

УДК 536.7

Динамическое давление и его флуктуации для классического идеального газа релятивистских частиц

Ю. Г. Рудой *, И. Кейта †

* Центр естественно-научного образования РУДН

† Кафедра теоретической физики

Российский университет дружбы народов

Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Дан анализ динамических величин — давления и сжимаемости идеального газа классических частиц с релятивистским законом дисперсии. Анализ основан на обобщенной теореме Боголюбова–Зубарева для квазидинамических величин. Показано, что учет релятивистских поправок как в области малых, так и больших импульсов может быть реализован посредством эффективного показателя однородности.

Введение

Важной проблемой равновесной статистической механики Гиббса [1] является вычисление равновесных термодинамических флуктуаций одной из обобщенных сил — динамического¹ давления P макроскопической системы. Согласно известной лемме Гиббса [1] (см. также, например, [2, 3], для этого помимо знания динамического давления P необходимо также знание динамической сжимаемости Ψ (соответствующие определения даны ниже).

Выражение для давления и его термодинамических флуктуаций требует нахождения гиббсовских статистических средних $\langle P \rangle$ и $\langle \Psi \rangle$ от динамических величин P и Ψ . При этом задача усреднения для P сводится к вычислению статистической суммы и ее производных, так что $\langle P \rangle$ относится к классу так называемых «термодинамических» средних, тогда как для Ψ она может иногда потребовать независимых дополнительных вычислений так называемых «нетермодинамических» средних.

Длительное время проблема вычисления флуктуаций давления — прежде всего нахождение Ψ и $\langle \Psi \rangle$ — не имела последовательного решения в рамках подхода Гиббса или нуждалась в привлечении каких-либо дополнительных предположений (см., например, обсуждение в [2, 4, 5], а также в [6, 7]). Лишь недавно в работе Рудого и Суханова [3] на основе идей метода квазисредних Боголюбова [8] было получено полное и последовательное решение проблемы флуктуаций давления в макроскопической системе, находящейся в классическом и слабовырожденном квантовом режиме.

В качестве конкретного примера в [3] был рассмотрен идеальный f -мерный газ частиц с f трансляционными степенями свободы в нерелятивистском и ультрарелятивистском предельных случаях. В этих случаях функция Гамильтона, или кинетическая энергия $H(p)$ свободной частицы с импульсом p , является однородной в смысле Эйлера. Представляет, однако, интерес и более общий случай релятивистской частицы, когда полная энергия $H(p)$ частицы складывается из

Авторы благодарны проф. Ю. П. Рыбакову за внимание к работе и полезные обсуждения.

¹ Динамическими здесь и ниже называются величины, заданные на фазовом пространстве макроскопической системы. Если эта система находится в тепловом контакте с термостатом (т. е. является термодинамической), то все динамические величины становятся стохастическими, или случайными, и для них имеют смысл понятия среднего значения и флуктуаций (подробнее см. ниже).

энергии покоя $E_0 \equiv H(0)$ и ее кинетической энергии $H_k(p)$ (для которой, по определению, $H_k(0) = 0$), так что $H(p)$ заведомо не является однородной функцией.

Согласно релятивистской механике, для свободной частицы энергия $H(p)$ (и, следовательно, $H_k(p)$) изотропна в импульсном пространстве, т. е. зависит только от величины $p = |\mathbf{p}|$ вектора $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} H(p) &\equiv E_0 + H_k(p) = [E_0^2 + (cp)^2]^{1/2}, \\ H(p) &= E_0 h(p), \quad h(p) = 1 + h_k(p), \end{aligned} \quad (1)$$

где c — скорость света в вакууме, $h(p)$ и $h_k(p)$ — безразмерные энергии.

Как показано в [3], динамические величины P и Ψ в случае идеального газа определяются только кинетической энергией $H_k(p)$, для которой обычно используются следующие приближенные выражения:

$$H_k^{\text{нр}}(p) \approx \frac{(cp)^2}{2E_0} \quad \text{при} \quad \frac{cp}{E_0} \ll 1, \quad \text{нерелятивистский («нр») предел}; \quad (2)$$

$$H_k^{\text{ур}}(p) \approx cp \quad \text{при} \quad \frac{cp}{E_0} \gg 1, \quad \text{ультрарелятивистский («ур») предел}. \quad (3)$$

Очевидно, в обоих предельных случаях (2) и (3) кинетическая энергия

$$H_k(p) = \alpha_k p^k \quad \left(k_{\text{ур}} = 1, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_{\text{ур}} = c; \quad k_{\text{нр}} = 2, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_{\text{нр}} = \frac{\alpha_1^2}{2E_0} \right) \quad (4)$$

является степенной и потому однородной (в смысле Эйлера) функцией импульса p с показателем однородности k , равным 2 и 1 соответственно³.

Настоящая работа посвящена применению подхода, развитого в [3], к общему релятивистскому случаю (1), когда $H_k(p)$ не является однородной функцией импульса p . Можно показать, однако, что и в этом случае полученные в [3] соотношения для давления P и сжимаемости Ψ с предельными (однородными) выражениями для функции $H_k(p)$ вида (4) сохраняют свой вид, если формально ввести в этих выражениях вместо одного постоянного показателя k два переменных (зависящих от импульса p) «показателя однородности»

$$k(p) = 1 + [h(p)]^{-1}, \quad m(p) = 1 + [h(p)]^{-2} \quad (1 \ll k(p), m(p) \ll 2). \quad (5)$$

Очевидно, что при всех p показатели (5) строго ограничены — как сверху «нерелятивистским» значением $k_{\text{нр}} = 2$ при $cp/E_0 \rightarrow 0$, когда $h_k(p) \rightarrow 0$, $h(p) \rightarrow 1$, так и снизу — «ультрарелятивистским» значением $k_{\text{ур}} = 1$ при $cp/E_0 \rightarrow \infty$, когда $h_k(p)$ и $h(p) \rightarrow \infty$, причем $k = m \equiv 1$ в случае $E_0 = 0$ (более подробно см. раздел 2).

1. Функция Гамильтона и ее связь с квазидинамическими давлением и сжимаемостью

Рассмотрим макроскопическую систему с фиксированным числом N одинаковых f -мерных частиц, находящуюся в классическом режиме (т. е. при достаточно

²В частном (но важном) случае безмассовых частиц (например, фотонов) с $E_0 = 0$ выражение (3) для $H_k^{\text{ур}}(p)$ становится точным.

³Заметим, что развиваемый нами подход сохраняет применимость и для более общих случаев, когда показатель k в (4) принимает не только «предельные» значения 1 и 2, но и любые натуральные, а также дробные и даже отрицательные значения.

высоких температурах и/или низких плотностях, см. ниже сноску 23) и описываемую функцией Гамильтона $H_N(q, p; a) \equiv H_N(\Gamma; a)$. Здесь $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_p - 2fN$ -мерное фазовое пространство координат q и импульсов p всех частиц системы; a — набор механических внешних параметров, из которых мы будем рассматривать только объем V .

Это означает, что координатная часть Γ_q пространства Γ (для одной частицы) ограничена фиксированным объемом V , т. е. система находится внутри сосуда произвольной формы (для простоты — f -мерного куба) с непроницаемыми для частиц гладкими стенками. Предположим, что система находится в тепловом равновесии с термостатом при фиксированной абсолютной температуре $T = 1/k_B\beta$ (k_B — постоянная Больцмана).

Последнее условие делает динамическую систему термодинамической, т. е. способной к случайному обмену энергией с термостатом в виде теплоты; при этом V и T (или β) являются для системы внешними параметрами (механическим и термическим соответственно).

В статистической механике Гиббса подобная система описывается стационарной функцией плотности распределения по состояниям в фазовом пространстве Γ . Эта функция предполагается нормируемой и имеет экспоненциальный, или канонический вид

$$\rho_N(\Gamma; \beta, V) = Z_N^{-1}(\beta, V) \exp[-\beta H_N(\Gamma; V)]. \quad (6)$$

Здесь

$$H_N(\Gamma; V) = H_N(\Gamma) + H_N + \varepsilon U(\Gamma; V), \quad (7)$$

где $U(\Gamma; V)$ — внешний по отношению к системе сингулярный потенциал стенок сосуда, равный нулю всюду внутри объема V сосуда, но принимающий сколь угодно большие значения вне сосуда и на поверхности его стенок.

Формальный параметр $\varepsilon \geq 0$ может быть произвольным, и лишь предел $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует пределу $V \rightarrow \infty$, т. е. переходу к неограниченной («свободной») системе, описываемой функцией Гамильтона $H_N(\Gamma)$.

Нормировочный множитель для распределения (6)

$$Z_N(\Gamma; V) = \int d\Gamma \exp[-\beta H_N(\Gamma; V)] \quad (8)$$

является статистической суммой для термодинамической системы, причем интегрирование по $d\Gamma = d\Gamma_q d\Gamma_p$ предполагается по всему фазовому пространству $d\Gamma$ системы N частиц с f измерениями по q и p у каждой⁴.

Ограничение координатной части Γ_q объемом V для каждой из N частиц в (8) происходит автоматически за счет наличия в (7) сингулярного слагаемого $U(\Gamma_q; V)$: при этом входящий в (8) «режущий» множитель $\exp[-\beta U(\Gamma_q; V)]$ играет роль проекционного оператора на указанную часть Γ_q . Что касается импульсной части Γ_p , то, как правило, функция $H(q, p)$ является растущей⁵ функцией импульса p (во всяком случае, при больших p). Поэтому интегрирование по p можно (с точностью до экспоненциально малых поправок) распространить до сколь угодно больших значений.

Любая функция $X(\Gamma; \beta, V)$, заданная на фазовом пространстве системы Γ , является случайной при тепловом контакте. Среднее значение такой функции здесь и всюду ниже определяется как гиббсовское, или каноническое среднее с функцией распределения (8)

$$X(\beta, V) \equiv \langle X(\Gamma; \beta, V) \rangle = \int d\Gamma X(\Gamma; \beta, V) \rho_N(\Gamma; \beta, V). \quad (9)$$

⁴В дальнейшем мы будем опускать индекс N у величин H_N , ρ_N и Z_N , считая их аддитивными; в силу одинаковости частиц $Z_N = Z^N$ для идеальной системы, а все средние динамические величины (энергия, давление, сжимаемость и т. п.) пропорциональны N .

⁵Мы отвлекаемся здесь от случаев ограниченных сверху функций $H(q, p)$ — например, для периодической в Γ_q динамической системы на решетке, когда импульс p становится квазиимпульсом и его изменение ограничено пределами зоны Бриллюэна.

Согласно Гиббсу [1] (см. также [2]), обобщенная сила $A(\Gamma; a)$, сопряженная внешнему механическому параметру a (в частности, объему), определяется как производная $[-\partial H(\Gamma; a)/\partial a]$. Обычно параметр a входит в функцию Гамильтона линейно, т. е. $H(\Gamma; a) = H(\Gamma) - A(\Gamma; a)$, причем $A(\Gamma; a)$ фактически не зависит от величин⁶ a , так что $\partial A(\Gamma)/\partial a = -\partial^2 H(\Gamma; a)/\partial^2 a = 0$. Это означает, что обобщенная сила $A(\Gamma)$ может быть определена независимо от наличия или отсутствия сопряженного поля⁷ a .

Однако в интересующем нас случае это не так: как видно из (7), внешний параметр $a = V$ входит в $H(\Gamma; V)$ посредством потенциала $U(\Gamma; V)$ существенно нелинейным (и, более того, даже сингулярным) образом. Поэтому сопряженная объему обобщенная сила — динамическое давление $P(\Gamma; V)$ — будет зависеть от значения параметра V , причем очевидно, что $P(\Gamma; V) \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$ («нет стенок — нет давления»).

Из общих принципов статистической механики Гиббса следует, что вид функции $P(\Gamma; V)$ не должен зависеть от конкретного вида потенциала стенки $U(\Gamma; V)$, но только от вида «свободной» функции Гамильтона $H(\Gamma)$ из (7) при $\varepsilon = 0$ (то же справедливо и для $\Psi(\Gamma; V)$). С учетом этих соображений корректными определениями давления и сжимаемости следует считать предложенные в [3] определения этих величин как *квазидинамических* в смысле Боголюбова

$$P(\Gamma; V) = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \left[-\frac{\partial H_N(\Gamma; V)}{\partial V} \right], \quad (10)$$

$$\Psi(\Gamma; V) = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \left[-\frac{\partial^2 H_N(\Gamma; V)}{\partial V^2} \right], \quad \Psi(\Gamma; V) \neq \frac{\partial P(\Gamma; V)}{\partial V}. \quad (11)$$

Эти определения следуют основной идее метода квазисредних Боголюбова [3], согласно которой для снятия имеющегося вырождения «свободной» системы (в данном случае — пространственного) необходимо «виртуально» ввести в функцию Гамильтона соответствующий физический «источник» (в данном случае — потенциал стенок $U(\Gamma; V)$), снимающий это вырождение. После проведения требуемого вычисления (в данном случае — производных по V) этот источник следует аннулировать; отличный от нуля результат подобного вычисления означает неаналитичность этого результата по параметру ε (или, что то же, непостоянность операций указанного вычисления и предельного перехода по ε).

Определения (10) и (11) представляются целесообразными в связи с тем, что вычисление производных по V непосредственно от полной функции Гамильтона вида (7) из-за наличия сингулярного слагаемого $U(\Gamma; V)$ не является математически корректной операцией и должно быть каким-либо образом «регуляризовано». Математически это соответствует тому, что вычисление производных от сингулярных, или обобщенных, функций сводится к вычислению производных от регулярных «носителей» (см., например, [9]), для чего необходимо перейти от самих функций к функционалам для них (в данном случае — к статистической сумме).

По-видимому, именно недооценкой указанных обстоятельств были обусловлены трудности в работах [5–7] (см. также [4, 5]). Авторы этих работ пытались провести необходимую регуляризацию, сперва моделируя «реальный» потенциал стенки, а затем переходя к сингулярному пределу «бесконечно высокой» стенки; в результате, однако, для $\Psi(\Gamma; V)$ расходящиеся выражения.

Как показано впервые в работе Рудого и Суханова [3], избежать подобных трудностей позволяет использование в этой проблеме идей метода квазисредних Боголюбова [8]. Именно этот метод представляет собой физически естественную,

⁶Среднее значение $A(\beta, V, a) \equiv \langle A(\Gamma) \rangle$ приобретает зависимость от β , V и a благодаря наличию этих переменных в функции распределения (5) (зависимость от внешнего поля a появляется за счет дополнительного слагаемого $[-\beta A(\Gamma)a]$ в показателе экспоненты).

⁷Например, это имеет место для таких пар a и A как внешнее электрическое поле и поляризация, внешнее магнитное поле и намагниченность в линейных средах (т. е. исключая сегнетоэлектрические и ферромагнитные среды).

математически корректную (и при том универсальную) процедуру подобной регуляризации для широкого класса физических задач с различным характером «вырождения».

2. Динамические уравнения состояния

2.1. Общие соотношения

Детали вычислений, дающих конструктивную реализацию определений (10) и (11), можно найти в работе [3]; их основной результат состоит в следующем. Пусть макроскопическая динамическая система ограничена конечным объемом V и описывается функцией Гамильтона вида (7). Тогда явные выражения для $P(q, p; V)$ и $\Psi(q, p; V)$ определяются только «свободной» частью функции Гамильтона $H(q, p)$ и не зависят от конкретного вида «потенциала стенок» $U(\Gamma; V)$

$$P_N(q, p; V) = -\frac{1}{fV} \left. \frac{\partial H_N(\lambda q, p/\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Psi_N(q, p; V) = \frac{1}{V} P_N(q, p; V) + \\ + \left(\frac{1}{fV} \right)^2 \left[\frac{\partial H_N(\lambda q, p/\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 H_N(\lambda q, p/\lambda)}{\partial \lambda^2} \right] \Big|_{\lambda=1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) определены практически для любых функций Гамильтона $H(q, p)$ — эти функции должны быть лишь достаточно «гладкими», а именно дважды дифференцируемы по своим аргументам p и q .

Величина λ является параметром канонического (т. е. сохраняющего элемент фазового объема $d\Gamma$) масштабного преобразования. Это преобразование устанавливает связь между изменением объема с эквивалентным ему изменением координат (условие каноничности требует также соответствующего изменения импульсов); после вычисления производных следует всюду положить $\lambda = 1$.

Заметим, что выражение (12) известно как *теорема Боголюбова–Зубарева* [10], а выражение (13) было впервые получено в работе Рудого и Суханова [3]. Выражения (12) и (13) естественно называть *динамическими уравнениями состояния*, поскольку они связывают между собой (квази)динамические величины — давление P и сжимаемость Ψ с основной характеристикой динамической системы — функцией Гамильтона H .

Существенно, что в динамические уравнения состояния (12) и (13) не входит внешний тепловой параметр — температура T , однако эти уравнения содержат явную зависимость от внешнего механического параметра — объема V ; подчеркнем, что все динамические функции H , P и Ψ заданы на фазовом пространстве Γ системы.

Все функции, входящие в (12) и (13), являются аддитивными относительно составляющих систему частиц (и, следовательно, их средние значения пропорциональны числу частиц N). С другой стороны, эти функции имеют различный характер поведения относительно объема V

$$H(q, p) = O(V^0), \quad P(q, p; V) = O(V^{-1}), \quad \Psi(q, p; V) = O(V^{-2}).$$

Действительно, внешний параметр V входит в правые части (12) и (13) только в виде множителя V^{-1} и V^{-2} , поэтому в пределе $V \rightarrow \infty$ (т. е. для «свободной» системы) величины P и Ψ действительно стремятся к нулю, тогда как H остается в этом пределе неизменной⁸.

В условиях теплового контакта динамической системы с термостатом все функции H , P и Ψ становятся *случайными*, и при наличии теплового равновесия

⁸Ясно, что дифференцирование по q и/или p не может изменить характер поведения по V правых частей уравнений (12) и (13).

в соответствии с общим определением (9) можно усреднить обе части динамических уравнений состояния (12) и (13).

Эта процедура приводит к *термодинамическим уравнениям состояния*, причем среднее значение функции P из (12) всегда является термодинамическим средним (определение см. ниже разделы 3 и 4), тогда как для среднего значения функции Ψ из (13) это не всегда так. Заметим, что усреднение уравнения (12) приводит к так называемой *теореме вириала*, или термодинамическому уравнению состояния, связывающему термическое $P(T, V)$ и калорическое $H(T, V)$ уравнения состояния.

Для неидеальной макроскопической системы функция Гамильтона⁹ $H(q, p)$ может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: энергии покоя E_0 , кинетической $H_k(p)$ и потенциальной $H_{\Pi}(q)$ энергий. В свою очередь, эти энергии обычно также являются аддитивными по всем частицам (E_0 и $H_k(p)$) и их парам ($H_{\Pi}(q)$). Заметим, что постоянная энергия E_0 не дает вклада в динамические уравнения состояния системы (12) и (13) для давления и сжимаемости, что физически вполне обосновано.

2.2. Однородный случай

В [3] в качестве примера применения формул (10) и (11) был рассмотрен частный случай, когда обе энергии $H_k(p)$ и $H_{\Pi}(q)$ являются *однородными* (в смысле Эйлера) функциями своих аргументов с показателями k и l соответственно. Это означает, что

$$H_{\Pi}(\lambda q) = \lambda^l H_{\Pi}(q), \quad H_k(\lambda^{-l} p) = \lambda^{-k} H_k(p), \quad (14)$$

так, что выражения (12) и (13) принимают вид соответственно

$$P(q, p; V) = \frac{1}{fV} [k H_k(p) - l H_{\Pi}(q)], \quad (15)$$

$$\Delta \Psi(q, p; V) = \left(\frac{1}{fV} \right)^2 [k^2 H_k(p) + l^2 H_{\Pi}(q)], \quad (16)$$

$$\Delta \Psi(q, p; V) \equiv \Psi(q, p; V) - \frac{1}{V} P(q, p; V).$$

«Однородные» выражения (15) и (16) обладают следующими полезными свойствами:

- 1) При любых k и l обе энергии $H_k(p)$ и $H_{\Pi}(q)$ входят в правые части (15) и (16) *линейно*, причем каждое дифференцирование по λ увеличивает на единицу степень показателей k и l , входящих в виде множителей перед $H_k(p)$ и $H_{\Pi}(q)$.
- 2) Физическая размерность выражения (15) для давления соответствует объемной плотности энергии, а выражения (16) для динамической сжимаемости — объемной плотности давления (каждое дифференцирование по λ приводит к увеличению на единицу степени множителя $1/V$).
- 3) Существуют условия, при которых давление $P(q, p; V)$, а также сжимаемость $\Psi(q, p; V)$ пропорциональны полной энергии $H(q, p) = H_k(p) + H_{\Pi}(q)$. При этих условиях согласно (15) и (16) среднее значение $\langle \Psi \rangle$ пропорционально $\langle P \rangle$ и/или $\langle H \rangle$, т. е. является термодинамическим, и его вычисление не представляет никакой дополнительной проблемы. Очевидно, указанные условия выполняются только в двух случаях: при $k = -l$ или при $l = 0$ (само значение k может быть при этом произвольным).

В данной работе мы ограничиваемся случаем *идеальной* динамической системы с $l = 0$, когда отсутствует зависящая от координат потенциальная энергия $H_{\Pi}(q)$ взаимодействия между частицами. Полная энергия $H(q, p)$ такой системы

⁹В дальнейшем мы, как правило, будем опускать явное указание индекса N у динамических величин, тогда как зависимость от N термодинамических величин будет указываться явно.

помимо постоянного слагаемого E_0 содержит зависящую только от импульсов частиц кинетическую энергию $H_k(p)$

$$H_\Pi(q) = 0, \quad H(\Gamma) \equiv H(q, p) = E_0 + H_k(p). \quad (17)$$

В случае, если функция $H_k(p)$ однородна (в смысле Эйлера) с показателем k , выражения (16) и (17) принимают следующий простой вид

$$P(p; V) = \kappa \mathcal{H}_k(p; V), \quad \kappa = \frac{k}{f}, \quad \mathcal{H}_k(p; V) \equiv \frac{H_k(p)}{V}, \quad (18)$$

$$\Delta\Psi(q, p; V) = \frac{1}{V} \kappa P(p; V) = \frac{1}{V} \kappa^2 \mathcal{H}_k(p; V). \quad (19)$$

Отметим, что в выражения (18) и (19) входит постоянная $\kappa = k/f$, равная отношению показателя однородности k к числу степеней свободы f . Величина κ характеризует данную динамическую систему при описании ее динамических и термодинамических свойств как в классическом, так и в квантовом режимах; κ является своего рода «показателем подобия» системы. При заданном значении f величина κ может изменяться в пределах от $\kappa_{\text{нр}} = k_{\text{нр}}/f = 2/f$ до $\kappa_{\text{ур}} = k_{\text{ур}}/f = 1/f$ (см. соотношения (2)–(4)); таким образом, для обычных случаев $1 \leq k \leq 2$, $1 \leq f \leq 3$ для κ имеют место ограничения $1/3 \leq \kappa \leq 2$. Однако в некоторых специальных моделях «идеального газа» интервалы изменения параметров k , f и $\kappa = k/f$ могут быть иными как по величине, так и по знаку (см. в связи с этим сноску³); выражения (18) и (19) сохраняют применимость и для этих случаев¹⁰.

2.3. Неоднородный случай

В данной работе рассматривается идеальный газ (17) с *неоднородной* функцией Гамильтона вида (1), описывающей общий релятивистский закон связи кинетической энергии и импульса. В этом случае выражения (14)–(16) (и, соответственно, (18) и (19)) уже неприменимы, и для получения явного вида динамических уравнений состояния следует вернуться к исходным выражениям (12) и (13).

Введем безразмерную переменную ξ , для которой в соответствии с (1) имеем¹¹

$$h(\xi) = 1 + h_k(\xi) = (1 + \xi^2)^{1/2}, \quad \xi = \frac{cp}{E_0} \quad (E_0 \neq 0), \quad H(\xi) = E_0 h(\xi). \quad (20)$$

Тогда вместо (18) и (19) получаем динамические уравнения состояния следующего вида

$$P(\xi; V) = \frac{E_0}{fV} \frac{h^2(\xi) - 1}{h(\xi)} = \mathcal{H}(\xi; V) \mu^{(-)}(\xi), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(q, p; V) &= E_0 \left(\frac{1}{fV} \right)^2 \frac{h^4(\xi) - 1}{h^3(\xi)} = \frac{1}{V} P(\xi; V) \mu^{(+)}(\xi) = \\ &= \frac{1}{V} \mathcal{H}(\xi; V) \mu^{(-)}(\xi) \mu^{(+)}(\xi). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь с учетом определения (18) для $\mathcal{H}_k(p; V)$ введена объемная плотность полной энергии $\mathcal{H}(\xi; V) = (E_0/V) + \mathcal{H}_k(p; V)$. Иногда удобнее вместо (21) и (22) использовать представления, обобщающие (18) и (19)

$$P(\xi; V) = \mathcal{H}_k(\xi; V) \kappa^{(+)}(\xi), \quad \mathcal{H}_k(\xi; V) = \mathcal{H}(\xi; V) f \kappa^{(-)}(\xi), \quad (23)$$

¹⁰Заметим, что если входящая в (18) и (19) плотность энергии положительна, то флуктуации давления также положительны (независимо от знака κ); таким образом, система механически устойчива, даже если давление отрицательно (в случае $\kappa < 0$).

¹¹Случай $E_0 = 0$ точно соответствует ультрарелятивистскому пределу и, следовательно, является однородным с $k = 1$.

$$\Delta\Psi(\xi; V) = \frac{1}{V}P(\xi; V)\mu^{(+)}(\xi) = \frac{1}{V}\mathcal{H}_k(\xi; V)\kappa^{(+)}(\xi)\mu^{(+)}(\xi). \quad (24)$$

Входящие в (21)–(24) безразмерные множители $\mu^{(\pm)}(\xi)$ и $\kappa^{(\pm)}(\xi)$ имеют смысл обобщенных «показателей однородности» и зависят (хотя и весьма слабо) от переменной ξ посредством функции $h(\xi)$

$$\begin{aligned} f\kappa^{(\pm)}(\xi) &= 1 \pm [h(\xi)]^{-1}, \quad f\mu^{(\pm)}(\xi) = 1 \pm [h(\xi)]^{-2}, \quad f\nu^{(\pm)}(\xi) = 1 \pm [h(\xi)]^{-4}; \\ f\kappa^{(+)}(\xi)\kappa^{(-)}(\xi) &= \mu^{(-)}(\xi), \quad f\mu^{(-)}(\xi)\mu^{(+)}(\xi) = f\nu^{(-)}(\xi), \\ h_k(\xi) &= h(\xi)f\kappa^{(-)}(\xi). \end{aligned} \quad (25)$$

Очевидно, что основную роль в динамическом описании системы играет функция $h_k(\xi) = 1 - h(\xi)$, которая обладает следующими свойствами: $h_k(\xi)$ и ее производные $h'_k(\xi) = \xi[h(\xi)]^{-1}$ и $h''_k(\xi) = [h(\xi)]^{-3}$ при всех $0 \leq \xi < \infty$ знакопостоянны (все три — неотрицательны) и монотонны: $h_k(\xi)$ и $h'_k(\xi)$ возрастают от нуля до ∞ и до 1 соответственно, а $h''_k(\xi)$ убывает от 1 до нуля.

Функция $h'''_k(\xi)$ также знакопостоянна (неположительна), но уже не монотонна: она имеет минимум при $\xi = 1/2$ и достигает максимума, равного нулю, в обоих пределах: при $\xi = 0$ и $\xi \rightarrow \infty$. Наконец, функция $h''''_k(\xi)$ не является уже ни знакопостоянной, ни монотонной: она возрастает от минимального значения, равного (-3) при $\xi = 0$, меняет знак при $\xi = 1/2$ и, пройдя через положительный максимум, убывает до нуля при $\xi \rightarrow \infty$.

Представляют интерес разложения для функций $h_k(\xi)$ и $1/h_k(\xi)$ в предельных случаях: в нерелятивистском (^{нр}) пределе ($\xi = 0$) и в ультрарелятивистском (^{ур}) пределе ($\xi \rightarrow \infty$). Низшие поправки к «однородным» формулам (2) и (3) имеют вид

$$\begin{aligned} h_k(\xi) &\approx h_k^{\text{нр}}(\xi) \left[1 - \frac{1}{4}\xi^2 \right] = h_k^{\text{нр}}(\xi) \left[1 - \frac{1}{2}h_k^{\text{нр}}(\xi) \right], \\ h_k^{\text{нр}}(\xi) &= \frac{1}{2}\xi^2 \quad (\xi \rightarrow 0), \\ 1/h_k(\xi) &= [h_k^{\text{ур}}(\xi)]^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\xi^2 \right\} = [h_k^{\text{ур}}(\xi)]^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2}[h_k^{\text{ур}}(\xi)] \right\}, \\ [h_k^{\text{ур}}(\xi)]^{-1} &= \xi^{-1} \quad (\xi \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим: $h_k^{\text{нр}}(0) = 1/h_k^{\text{ур}}(\infty) = 0$. Это и позволяет рассматривать эти величины как малые в соответствующих областях изменения переменной ξ .

Соответственно, поведение функций $\kappa^{(\pm)}(\xi)$ и $\mu^{(\pm)}(\xi)$ таково: все четыре функции при $\xi \rightarrow \infty$, $h(\xi) \rightarrow 0$ стремятся к одному и тому же предельному значению $\kappa_{\text{ур}} = 1/f$, однако при $\xi = 0$, $h(\xi) = 1$ пределы для них совпадают уже только для каждой из пар: $\kappa^{(\pm)}(0) = \mu^{(\pm)}(0) = \kappa_{\text{ур}} \pm (1/f)$, так, что $\kappa^{(+)}(0) = \mu^{(+)}(0) = \kappa_{\text{нр}} = 2/f$, тогда как $\kappa^{(-)}(0) = \mu^{(-)}(0) = 0$.

Кроме того, пары функций $\kappa^{(+)}(\xi), \mu^{(+)}(\xi)$ и $(\kappa^{(-)}(\xi) = \mu^{(-)}(\xi))$ обладают схожими общими свойствами: обе функции $\kappa^{(+)}(\xi)$ и $\mu^{(+)}(\xi)$ положительны и монотонно убывают с ростом ξ (от $\kappa_{\text{нр}}$ при $\xi = 0$ до $\kappa_{\text{ур}}$ при $\xi \rightarrow \infty$)¹², тогда как обе функции $\kappa^{(-)}(\xi)$ и $\mu^{(-)}(\xi)$ неотрицательны и монотонно возрастают (от нуля при $\xi = 0$ до $\kappa_{\text{ур}}$ при $\xi \rightarrow \infty$).

В ряде физических задач может представлять интерес получение поправок к предельным «однородным» уравнениям (18) и (19), обусловленных переменным характером функций $\kappa^{(\pm)}(\xi)$ и $\mu^{(\pm)}(\xi)$, входящих в динамические уравнения состояния (23) и (24) для $P(\xi; V)$ и $\Psi(\xi; V)$.

Для проведения подобной процедуры в духе теории возмущений при малых значениях $\xi \ll 1$ в нерелятивистском (^{нр}) пределе и больших значениях $\xi \gg 1$ в

¹²Очевидно, в указанных предельных случаях уравнения (23) и (24) переходят в свои «однородные» аналоги (18) и (19).

ультрарелятивистском (yp) пределе удобно использовать в уравнениях (23)–(25) в качестве малого параметра не ξ и $1/\xi$, а величины $h_k(\xi)$ и $1/h_k(\xi)$ соответственно.

Очевидно, даже простейший учет поправок на неоднородность (в смысле Эйлера) функции Гамильтона для общего релятивистского случая приводит к отклонению от присущей однородному случаю линейной зависимости между $P(\xi; V)$ и $\mathcal{H}_k(\xi; V)$, а также между $\Delta\Psi(\xi; V)$ и $P(\xi; V)$.

Сопоставляя формулы (23)–(24) со схожими по структуре «однородными» аналогами (18)–(19), легко видеть, что эти отклонения удобно описывать с помощью пары обобщенных показателей «однородности» ($\kappa^{(+)}(\xi)$, $\mu^{(+)}(\xi)$). Используя разложения (26), нетрудно получить в низшем приближении для нерелятивистского (np) предела

$$\begin{aligned}\kappa^{(+)}(\xi) &= \frac{1}{f} \{1 + [1 + h_k(\xi)]^{-1}\} \approx \kappa_{np} \left[1 - \frac{1}{2} h_k(\xi)\right], \\ \mu^{(+)}(\xi) &= \frac{1}{f} \{1 + [1 + h_k(\xi)]^{-2}\} \approx \kappa_{np} [1 - h_k^{np}(\xi)] \quad (\xi \rightarrow 0); \end{aligned} \quad (27)$$

и для ультрарелятивистского (yp) предела

$$\begin{aligned}\kappa^{(+)}(\xi) &= \frac{1}{f} \{1 + h_k^{-1}(\xi) [1 + h_k^{-1}(\xi)]^{-1}\} \approx \kappa_{yp} \{1 + [h_k(\xi)]^{-1}\}, \\ \mu^{(+)}(\xi) &= \frac{1}{f} \{1 + h_k^{-2}(\xi) [1 + h_k^{-2}(\xi)]^{-2}\} \approx \kappa_{yp} \{1 + [h_k(\xi)]^{-2}\} \quad (\xi \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом (27) и (28) соотношения (23) и (24) принимают приближенный вид

$$\begin{aligned}P(\xi; V) &\approx \kappa_{np} \kappa_k \left[1 - \frac{1}{2} h_k(\xi)\right], \\ \Delta\Psi(\xi; V) &\approx \kappa_{np}^2 \mathcal{H}_k(\xi; V) \left[1 - \frac{3}{2} h_k(\xi)\right] \quad (\xi \rightarrow 0); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}P(\xi; V) &\approx \kappa_{yp} \mathcal{H}_k(\xi; V) \{1 + [h_k(\xi)]^{-1}\}, \\ \Delta\Psi(\xi; V) &\approx \kappa_{yp}^2 \mathcal{H}_k(\xi; V) \quad (\xi \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (30)$$

Выражения (26)–(30) обнаруживают общую тенденцию к «выполаживанию» зависимостей от ξ как кинематических ($\kappa^{(+)}$, $\mu^{(+)}$), так и динамических (h_k , P , $\Delta\Psi$) величин: при малых (но конечных) ξ все эти величины становятся *меньше* своих «однородных» пределов при $\xi = 0$, тогда как при больших (но конечных) ξ — наоборот, *больше*, чем при $1/\xi = 0$.

Динамические уравнения состояния (21) и (22) представляют интерес с точки зрения получения термического уравнения состояния для давления $P = P(V, T)$, а также для его флуктуаций $\overline{(\Delta P)^2} = +\langle\Psi\rangle$. Для этого необходимо вычисление термодинамических средних значений согласно формуле (9), а также статической суммы (8) с функцией Гамильтона (17). Соответствующие расчёты в настоящее время проводятся и будут нами опубликованы.

Литература

1. Гиббс Д. В. Основные принципы статистической механики. — М.: Наука, 1982.
2. Терлецкий Я. П. Статистическая физика. — 3-е издание. — М.: Высшая школа, 1994. — 350 с.
3. Рудой Ю. Г., Суханов Ю. Г. Термодинамические флуктуации в подходах Гиббса и Эйнштейна // Успехи физических наук. — Т. 170, № 12. — 2000. — С. 1265–1296.

4. Мюнстер А. Термодинамика необратимых процессов. — М.: ИЛ, 1962.
5. Munster A. // Physica. — Vol. 26. — 1960. — P. 1117.
6. Fowler R. H. Statistical Mechanics. — 2nd edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 1936. — 350 p.
7. Klein M. J. // Physica. — Vol. 26. — 1960. — P. 1073.
8. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. — Киев: Наукова думка, 1971. — Т. 3.
9. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976.
10. Zubarev D. N. Неравновесная статистическая термодинамика. — М.: Наука, 1971.

UDC 536.7

Dynamic Pressure and its Fluctuations for the Ideal Gas of Relativistic Particles

Yu. G. Rudoy *, I. Keita †

* Center of Scientific Education of PFUR

† Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

The analysis of the dynamical quantities, i.e. the pressure and compressibility for the ideal gas of classical particles with the relativistic dispersion law is given. The analysis is based on the generalized Bogoliubov–Zubarev theorem for the quasi-dynamical quantities. It is shown that the account of the relativistic corrections in the both regions of small and large moments may be realized by means of the effective uniformity index