

УДК 519.872

Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением

П. П. Бочаров, **И. С. Зарядов**

*Кафедра теории вероятностей и математической статистики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

Рассматриваются марковские системы массового обслуживания с обновлением. Для этих систем на основе доказанной в работе для обобщенного процесса размножения и гибели теоремы получены алгоритмы нахождения стационарных вероятностей состояний. В качестве примеров приведены алгоритмы расчетов для экспоненциальных системы с обновлением — системы $M/M/n/r$ без дообслуживанием и системы $M/M/n/r$ с дообслуживанием.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: марковский процесс, матричное решение, стационарное распределение, обновление, дообслуживание.

Введение

Рассмотрим две системы массового обслуживания (СМО) с обновлением.

В СМО первого типа (без дообслуживания) заявка, окончившая обслуживание на приборе, с вероятностью q убивает все заявки в накопителе и покидает СМО, а с дополнительной вероятностью $p = 1 - q$ просто покидает систему. Вероятность q называется вероятностью обновления.

В СМО второго типа (с дообслуживанием) с вероятностью q обслужившаяся заявка остается в системе, убивая все заявки в накопителе, и с вероятностью $p = 1 - q$ покидает систему. Здесь вероятность q также называется вероятностью обновления.

Интерес к данному классу систем массового обслуживания связан с развитием компьютерных и телекоммуникационных систем. Впервые СМО с обновлением были рассмотрены А.Я. Крейниным [1, 2] и применялись для моделирования работы системы, в которую поступают потоки команд (заявок) нескольких типов (в том числе поток исполняемых команд) и возможен переход от исполняемой команды к иной команде с потерей промежуточных команд. В настоящее время этот подход начинают применять к моделированию систем, в которых обслуживание (а точнее говоря — момент окончания обслуживания) может вызвать сбой в работе системы, чреватый потерями заявок. В частности, в [3] были изучены вероятностные модели протоколов для систем, чувствительных к отказам. В этой же работе были построены системы массового обслуживания с приоритетами и обновлением. Отметим, что СМО с обновлением имеют также интересную интерпретацию с точки зрения математических моделей финансов и экономики, где с их помощью описывается стоимость рискованной ценной бумаги на финансовом рынке. При этом переход в нулевое состояние интерпретируется как банкротство (дефолт) компании, выпустившей данный рискованный актив.

В настоящей работе, в отличие от [1], в которой стационарное распределение вероятностей состояний найдено в терминах производящей функции, предлагается алгоритм поиска этого распределения, основанный на предложенном в [4] для обобщенного ПРГ методе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №06-07-89056).

1. Вспомогательные результаты

Рассмотрим однородный неприводимый марковский процесс с непрерывным временем, конечным множеством состояний и инфинитезимальной матрицей Q следующего вида:

$$Q = \begin{pmatrix} N_0 & \Lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_0 & N_1 & \Lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{M}_0 & M_1 & N_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{M}_0 & \tilde{M}_1 & M_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{M}_0 & \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \dots & \Lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{M}_0 & \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \dots & N_l & \Lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{M}_0 & \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \dots & M_l & N & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{M}_0 & \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \dots & \tilde{M}_l & 0 & \dots & 0 & M & N & \Lambda \\ \tilde{M}_0 & \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \dots & \tilde{M}_l & 0 & \dots & 0 & 0 & M & N_{r+1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\Lambda, N, M, N_k, \tilde{M}_k, M_k$ — квадратные матрицы, причем $M_k = M + \tilde{M}_k, k = \overline{0, l}$ и $l < r - 2$.

Как видно из (1), начиная с $l + 1$ -го столбца матрица, становится трехдиагональной.

В частности, для многолинейной СМО с конечным накопителем и обновлением без дообслуживания матрица Q имеет вид

$$Q = Q_1 = \begin{pmatrix} N_0 & \Lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ M_1 & N_1 & \Lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & N_2 & \Lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & N_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{n-1} & \Lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{M}_n & N & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{M} & M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{M} & 0 & \dots & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{M} & 0 & \dots & N & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{M} & 0 & \dots & M & N_{r+1} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\tilde{M}_n = M_n + \tilde{M}$, а для многолинейной СМО с конечным накопителем и обновлением с дообслуживанием вид

$$Q = Q_2 = \begin{pmatrix} N_0 & \Lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ M_1 & N_1 & \Lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & N_2 & \Lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & N_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{n-1} & \Lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & M_n & \tilde{N}_n & \Lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{M}_n & N & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{M} & M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{M} & 0 & \dots & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{M} & 0 & \dots & N & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{M} & 0 & \dots & M & N_{r+1} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\tilde{M}_n = M_n + \tilde{M}$, $\tilde{N}_n = N + \tilde{M}$.

Для марковского процесса с матрицей (1) стационарное распределение вероятностей состояний $\vec{p} = (\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{r+1})^T$, где $\vec{p}_k$ — компоненты вектора $\vec{p}$, находятся из системы уравнений равновесия (СУР)

$$\vec{p}_0^T N_0 + \vec{p}_1^T M_0 + \sum_{j=2}^{r+1} \vec{p}_j^T \tilde{M} = \vec{0}^T, \quad (4)$$

$$\vec{p}_{k-1}^T \Lambda + \vec{p}_k^T N + \vec{p}_{k+1}^T M_k + \sum_{j=k+2}^{r+1} \vec{p}_j^T \tilde{M}_k = \vec{0}^T, \quad k = \overline{1, l}, \quad (5)$$

$$\vec{p}_{k-1}^T \Lambda + \vec{p}_k^T N + \vec{p}_{k+1}^T M = \vec{0}^T, \quad k = \overline{l+1, r}, \quad (6)$$

$$\vec{p}_r^T \Lambda + \vec{p}_{r+1}^T N_{r+1} = \vec{0}^T \quad (7)$$

с условием нормировки

$$\sum_{k=0}^{r+1} \vec{p}_k^T \vec{1} = 1. \quad (8)$$

Для марковских процессов с матрицами (2) и (3) имеем следующие СУР:

$$\vec{p}_0^T N_0 + \vec{p}_1^T M_1 = \vec{0}^T, \quad (9)$$

$$\vec{p}_{k-1}^T \Lambda + \vec{p}_k^T N_k + \vec{p}_{k+1}^T M_{k+1} = \vec{0}^T, \quad k = \overline{1, n-2}, \quad (10)$$

$$\vec{p}_{n-2}^T \Lambda + \vec{p}_{n-1}^T N_{n-1} + \vec{p}_n^T \tilde{M}_n + \sum_{n+1}^{n+r} \vec{p}_j^T \tilde{M} = \vec{0}^T, \quad (11)$$

$$\vec{p}_{k-1}^T \Lambda + \vec{p}_k^T N + \vec{p}_{k+1}^T M = \vec{0}^T, \quad k = \overline{n, n+r-1}, \quad (12)$$

$$\vec{p}_{n+r-1}^T \Lambda + \vec{p}_{n+r}^T N_{n+r} = \vec{0}^T, \quad (13)$$

и

$$\vec{p}_0^T N_0 + \vec{p}_1^T M_1 = \vec{0}^T, \quad (14)$$

$$\vec{p}_{k-1}^T \Lambda + \vec{p}_k^T N_k + \vec{p}_{k+1}^T M_{k+1} = \vec{0}^T, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

$$\vec{p}_{n-1}^T \Lambda + \vec{p}_n^T \tilde{N}_n + \vec{p}_{n+1}^T \tilde{M}_{n+1} + \sum_{n+2}^{n+r} \vec{p}_j^T \tilde{M} = \vec{0}^T, \quad (16)$$

$$\vec{p}_{k-1}^T \Lambda + \vec{p}_k^T N + \vec{p}_{k+1}^T M = \vec{0}^T, \quad k = \overline{n+1, n+r-1}, \quad (17)$$

$$\vec{p}_{n+r-1}^T \Lambda + \vec{p}_{n+r}^T N_{n+r} = \vec{0}^T. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\vec{z}_{k-1}^T A + \vec{z}_k^T B + \vec{z}_{k+1}^T C = \vec{0}^T, \quad k = \overline{1, l-1}, \quad (19)$$

где A , B и C — квадратные матрицы одинакового порядка, а $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_l$ — векторы той же размерности.

Теорема 1. Пусть существуют матрицы R и S такие что $A + RB + R^2C = 0$, $S^2A + SB + C = 0$, и не вырождена матрица $SA + B + RC$. Тогда общее решение системы уравнений (19) представимо в виде

$$\vec{z}_k^T = \vec{f}^T R^k + \vec{g}^T S^{l-k}, \quad k = \overline{0, l}, \quad (20)$$

где $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — произвольные векторы¹.

Отметим, что утверждение теоремы 1 применимо к системе уравнений (19) с любыми матрицами A , B и C (а не только с матрицами интенсивностей переходов).

Перейдем непосредственно к матрице интенсивностей переходов (1).

Теорема 2. Пусть существуют матрицы R и S такие что: $\Lambda + RN + R^2M = 0$ и $S^2\Lambda + SN + M = 0$, кроме того, не вырождена матрица $S\Lambda + N + RM$. В этом случае вектор стационарных вероятностей $\vec{p} = (\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{r+1})^T$ удовлетворяет СУР $\vec{p}^T Q = \vec{0}^T$ с матрицей Q вида (1) тогда и только тогда, когда для некоторых векторов $\vec{f}$ и $\vec{g}$ справедливы равенства:

$$\vec{p}_k^T = \vec{f}^T R^{k-l} + \vec{g}^T S^{r+1-k}, \quad k = \overline{l, r+1}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_0^T N_0 + \vec{p}_1^T M_0 + \sum_{j=2}^l \vec{p}_j^T \tilde{M}_0 + \vec{f}^T \left(\sum_{k=l+1}^{r+1} R^{k-l} \right) \tilde{M}_0 + \\ + \vec{g}^T \left(\sum_{k=l+1}^{r+1} S^{r+1-k} \right) \tilde{M}_0 = \vec{0}^T, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{k-1}^T \Lambda + \vec{p}_k^T N_k + \vec{p}_{k+1}^T M_k + \sum_{j=k+2}^l \vec{p}_j^T \tilde{M}_k + \vec{f}^T \left(\sum_{k=l+1}^{r+1} R^{k-l} \right) \tilde{M}_k + \\ + \vec{g}^T \left(\sum_{k=l+1}^{r+1} S^{r+1-k} \right) \tilde{M}_k = \vec{0}^T, \quad k = \overline{1, l-2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\vec{p}_{l-2}^T \Lambda + \vec{p}_{l-1}^T N_{l-1} + (\vec{f}^T + \vec{g}^T S^{r+1-l}) M_{l-1} +$$

¹Доказательство теоремы см. в [4] или [5].

$$+ \vec{f}^T \left(\sum_{k=l+1}^{r+1} R^{k-l} \right) \tilde{M}_{l-1} + \vec{g}^T \left(\sum_{k=l+1}^{r+1} S^{r+1-k} \right) \tilde{M}_{l-1} = \vec{0}^T, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{l-1}^T \Lambda + \vec{f}^T (N_l + R M_l) + \vec{g}^T S^{r-l} (M_l + S N_l) + \\ + \vec{f}^T \left(\sum_{k=l+2}^{r+1} R^{k-l} \right) \tilde{M}_l + \vec{g}^T \left(\sum_{k=l+2}^{r+1} S^{r+1-k} \right) \tilde{M}_l = \vec{0}^T, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\vec{f}^T R^{r-l} (R N_{r+1} + \Lambda) + \vec{g}^T (N_{r+1} + S \Lambda) = \vec{0}^T. \quad (26)$$

Доказательство. Согласно теореме 1 уравнения (6) имеют место тогда и только тогда, когда для некоторых векторов $\vec{f}$ и $\vec{g}$ справедливы выражения (21)

$$\vec{p}_k^T = \vec{f}^T R^{k-l} + \vec{g}^T S^{r+1-k}, \quad k = \overline{l, r+1}.$$

Учитывая, что $M_k = M + \tilde{M}_k$, выразим из (21) векторы $\vec{p}_{l-1}$, $\vec{p}_l$:

$$\vec{p}_l = \vec{f}^T + \vec{g}^T S^{r+1-l}, \quad \vec{p}_{l-1} = \vec{f}^T R + \vec{g}^T S^{r-l}.$$

Подставляя полученные значения $\vec{p}_{l-1}$ и $\vec{p}_l$ в (6) при $k = l$ и $l-1$, приходим к уравнениям (24)–(25).

В выражении (4) представим сумму $\sum_{j=2}^{r+1} \vec{p}_j^T \tilde{M}$ в виде

$$\sum_{j=2}^{r+1} \vec{p}_j^T \tilde{M} = \sum_{j=2}^l \vec{p}_j^T \tilde{M} + \sum_{j=l+1}^{r+1} \vec{p}_j^T \tilde{M}.$$

Подставляя (21) в последнее слагаемое вместо $\vec{p}_j^T$ и производя аналогичную операцию с (5) при $k = \overline{1, l-2}$, приходим к (22)–(23).

Для векторов $\vec{p}_r$ и $\vec{p}_{r+1}$ из (21) имеем

$$\vec{p}_r = \vec{f}^T R^{r-l} + \vec{g}^T S, \quad \vec{p}_{r+1} = \vec{f}^T R^{r+1-l} + \vec{g}^T.$$

Подставляя полученные выражения в (7), получаем (26). $\square$

Из теоремы 2 непосредственно выводятся следующие следствия, позволяющие найти стационарное распределение числа заявок в СМО с матрицами интенсивностей (2) и (3).

Следствие 1. Пусть существуют матрицы R и S такие что: $\Lambda + RN + R^2M = 0$ и $S^2\Lambda + SN + M = 0$, кроме того, не вырождена матрица $S\Lambda + N + RM$. В этом случае вектор $\vec{p} = (\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n+r})^T$ удовлетворяет СУР $\vec{p}^T Q_1 = \vec{0}^T$ с матрицей Q_1 вида (2) тогда и только тогда, когда для некоторых векторов $\vec{f}$ и $\vec{g}$ справедливы равенства:

$$\vec{p}_k^T = \vec{f}^T R^{k-n+1} + \vec{g}^T S^{n+r-k}, \quad k = \overline{n-1, n+r},$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{n-2}^T \Lambda + \vec{f}^T (N_{n-1} + R \tilde{M}_n) + \vec{g}^T S^r (S N_{n-1} + \tilde{M}_n) + \\ + \vec{f}^T \left(\sum_{j=n+1}^{n+r} R^{j-n+1} \right) \tilde{M} + \vec{g}^T \left(\sum_{j=n+1}^{n+r} S^{n+r-j} \right) \tilde{M} = \vec{0}^T, \\ \vec{f}^T R^r (R N_{n+r} + \Lambda) + \vec{g}^T (N_{n+r} + S \Lambda) = \vec{0}^T. \end{aligned}$$

Следствие 2. Пусть для некоторых матриц R и S верны выражения $\Lambda + RN + R^2M = 0$ и $S^2\Lambda + SN + M = 0$, кроме того, не вырождена матрица $S\Lambda + N + RM$. В этом случае вектор $\vec{p} = (\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{n+r})^T$ удовлетворяет СУР $\vec{p}^T Q_2 = \vec{0}^T$ с матрицей Q_2 вида (3) тогда и только тогда, когда для некоторых векторов $\vec{f}$ и $\vec{g}$ справедливы равенства:

$$\vec{p}_k^T = \vec{f}^T R^{k-n} + \vec{g}^T S^{n+r-k}, \quad k = \overline{n, n+r},$$

$$\vec{p}_{n-2}^T \Lambda + \vec{p}_{n-1}^T N_{n-1} + (\vec{f}^T + \vec{g}^T S^r) M_n = \vec{0}^T,$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{n-1}^T \Lambda + \vec{f}^T (N_n + RM_n) + \vec{g}^T S^{r-1} (SN_n + M_n) + \\ + \vec{f}^T \left(\sum_{j=n}^{n+r} R^{j-1} \right) \tilde{M} + \vec{g}^T \left(\sum_{j=n}^{n+r} S^{r+1-j} \right) \tilde{M} = \vec{0}^T, \end{aligned}$$

$$\vec{f}^T R^{r-1} (RN_{n+r} + \Lambda) + \vec{g}^T (N_{n+r} + S\Lambda) = \vec{0}^T.$$

В следующих разделах рассмотрим работу предложенного метода поиска решения на примере двух экспоненциальных многолинейных систем с обновлением: системы без дообслуживания и системы с дообслуживанием, которые будем кодировать, соответственно, как $M/M^R/n/r$ и $M/M^{RR}/n/r$. Для этих систем будем обозначать через λ интенсивность входящего потока, а через μ — интенсивность обслуживания.

2. Система $M/M^R/n/r$ с обновлением без дообслуживания

Система уравнений равновесия для СМО и условие нормировки имеют вид:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + p(k+1)\mu p_{k+1} = 0, & k = \overline{1, n-2}, \\ \lambda p_{n-2} + (\lambda + (n-1)\mu)p_{n-1} + pn\mu p_n + qn\mu \sum_{j=n+1}^{n+r} p_j = 0, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu)p_k + pn\mu p_{k+1} = 0, & k = \overline{n, n+r-1}, \\ \lambda p_{n+r-1} + \mu p_{n+r} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

$$\sum_{k=0}^{n+r} p_k = 1.$$

Согласно следствию 1, решение такой СУР имеет вид

$$p_k = f R^{k-n+1} + g S^{n+r-k}, \quad k = \overline{n-1, n+r}, \quad (28)$$

где f и g — постоянные, определяемые из соотношений

$$\begin{aligned} \lambda p_{n-2} + f[-\lambda + (n-1)\mu + pn\mu R] + gS^r[-(\lambda + (n-1))S + pn\mu] + \\ + fnq\mu \left(\sum_{j=n}^{n+r} R^{j-n+1} \right) + gnq\mu \left(\sum_{j=n}^{n+r} S^{n+r-j} \right) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$fR^r(\lambda - n\mu R) + g(\lambda S - \mu) = 0, \quad (30)$$

а S и R — корни квадратных уравнений $\lambda - R(\lambda + \mu) + R^2p\mu = 0$ и $S^2\lambda - S(\lambda + \mu) + p\mu = 0$, удовлетворяющие условию $S\lambda - (\lambda + \mu) + R\mu \neq 0$.

$$R_{1,2} = \frac{\lambda + \mu \pm \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4p\lambda\mu}}{2p\mu}, \quad S_{1,2} = \frac{\lambda + \mu \mp \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4p\lambda\mu}}{2\lambda}.$$

Отметим, что с учетом условия $S\lambda - (\lambda + \mu) + R\mu \neq 0$ для дальнейших расчетов можно взять любую из двух пар корней: (S_1, R_1) или (S_2, R_2) . Естественно, использование любой из этих пар приводит к одному и тому же конечному результату.

Из первого и второго уравнений СУР (27) имеем:

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (31)$$

где $\rho = \lambda/\mu$. Из (29)–(31) после преобразований получаем выражения:

$$g = fR^r \frac{\lambda - n\mu R}{n\mu - \lambda S}, \quad g = fR^{r+2} \frac{1 - S}{1 - R}.$$

Подставляя любое из них в уравнение (28) и используя условие нормировки, получим формулы для f и g :

$$f = \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1 - R}{1 - R + (RS)^{r+1}(R - RS)} p_0,$$

$$g = \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{R^{r+2}(1 - S)}{1 - R + (RS)^{r+1}(R - RS)} p_0,$$

где

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{R(1 - (RS)^{r+1})}{1 - R + (RS)^{r+1}(R - RS)} \right)}.$$

Таким образом, окончательное выражение для стационарных вероятностей имеет вид:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{R(1 - (RS)^{r+1})}{1 - R + (RS)^{r+1}(R - RS)} \right)}, \\ p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ p_i = \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(1 - R)R^{i-n+1} + (1 - S)R^{r+2}S^{n+r-i}}{1 - R + (RS)^{r+1}(R - RS)} p_0, \quad i = \overline{n, n+r}. \end{cases} \quad (32)$$

Средние числа заявок в системе и очереди определяются формулами:

$$N = \frac{\lambda(1 - p_{n+r}) + n\mu(nq - 1) - \mu(1 - qn) \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \frac{\rho^i}{i!} + n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} \right) p_0}{nq\mu},$$

$$Q = N - n + \left(n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n-1} i \frac{\rho^i}{i!} \right) p_0.$$

Стационарная вероятность $P_{w=0}$ немедленного обслуживания имеет вид

$$P_{w=0} = p_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!}.$$

В частности, для однолинейной СМО $M/M^R/1/r$ с обновлением ($n=1$) получаем следующие формулы для стационарного распределения числа заявок в системе и средних чисел заявок в системе и в очереди:

$$p_k = \frac{1}{1 - (RS)^{r+2}} \left((1-R)R^k + R^{r+2}(1-S)S^{r+1-k} \right), \quad k = \overline{0, r+1},$$

$$N = \frac{\lambda(1 - p_{r+1}) - \mu p(1 - p_0)}{\mu q}, \quad Q = \frac{\lambda(1 - p_{r+1}) - \mu(1 - p_0)}{\mu q}.$$

3. Система $M/M^{RR}/n/r$ с обновлением и дообслуживанием

Система уравнений равновесия для СМО и условие нормировки имеют вид:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ 0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + p(k+1)\mu p_{k+1}, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ 0 = \lambda p_{n-1} + (\lambda + n\mu)p_n + qn\mu p_n + pn\mu p_{n+1} + qn\mu \sum_{j=n+1}^{n+r} p_j, \\ 0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu)p_k + pn\mu p_{k+1}, \quad k = \overline{n+1, n+r-1}, \\ 0 = \lambda p_{n+r-1} + \mu p_{n+r}, \end{cases} \quad (33)$$

$$\sum_{k=0}^{n+r} p_k = 1.$$

Согласно следствию 2 решение такой СУР имеет вид

$$p_k = fR^{k-n} + gS^{r+n-k}, \quad k = \overline{n, n+r}, \quad (34)$$

где $\rho = \lambda/\mu$, а f и g — постоянные, определяемые из соотношений

$$\begin{aligned} \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)(f + gS^r) + pn\mu(fR + gS^{r-1}) + \\ + fnq\mu \left(\sum_{j=n+1}^{n+r} R^{j-n} \right) + gnq\mu \left(\sum_{j=n+1}^{n+r} S^{n+r-j} \right) = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$fR^{r-1}(\lambda - n\mu R) + g(\lambda S - n\mu) = 0, \quad (36)$$

а S и R — корни квадратных уравнений $\lambda - R(\lambda + \mu) + R^2\mu = 0$ и $S^2\lambda - S(\lambda + \mu) + \mu = 0$, удовлетворяющие условию $S\lambda - (\lambda + \mu) + R\mu \neq 0$.

$$R_{1,2} = \frac{\lambda + \mu \pm \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}, \quad S_{1,2} = \frac{\lambda + \mu \mp \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}.$$

Как и в предыдущем примере, отметим, что с учетом условия $S\lambda - (\lambda + \mu) + R\mu \neq 0$ для дальнейших расчетов можно взять любую из двух пар корней: (S_1, R_1) или (S_2, R_2) . Естественно, использование любой из этих

пар приводит к одному и тому же конечному результату. Из первого и второго уравнений СУР (33) имеем:

$$p_i = \frac{\rho^i}{p^i i!} p_0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (37)$$

Из (37)–(36) после преобразований получаем выражения:

$$g = f R^{r-1} \frac{\lambda - n\mu R}{n\mu - \lambda S}, \quad g = f R^{r+1} \frac{1 - S}{1 - R}.$$

Подставляя любое из них в уравнение (34) и используя условие нормировки, получим формулы для f и g .

$$f = \frac{\rho^n}{p^n n!} \cdot \frac{1 - R}{1 - R + (RS)^r (R - RS)} p_0, \quad g = \frac{\rho^n}{p^n n!} \cdot \frac{R^{r+2} (1 - S)}{1 - R + (RS)^r (R - RS)} p_0,$$

где

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{p^i i!} + \frac{\rho^n}{p^n n!} \left(\frac{R(1 - (RS)^r)}{1 - R + (RS)^r (R - RS)} \right)}.$$

Таким образом, окончательное выражение для стационарных вероятностей имеет вид:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{p^i i!} + \frac{\rho^n}{p^n n!} \left(\frac{R(1 - (RS)^r)}{1 - R + (RS)^r (R - RS)} \right)}, \\ p_i = \frac{\rho^i}{p^i i!} p_0, \quad i = \overline{1, n}, \\ p_i = \frac{\rho^n}{p^n n!} \cdot \frac{(1 - R)R^{i-n} + (1 - S)R^{r+1}S^{n+r-i}}{1 - R + (RS)^r (R - RS)} p_0, \quad i = \overline{n+1, n+r}. \end{cases} \quad (38)$$

Средние числа заявок в системе и очереди определяются формулами:

$$N = \frac{\lambda(1 - p_{n+r}) - n\mu(p - qn) + \mu(qn - p) \left(\sum_{i=1}^n i \frac{\rho^i}{p^i i!} - n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{p^i i!} \right) p_0}{nq\mu},$$

$$Q = N - n + \left(n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{p^i i!} - \sum_{i=0}^{n-1} i \frac{\rho^i}{p^i i!} \right) p_0.$$

Стационарная вероятность $P_{w=0}$ немедленного обслуживания имеет вид:

$$P_{w=0} = p_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{p^i i!}.$$

В частности, для однолинейной СМО $M/M^{RR}/1/r$ с обновлением ($n = 1$) получаем следующие формулы для стационарного распределения числа заявок в системе и средних чисел заявок в системе и в очереди:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{p\mu}{\lambda} \cdot \frac{(1 - R) + S^r R^{r+1} (1 - S)}{\frac{p\mu}{\lambda} (1 - R) + \frac{p\mu}{\lambda} S^r R^{r+1} (1 - S) + 1 - (RS)^{r+1}}, \\ p_k = \frac{R^{k-1} (1 - R) + R^{r+1} (1 - S) S^{r+1-k}}{\frac{p\mu}{\lambda} (1 - R) + \frac{p\mu}{\lambda} S^r R^{r+1} (1 - S) + 1 - (RS)^{r+1}}, \quad k = \overline{1, r+1}, \\ N = \frac{\lambda(1 - p_{r+1}) - \mu(p - q)(1 - p_0)}{\mu q}, \quad Q = \frac{\lambda(1 - p_{r+1}) - \mu p(1 - p_0)}{\mu q}. \end{cases} \quad (39)$$

Заключение

В работе рассмотрены марковские системы массового обслуживания с обновлением. Для этих систем на основе доказанной в работе для обобщенного процесса размножения и гибели теоремы получены алгоритмы нахождения стационарных вероятностей состояний. В качестве примеров приведены алгоритмы расчетов для экспоненциальных системы с обновлением — системы $M/M/n/r$ без дообслуживания и системы $M/M/n/r$ с дообслуживанием.

В дальнейшем планируется изучение систем массового обслуживания более общего вида с обновлением, а также рассмотрение случая, когда заявки, выбитые из очереди, формируют отдельный накопитель, из которого повторно могут пойти на обслуживание.

Литература

1. Kreinin A. Queueing Systems with Renovation // Journal of Applied Math. Stochast. Analysis. — Vol. 10, No 4. — 1997. — Pp. 431–443.
2. Kreinin A. Inhomogeneous Random Walks: Applications in Queueing and Finance // CanQueue / Fields Institute. — Toronto: 2003.
3. Towsley D., Tripathi S. K. A single server priority queue with server failure and queue flushing. — 1999.
4. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. — С. 529.
5. Naoumov V. A. Matrix-multiplicative approach to quasi- birth-and-death processes analysis // Proc. First Internat. Conf. on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models. — Detroit: 1995.

UDC 519.872

Queueing Systems with Renovation. Stationary Probability Distribution

P. P. Bocharov, I. S. Zaryadov

*Department of Probability Theory and Mathematical Statistics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

The Markovian queueing systems with renovation are revised. The matrix algorithm for computing the stationary distribution of the Markov process is described. As examples of the method the algorithms for exponential systems are given — queueing systems $M/M/n/r$ without reservice and $M/M/n/r$ with reservice.