RUDN Journal of MIPh
Вестник РУДН. Серия МИФ
2018 Vol. 26 No. 4 393–398
http://journals.rudn.ru/miph

Космологические модели

УДК 530.12:531.551
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398

Космологические модели типа VIII по Бьянки с жидкостью, описываемой уравнением состояния газа Чаплыгина

Д. М. Янишевский

Кафедра высшей математики
Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)
ул. Букирева, д. 15, г. Пермь, Россия, 614990

В рамках общей теории относительности построены соответствующие космологические модели с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки. Известно, что тёмная энергия может моделироваться различными видами тензора энергии-импульса, поэтому в данной работе источниками гравитации являются в первом случае анизотропная жидкость, одна из компонент давления которой имеет уравнение состояния газа Чаплыгина, и идеальная жидкость, а во втором случае — анизотропная жидкость, газ Чаплыгина и космологический член. Показано, что модель, при рассмотрении расширения от планковских масштабов до современного размера наблюдаемой Вселенной, даёт удовлетворительную величину порядка угловой скорости её вращения. Полученные решения могут быть применены к изучениям эффектов, имеющих место в современную эпоху, а также во время инфляционной стадии.

Ключевые слова: космологическое расширение, газ Чаплыгина, анизотропия Вселенной, ускоренное расширение, метрика VIII типа Бьянки

1. Введение

Обращение к анизотропной космологии обусловлено наблюдательными фактами [1–3], демонстрирующими возможность крупномасштабных отклонений от изотропии в наблюдаемой Вселенной, при этом глобальная анизотропия Вселенной может быть связанна в том числе и с космологическим вращением. С другой стороны, в нынешнюю эпоху Вселенная расширяется с ускорением, причиной которого является, по-видимому, тёмная энергия. В работах [4, 5] авторами были получены результаты для метрики рассматриваемого типа, но с другими материальными источниками. В данной работе в рамках общей теории относительности построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки вида

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta, \tag{1}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — элементы лоренцевой матрицы, α, $\beta = \{0, 1, 2, 3\}$, θ^α — ортонормированные 1-формы, выражающиеся через масштабный фактор R следующим образом:

$$\theta^0 = \mathrm{d}t - R\nu_A e^A, \quad \theta^A = \mathrm{d}t - RK_A e^A,$$

при этом $\nu_A = \{0, 0, 1\}$, $K_A = \{a, a, b\}$, $A = \{1, 2, 3\}$.

1-формы e^A имеют следующий вид:

$$e^1 = \operatorname{ch} y \cos z\, \mathrm{d}x - \sin z\, \mathrm{d}y, \quad e^2 = \operatorname{ch} y \sin z\, \mathrm{d}x + \cos z\, \mathrm{d}y, \quad e^3 = \operatorname{sh} y\, \mathrm{d}x + \mathrm{d}z. \tag{2}$$

Источниками гравитации в первой модели являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся тёмную энергию, и идеальная жидкость, описывающая

Статья поступила в редакцию 27 октября 2018 г.

барионную материю. Во второй модели — анизотропная жидкость и космологическая постоянная, описывающие вращающуюся тёмную энергию, и газ Чаплыгина, описывающий некую экзотическую материю. Построенные космологические модели отличны от ранее найденных космологических решений для метрики (1) с базисными 1-формами (2). Расчёты, связанные с решением уравнений Эйнштейна, проведены с использованием тетрадного формализма в естественно возникающем базисе лоренцевой тетрады.

2. Космологическая модель с анизотропной жидкостью и пылевидной материей

Будем искать для метрики (1) космологическое решение уравнений Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
G_{00} = \frac{b^2(3-b^2-4a^2) + 4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2 - 8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \mu(1+v_3^2) + \rho, \\
G_{11} = \frac{(1-b^2)\big(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R})\big)}{4a^4b^2R^2} = p, \\
G_{33} = \frac{b^2(4a^2+3b^2-1) + 4a^4(3-b^2)\dot{R}^2 - 8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \pi + \mu v_3^2, \\
G_{03} = \frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4bR^2} = \mu v_3\sqrt{1+v_3^2}.
\end{gathered} \tag{4}$$

У нас используется такая система единиц, что скорость света и гравитационная постоянная, умноженная на 8π, равны единице. При этом тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T^{(1)}_{\alpha\beta} = (p+\rho)\,u_\alpha u_\beta + (\pi - p)\chi_\alpha\chi_\beta - p\eta_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

где ρ, π — давления анизотропной жидкости в трёх направлениях, определяемых тетрадой, ρ — плотность энергии идеальной жидкости, $u^i = \delta^i_0$ — вектор 4-скорости сопутствующей анизотропной жидкости в проекции на тетраду, — вектор анизотропии в проекции на тетраду. В координатном представлении $\chi = \{0,0,0,1\}$ — вектор анизотропии в проекции на тетраду. В координатном представлении

$$\chi_i = e_i^{(\alpha)}\chi_\alpha = e_i^{(3)}\chi_3 = \{0, bR\,\mathrm{sh}(y), 0, bR\}\,.$$

Тензор энергии-импульса идеальной пылевидной жидкости имеет вид:

$$T^{(2)}_{ik} = \mu v_i v_k, \tag{6}$$

где $v = \{v_0, 0, 0, v_3\}$, μ — плотность жидкости.

В итоге суммарный тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{ik} = T^{(1)}_{ik} + T^{(2)}_{ik} = (p+\rho)\,u_i u_k + (\pi - p)\chi_i\chi_k - p\eta_{ik} + \mu v_i v_k. \tag{7}$$

Пусть давление p удовлетворяет уравнению состояния газа Чаплыгина

$$p = -\alpha/\rho. \tag{8}$$

Выражая из (4) с учётом (8) параметры материи, имеем плотность энергии анизотропной жидкости

$$\rho = \frac{4a^4b^2R^2\alpha}{(b^2-1)\big(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R})\big)}, \tag{9}$$

её давления

$$p = \alpha\frac{(1-b^2)\big(b^2-4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R})\big)}{4a^4b^2R^2\alpha}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\pi = {} & \frac{b^2(4a^2+3b^2-1)+4a^4(3-b^2)\dot{R}^2-8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} - \\ & - \frac{\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)}{\left(\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}\right)\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)+\alpha},\end{aligned} \tag{11}$$

плотность изотропной пылевидной жидкости

$$\begin{aligned}\mu = {} & \frac{\left(\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}\right)\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)+\alpha}{\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)} - \\ & - \frac{\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)}{\left(\frac{(1-b^2)(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2}\right)\left(\frac{b^2(3-b^2-4a^2)+4a^4(3b^2-1^2)\dot{R}^2-8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2}\right)+\alpha},\end{aligned} \tag{12}$$

и квадрат её скорости

$$v_3^2 = \frac{\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)\big(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R})\big)}{4a^4b^2R^2}\right)^2}{\left((f+\alpha)^2-\left(\frac{b^2+4a^4(\dot{R}^2-R\ddot{R})}{2a^4bR^2}\right)^2\left(\frac{(1-b^2)\big(b^2+4a^4(\dot{R}^2+2R\ddot{R})\big)}{4a^4b^2R^2}\right)^2\right)}. \tag{13}$$

Поскольку число уравнений превышает число неизвестных, наложим дополнительное условие

$$p = \left(\left(\frac{3\ddot{R}}{R}\right)+\frac{l}{R^2}\right)\left(\frac{1-b^2}{b^2}\right), \tag{14}$$

которое влечёт за собой уравнение, определяющее масштабный фактор:

$$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L, \tag{15}$$

где введено обозначение $L = l - b^2/4a^4$. Его общее решение даётся комбинацией экспонент, выбором постоянных интегрирования, всегда приводящихся к одному из следующих выражений:

$$R = (\sqrt{L}/H)\,\mathrm{sh}(Ht), \quad L > 0, \tag{16}$$

$$R = (\sqrt{-L}/H)\,\mathrm{ch}(Ht), \quad L < 0, \tag{17}$$

$$R = R_0 e^{Ht}, \quad L = 0. \tag{18}$$

Данными зависимостями можно моделировать как современную стадию ускоренного расширения, так и обе стадии инфляции. Кинематические параметры вращающейся анизотропной жидкости имеют следующий вид:

– параметр расширения: $\Theta = 3\dot{R}/R$,
– ускорение: $A = \dot{R}/bR$,
– параметр вращения: $\omega = 1/2a^2R$,
– сдвиг отсутствует.

3. Космологическая модель с анизотропной жидкостью, газом Чаплыгина и Λ-членом

Рассмотрим ситуацию, когда источниками гравитации являются сопутствующая анизотропная жидкость, идеальная жидкость с уравнением состояния газа Чаплыгина и лямбда-член. Введя обозначения: ρ — плотность сопутствующей анизотропной жидкости, π, σ — её давления, ϵ — плотность газа Чаплыгина, p — его давление, и учтя Λ-член, получим следующий тензор энергии-импульса:

$$T_{ik} = (\rho + \pi)\,u_i u_k - \pi\eta_{ik} + (\varepsilon + p)v_i v_k - p\eta_{ik} + \Lambda\eta_{ik}. \tag{19}$$

Примем $v_i = \{1, 0, 0, 0\}$, а также запишем уравнения состояния идеальной жидкости $\pi = \beta\rho$, $p = -\alpha/\varepsilon$. Тогда уравнения Эйнштейна (3) примут следующий вид:

$$G_{00} = \frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 1)\dot{R}^2 - 8a^4 R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \rho + \varepsilon + \Lambda, \tag{20}$$

$$G_{11} = \frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2} = p + \pi - \Lambda, \tag{21}$$

$$G_{33} = \frac{b^2(4a^2 + 3b^2 - 1) + 4a^4(3 - b^2)\dot{R}^2 - 8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = p + \sigma - \Lambda, \tag{22}$$

$$G_{03} = \frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4bR^2} = 0. \tag{23}$$

Решение уравнений (20)–(23) даёт масштабный фактор

$$R = (b/2a^2H)\,\mathrm{ch}(Ht), \tag{24}$$

и, с учётом уравнений состояния, $\varepsilon = (\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 4\alpha})/2$, где

$$\varsigma = \frac{\beta b^2(3 - b^2 - 4a^2) + b^2(b^2 - 1) + 4a^4(\beta(3b^2 - 1) + b^2 - 1)\dot{R}^2}{4a^4b^2R^2} + \\ + \frac{8a^4(b^2 - 1 - \beta)R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} - \Lambda(\beta + 1). \tag{25}$$

Плотность энергии всегда положительна при условиях

$$b > \sqrt{1+\beta}, \quad a^2 < \frac{1}{4}(3-b^2), \quad \beta < \frac{2H^3(b^2-1)+b^2}{2H^3+\Lambda b^2}. \tag{26}$$

Отметим, что кинематические параметры этой модели аналогичны величинам, рассмотренным в предыдущем случае. При этом вращение затухает, но анизотропная жидкость, в отличие от ситуации, имеющей место в отсутствие газа Чаплыгина, не изотропизируется. Качественное рассмотрение первой стадии инфляции при расширении Вселенной от планковского масштаба до современного размера наблюдаемой Вселенной 10^{28} см, даёт порядок угловой скорости вращения 10^{-11} рад/год.

Литература

1. *Land K., Magueijo J. a.* Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 95. — Pp. 071301–071304. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.071301.
2. *Payez A., Cudell J. R., Hutsemékers D.* New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2012. — Vol. 2012, No 07. — P. 041. — DOI: 10.1088/1475-7516/2012/07/041.
3. *Liddle A. R., Cortes M.* Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 111. — P. 111302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.111302.
4. *Bradley G. M., Sviestins E.* Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow // GRG. — 1984. — Vol. 16, issue 12. — Pp. 1119–1133. — DOI: 10.1007/BF00760236.
5. Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy / E. V. Kuvshinova, V. N. Pavelkin, V. F. Panov, O. V. Sandakova // Gravitation and Cosmology. — 2014. — Vol. 20, issue 2. — Pp. 141–143. — DOI: 10.1134/S0202289314020078.

UDC 530.12:531.551
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398

Bianchi Type VIII Cosmological Models Described with Caplygin Gas Equation of State Fluid Sources

D. M. Yanishevskiy

Department of Higher Mathematics
Perm State University
15, Bukireva str., Perm, 614990, Russian Federation

Within the general theory of relativity the Bianchi type VIII cosmological models with rotation and expansion have been built. It's known that dark energy can be simulated by different kinds of energy-stress tensor, therefore the sources of gravitation in present article are an anisotropic fluid, with a pressure component satisfying to Chaplygin gas equation of state and a perfect fluid in the first case and an anisotropic fluid, Chaplygin gas and cosmological constant in the second case. It has been proved that the model, when expanding from Plank scale to the modern size gives satisfactory value of the angular velocity value. The found solutions can be used for effects taking place nowadays and at the inflationary stage.

Key words and phrases: cosmological expansion, Chaplygin gas, anisotropy of the Universe, accelerated expansion, type VIII Bianchi metric

References

1. K. Land, J. ao Magueijo, Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy, Physical Review Letters 95 (2005) 071301–071304. doi:10.1103/PhysRevLett.95.071301.
2. A. Payez, J. R. Cudell, D. Hutsemékers, New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 2012 (07) (2012) 041. doi:10.1088/1475-7516/2012/07/041.
3. A. R. Liddle, M. Cortes, Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe, Physical Review Letters 111 (2013) 111302. doi:10.1103/PhysRevLett.111.111302.
4. G. M. Bradley, E. Sviestins, Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow, GRG 16 (1984) 1119–1133. doi:10.1007/BF00760236.
5. E. V. Kuvshinova, V. N. Pavelkin, V. F. Panov, O. V. Sandakova, Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy, Gravitation and Cosmology 20 (2014) 141–143. doi:10.1134/S0202289314020078.

Для цитирования:
Янишевский Д. М. Космологические модели типа VIII по Бьянки с жидкостью, описываемой уравнением состояния газа Чаплыгина // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 393–398. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398.

For citation:
Yanishevskiy D. M. Bianchi Type VIII Cosmological Models Described with Caplygin Gas Equation of State Fluid Sources, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (4) (2018) 393–398. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398. In Russian.

Сведения об авторах:
Янишевский Даниил Михайлович — соискатель кафедры высшей математики ПГНИУ (e-mail: `ydm86@yandex.ru`, тел.: +7 (922) 6465325)

Information about the authors:
Yanishevskiy Daniil M. — competitioner of Department of Higher Mathematics, Perm State University (e-mail: `ydm86@yandex.ru`, phone: +7 (922) 6465325)