi}^I a^{\frac{I}{2}-2} \tau_I, \quad \tau_I \equiv \langle \tau_I \rangle + \bar{\tau}_I, \quad (57)$$

где $\hat{\Delta} \tilde{\psi} \equiv \frac{4\varphi^2}{3} \partial_{(b)} \partial_{(b)} \tilde{\psi}$ — оператор Лапласа, а τ_I — плотности энергии, определенные уравнениями (44)–(48). Отрицательный вклад $-(16/\varphi^2) \bar{p}_{\psi}^2$ пространственного детерминанта импульса $\tau_{I=0}$ убирается из нулевой скорости пространственного элемента объема условием положительности локальной плотности энергии, введенном Дираком в [5, 6]

$$p_{\tilde{\psi}} = -8\varphi^2 \frac{\partial_{\zeta} \tilde{\psi}^6 - \partial_l [\tilde{\psi}^6 \mathcal{N}^l]}{\tilde{\psi}^6 N_{\text{int}}} = 0. \quad (58)$$

Для упрощения уравнений скалярных потенциалов $N_{\text{int}}, \tilde{\psi}$, можно ввести новые обозначения

$$N_s = \psi^7 N_{\text{int}}, \quad T(\tilde{\psi}) = \sum_I \tilde{\psi}^{(I-7)} a^{\frac{I}{2}-2} \tau_I, \quad \rho_{(0)} = \left\langle \sqrt{\tilde{T}_0^0} \right\rangle^2 = \varphi'^2. \quad (59)$$

В терминах этих обозначений действие (55) можно представить, используя инвариантное время ζ , в виде

$$S[\varphi_0] = \int d\zeta \int d^3x \left[\sum_F P_F \partial_{\zeta} F + C_{\zeta} - N_s (\hat{\Delta} \tilde{\psi} + T(\tilde{\psi})) - \frac{\tilde{\psi}^7 \rho_{(0)}}{N_s} \right], \quad (60)$$

где $C_{\zeta} = C(dx^0/d\zeta)$.

3.2. Потенциальные уравнения

Вариация этого действия относительно $N_s, \tilde{\psi}$ ведет к уравнениям

$$\hat{\Delta}\tilde{\psi} + T = \frac{\tilde{\psi}^7 \rho_{(0)}}{N_s^2}, \quad (61)$$

$$\tilde{\psi}\hat{\Delta}N_s + N_s\tilde{\psi}\partial_{\tilde{\psi}}T + 7\frac{\tilde{\psi}^7 \rho_{(0)}}{N_s} = \rho_{(1)}, \quad (62)$$

соответственно, где

$$\rho_{(0)} = \langle N_s[\hat{\Delta}\tilde{\psi} + T] \rangle, \quad (63)$$

$$\rho_{(1)} = \left\langle \tilde{\psi}\hat{\Delta}N_s + N_s\tilde{\psi}\partial_{\tilde{\psi}}T + 7\frac{\tilde{\psi}^7 \rho_{(0)}}{N_s} \right\rangle. \quad (64)$$

в пределе бесконечного объема $\rho_{(n)} = \langle \tau_I \rangle = 0$ уравнения (61) и (62) сводятся к уравнениям $\hat{\Delta}\tilde{\psi} = 0$, $\hat{\Delta}N_s = 0$ с решениями Шварцшильда $\tilde{\psi} = 1 + \frac{r_g}{4r}$; $N_s = 1 - \frac{r_g}{4r}$.

3.3. Космологические возмущения

Для $N_s = 1 - \nu_1$, $\tilde{\psi} = 1 + \mu_1$ и малых отклонений $\mu_1, \nu_1 \ll 1$ уравнения (61) и (62) принимают вид

$$[-\hat{\Delta} + 14\rho_{(0)} - \rho_{(1)}]\mu_1 + 2\rho_{(0)}\nu_1 = \bar{\tau}_{(0)}, \quad (65)$$

$$[7 \cdot 14\rho_{(0)} - 14\rho_{(1)} + \rho_{(2)}]\mu_1 + [-\hat{\Delta} + 14\rho_{(0)} - \rho_{(1)}]\nu_1 = 7\bar{\tau}_{(0)} - \bar{\tau}_{(1)}, \quad (66)$$

где $\rho_{(n)} = \langle \tau_{(n)} \rangle \equiv \sum_I I^n a^{\frac{I}{2}-2} \langle \tau_I \rangle$. Этот выбор переменных позволяет определить $\tilde{\psi} = 1 + \mu_1$ и $N_s = 1 - \nu_1$ в виде суммы

$$\tilde{\psi} = 1 + \frac{1}{2} \int d^3y \left[D_{(+)}(x, y) \bar{T}_{(+)}^{(\mu)}(y) + D_{(-)}(x, y) \bar{T}_{(-)}^{(\mu)}(y) \right], \quad (67)$$

$$N_s = 1 - \frac{1}{2} \int d^3y \left[D_{(+)}(x, y) \bar{T}_{(+)}^{(\nu)}(y) + D_{(-)}(x, y) \bar{T}_{(-)}^{(\nu)}(y) \right], \quad (68)$$

где β имеет вид

$$\beta = \sqrt{1 + [\langle \tau_{(2)} \rangle - 14\langle \tau_{(1)} \rangle] / (98\langle \tau_{(0)} \rangle)}, \quad (69)$$

$$\bar{T}_{(\pm)}^{(\mu)} = \bar{\tau}_{(0)} \mp 7\beta[7\bar{\tau}_{(0)} - \bar{\tau}_{(1)}], \quad \bar{T}_{(\pm)}^{(\nu)} = [7\bar{\tau}_{(0)} - \bar{\tau}_{(1)}] \pm (14\beta)^{-1}\bar{\tau}_{(0)} \quad (70)$$

— локальные токи, $D_{(\pm)}(x, y)$ — функции Грина, удовлетворяющие уравнениям

$$[\pm \hat{m}_{(\pm)}^2 - \hat{\Delta}] D_{(\pm)}(x, y) = \delta^3(x - y). \quad (71)$$

Здесь $\hat{m}_{(\pm)}^2 = 14(\beta \pm 1)\langle \tau_{(0)} \rangle \mp \langle \tau_{(1)} \rangle$.

В случае распределения массы в конечном объеме V_0 с нулевыми давлением и плотностью $\bar{\tau}_{(0)}(x) = \bar{\tau}_{(1)}(x)/6 \equiv M[\delta^3(x - y) - 1/V_0]$, решения (67), (68) принимают вид

$$\tilde{\psi} = 1 + \mu_1 = 1 + \frac{r_g}{4r} \left[\gamma_1 e^{-m_{(+)}(z)r} + (1 - \gamma_1) \cos m_{(-)}(z)r \right], \quad (72)$$

$$N_s = 1 - \nu_1 = 1 - \frac{r_g}{4r} \left[(1 - \gamma_2) e^{-m_{(+)}(z)r} + \gamma_2 \cos m_{(-)}(z)r \right], \quad (73)$$

где $\gamma_1 = \frac{1+7\beta}{2}$, $\gamma_2 = \frac{14\beta-1}{28\beta}$, $r_g = \frac{3M}{4\pi\varphi^2}$, $r = |x - y|$, $m_{(\pm)}^2 = \frac{3\widehat{m}_{(\pm)}^2}{4\varphi^2}$.

Минимальная поверхность (55) $\partial_i[\bar{\psi}^6 \mathcal{N}^i] - (\bar{\psi}^6)' = 0$ дает вектор сдвига начала координат в процессе эволюции

$$\mathcal{N}^i = \left(\frac{x^i}{r}\right) \left(\frac{\partial_\zeta V}{\partial_r V}\right), \quad V(\zeta, r) = \int^r d\tilde{r} \tilde{r}^2 \tilde{\psi}^6(\zeta, \tilde{r}). \quad (74)$$

Решения (72), (73) имеют пространственные осцилляции и ненулевой вектор сдвига начала координат (74). В бесконечном объеме $\langle \tau_{(n)} \rangle = 0$, $a = 1$ решения (72) и (73) совпадают с изотропными решениями Шварцшильда $\tilde{\psi} = 1 + \frac{r_g}{4r}$, $N_s = 1 - \frac{r_g}{4r}$, $N^k = 0$.

3.4. Пример

Рассмотрим случай распределения массы в конечном объеме $V_0 = 4\pi R_0^3/3$ с плотностью энергии (57), содержащей только вклад частице-подобных сингулярностей и массивной пыли $I = 6$, так что $\tau_{I=6} = \Omega_M \rho_{cr} + M\delta^3(x)$, где $\rho_{cr} = \varphi^2 H^2$. В этом случае плотность энергии (59) может быть записана в виде

$$T = \frac{4\varphi^2}{3} \tilde{\psi}^{-1} \tilde{T}, \quad \tilde{T} = \left[\frac{3}{4} H^2 \Omega_M + \pi r_g \delta^3(x) \right], \quad (75)$$

здесь H — параметр Хаббла, и $r_g = M3/(4\pi\varphi^2)$ — радиус гравитации.

Уравнения (61) и (62) сведем к двум интегро-дифференциальным уравнениям соответственно

$$N_s [\Delta \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^{-1} \tilde{T}] = \frac{\tilde{\psi}^7}{N_s} \rho_{(0)}, \quad (76)$$

$$\tilde{\psi} \Delta N_s - N_s \tilde{\psi}^{-1} \tilde{T} = \rho_{(1)} - 7 \left[\frac{\tilde{\psi}^7}{N_s} - 1 \right] \rho_{(0)}, \quad (77)$$

где $\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}$ в интервале $r_b \leq r \leq R_0$, а r_b — естественная разница «частице-подобных» объектов (предполагаем что $r_b \sim r_g \ll R_0 \sim H^{-1}$) и

$$\rho_{(0)} = \frac{3}{R_0^3 - r_b^3} \int_{r_b}^{R_0} dr r^2 N_s [\Delta \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^{-1} \tilde{T}], \quad (78)$$

$$\rho_{(1)} = \frac{3}{R_0^3 - r_b^3} \int_{r_b}^{R_0} dr r^2 [\tilde{\psi} \Delta N_s - N_s \tilde{\psi}^{-1} \tilde{T}], \quad (79)$$

с нормировкой в интервале $r_b \leq r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq R_0$

$$\frac{3}{R_0^3 - r_b^3} \int_{r_b}^{R_0} dr r^2 \frac{\tilde{\psi}^7}{N_s} = 1, \quad (80)$$

$$\frac{3}{R_0^3 - r_b^3} \int_{r_b}^{R_0} dr r^2 \log \tilde{\psi} = 0, \quad (81)$$

и граничные условия $N_s(r = R_0) = 1$, $\tilde{\psi}(r = R_0) = 1$. Для $N_s = 1 - \nu_1$, $\tilde{\psi} = 1 + \mu_1$ и малых отклонений $\mu_1, \nu_1 \ll 1$ решение этих уравнений имеет вид (72) и (73),

$$\tilde{\psi} = 1 + \mu_1 = 1 + \frac{rg}{4r} \left[\gamma_1 e^{-m_{(+)}(z)r} + (1 - \gamma_1) \cos m_{(-)}(z)r \right], \quad (82)$$

$$N_s = 1 - \nu_1 = 1 - \frac{rg}{4r} \left[(1 - \gamma_2) e^{-m_{(+)}(z)r} + \gamma_2 \cos m_{(-)}(z)r \right], \quad (83)$$

где $\beta = \sqrt{1 + [36 - 14 \cdot 6]/(98)} = \sqrt{1 - 48/98} \simeq 1/1.4$, $m_{(-)} = H\sqrt{\frac{3}{2}\Omega_M}$, $m_{(+)} = 3m_{(-)}$, $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 9/20$.

Можно видеть, что это изменение координаты $r \rightarrow x = rH\sqrt{(3/4\Omega_M)}$, а $\tilde{T}$ в уравнении (75) содержит $\tilde{T} \rightarrow 1$.

Уравнения (61) и (62) сводим к двум интегро-дифференциальным уравнениям соответственно в интервале $x_b \leq x \leq 1$, $\rho_M \ll x_b \sim x_g \ll 1$, $R_0 \sim H\sqrt{(3/4\Omega_M)} = 1$

$$\Delta\tilde{\psi} + \tilde{\psi}^{-1} = \frac{\tilde{\psi}^7}{N_s^2} \rho_{(0)}, \quad (84)$$

$$\tilde{\psi}\Delta N_s - N_s\tilde{\psi}^{-1} = \rho_{(1)} - 7\left[\frac{\tilde{\psi}^7}{N_s} - 1\right]\rho_{(0)}, \quad (85)$$

где $\Delta f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{df}{dx}$ и интегральные термины имеют вид

$$\rho_{(0)} = 3 \int_{x_b}^1 dx x^2 N_s \left[\Delta\tilde{\psi} + \tilde{\psi}^{-1} \right], \quad x_b \ll 1, \quad (86)$$

$$\rho_{(1)} = 3 \int_{x_b}^1 dx x^2 \left[\tilde{\psi}\Delta N_s - N_s\tilde{\psi}^{-1} \right], \quad x_b \ll 1, \quad (87)$$

с пределами интегрирования

$$3 \int_{x_b}^1 dx x^2 \frac{\tilde{\psi}^7}{N_s} = 1, \quad (88)$$

$$3 \int_{x_b}^1 dx x^2 \log \tilde{\psi} = 0. \quad (89)$$

В предельном случае $x \rightarrow 1 \gg x_g$ имеем

$$\psi_0(x) = 1 - \varepsilon_1 + \frac{x_g}{4x} \frac{1}{20} \left[11e^{-3\sqrt{6}x} + 9 \cos \sqrt{6}x \right], \quad (90)$$

$$N_{0s}(x) = 1 + \varepsilon_2 - \frac{x_g}{4x} \left[3e^{-3\sqrt{6}x} - 2 \cos \sqrt{6}x \right]. \quad (91)$$

Следовательно, в этом случае мы можем наложить граничные условия

$$N_s(x = 1) \simeq 1, \quad (92)$$

$$\tilde{\psi}(x = 1) \simeq 1. \quad (93)$$

Проблема состоит в нахождении значений функций $\tilde{\psi}(x)$, $N_s(x)$ в области $x \sim x_g$ и сравнении этих функций с (90) и (91).

Прежде всего можно видеть, что уравнение (76) — алгебраическое относительно N_s и имеет решение

$$N_s^{-1} = \tilde{\psi}^{-7} \frac{[\tilde{\psi}^7 \Delta \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^6]^{1/2}}{\rho_{(0)}^{1/2}} \gg 1, \quad (94)$$

из которого видно, что N_s никогда в ноль не обращается. Следовательно черная дыра в космологии не существует.

Заключение

Мы вычислили потенциал Ньютона в ОТО в конечном пространстве-времени, отделяя преобразования систем отсчета от общих преобразований координат и различая координатное время x^0 (как объект репараметризации $x^0 \rightarrow \tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0)$) и репараметризационно-инвариантное конформное время η (как результат решения уравнений движения и энергетической связи). В космологической теории возмущения [9, 10] в качестве инвариантного параметра эволюции выбирают космологический масштабный фактор. Гамильтонов подход [11, 12] обнаружил двойной учет космологического масштабного фактора в стандартной теории возмущения Лившица [9]. Это означает, что стандартная теория возмущения не совпадает с теорией Эйнштейна [1, 2]. Чтобы избежать двойного учета и вернуться к ОТО, мы отделили масштабный фактор с помощью усреднения детерминанта пространственной метрики. В этом случае показано, что сохранение числа переменных в ОТО позволяет исключить кинетические возмущения и получить новый тип потенциальных возмущений, как космологическое обобщение решения Шварцшильда и потенциала Ньютона.

Литература

1. *Einstein A.* Die Gründlange der allgemeinen Relativitätstheorie // Ann. d. Phys. — Vol. 49. — 1916. — Pp. 769–826.
2. *Hilbert D.* Die Grundlangen der Physik // Nachrichten von der Kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl. — Vol. 3. — 1915. — Pp. 395–407.
3. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl. — Vol. 2. — 1918. — Pp. 235–251.
4. *Fock V. A.* Geometrisierung der Diracschen Theorie des Electrons // Zs. Phys. — Vol. 57. — 1929. — Pp. 261–277.
5. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian Dynamics // Proc. Roy. Soc. — Vol. A 246. — London: 1958. — Pp. 326–332.
6. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* Canonical Variables for General Relativity // Phys. Rev. — Vol. 117. — 1960. — Pp. 1595–1602.
7. *Zelmanov A. L.* Kinemetric Invariants and Their Relation to Chronometric Ones in Einstein's Gravitation Theory // Dokl. AN USSR. — Vol. 209. — 1973. — Pp. 822–825.
8. *Vladimirov Y. S.* Frame of References in Theory of Gravitation. — Moscow: Energoizdat, 1982. — Vol. 209, Pp. 822–825. — In Russian.
9. *Lifshits E. M.* On the Gravitational Stability of the Expanding Universe // ZhETF. — Vol. 16. — 1946. — Pp. 587–602.
10. *Mukhanov V. F., Feldman H. A., Brandenberger R. H.* Theory of Cosmological Perturbations // Phys. Rep. — Vol. 215. — 1992. — Pp. 203–333.
11. *Barbashov B. M. et al.* Hamiltonian Cosmological Perturbation Theory // Phys. Lett. — Vol. B 633. — 2006. — in press.
12. *Zakharov A. F., Zinchuk V. A., Pervushin V. N.* Tetrad Formalism and Frames of References in General Relativity // Physics of Particles and Nuclei. — Vol. 37. — 2006. — to be published.

13. York J. W. Gravitational Degrees of Freedom and the Initial-Value Problem // Phys. Rev. Lett. — Vol. 26. — 1971. — Pp. 1656–1658.
14. Pawlowski M., Pervushin V. N. Reparametrization-Invariant Path Integral in GR and “Big Bang” of Quantum Universe // Int. J. Mod. Phys. — Vol. A 16. — 2001. — Pp. 1715–1742.
15. Pervushin V., Smirichinski V. Bogoliubov Quasiparticles in Constrained Systems // J. Phys. A: Math. Gen. — Vol. 32. — 1999. — Pp. 6191–6201.

UDC 519.633.2, 517.958: 530.145.6

Newton Potential in General Relativity in a Finite Volume

**I. V. Amirkhanov, B. M. Barbashov, A. A. Gusev, V. N. Pervushin,
S. A. Shuvalov, S. I. Vinitzky, A. F. Zakharov, V. A. Zinchuk**

*Joint Institute for Nuclear Research
6, Joliot-Curie str., Dubna, Moscow Region, 141980, Russia*

The Newton potential is calculated in the Hamiltonian approach to general relativity (GR) in finite volume, where coordinate “time” is gauge-invariant and therefore can’t be considered as a measurable variable of the theory. The evolution (gauge-invariant) parameter under study is identified with a homogenous cosmological scale factor $a(x^0)$, determined by means of averaging logarithm of spatial metric determinant over the scale-invariant Licnerowicz space, whereas respective gauge-invariant energy in GR is determined as a solution of the energy constraint equation in relation to the canonical momentum of the scale factor. In this case, cosmological generalization of the Newton potential, given in a non-homogenous class of functions, is specified.