RUDN Journal of MIPh

Вестник РУДН. Серия МИФ

2018 Vol. 26 No. 2 140–154
http://journals.rudn.ru/miph

УДК 532.51:517.95
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154

Невязкий аналог задачи Пуазейля

А. В. Коптев

Кафедра математики
Институт водного транспорта
Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
ул. Двинская, д. 5/7, г. Санкт-Петербург, Россия, 198035

Рассмотрена плоская задача об установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости в канале между двумя параллельными плоскостями под действием заданного перепада давления. Задача рассматривается в декартовых координатах.

Постановка аналогична известной задаче Пуазейля с той лишь разницей, что вместо вязкой жидкости рассматривается идеальная. В качестве граничных условий на стенках канала задаётся условие непротекания, так что вектор скорости параллелен ограничивающим поверхностям. Перепад давления задаётся, как некоторая положительная величина.

Для решения задачи предложен подход, основанный на использовании первого интеграла уравнений Эйлера при сохранении нелинейных членов. Для случая 2D установившегося движения несжимаемой жидкости представлен вывод определяющих соотношений. Решения уравнений для основных гидродинамических характеристик найдены аналитически в виде разложения по степеням декартовых координат. Для определения коэффициентов разложения при некоторых значениях определяющих параметров использованы стандартные программы пакета Maple.

В результате получены выражения для основных гидродинамических характеристик и исследованы их особенности. В частности, выявлены зоны возвратных движений и зоны интенсивного вихревого движения.

Ключевые слова: установившееся движение, идеальная несжимаемая жидкость, перепад давления, уравнения Эйлера, интеграл, разложение по степеням

1. Введение

Задача о движении жидкости в канале является одной из важных задач теоретической гидромеханики. Эта задача имеет не только теоретическое, но и прикладное значение, так как в основе лежит важный практический вопрос — каков закон движения жидкости в канале при заданных условиях на границах [1–3]. В прикладной гидромеханике движения такого типа получили названия напорных течений. Необходимость рассмотрения такого типа течений возникает при расчётах агрегатов и механизмов на трубопроводном транспорте, в машиностроении, энергетике, гидротехнике. На сегодняшний день многие вопросы, связанные с задачами такого типа, прояснены не до конца и требуют дополнительного изучения. Например, не ясно, по какому закону происходит падение давления вдоль оси канала, каков характер рассеяния энергии потока, при каких условиях одномерное движение разрушается и заменяется на более сложное двумерное с наличием выраженных вихревых зон, каковы закономерности перехода от ламинарного режима движения к турбулентному [4, 5].

Простейшая постановка предполагает рассмотрение плоской задачи и основывается на модели идеальной несжимаемой жидкости, движение которой описывается уравнениями Эйлера. Для случая 2D установившегося движения и в предположении об отсутствии внешних массовых сил, уравнения Эйлера имеют вид [1–3]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 26 февраля 2018 г.

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

где p, u, v обозначают основные неизвестные — давление и компоненты вектора скорости, соответственно продольной и поперечной; ρ есть плотность жидкости, которая в рамках модели несжимаемой среды неизменна и представляет заданный положительный параметр. Каждая из величин p, u, v, является некоторой неизвестной функцией координат x, y. Основная задача состоит в определении этих неизвестных.

Важнейшей особенностью уравнений (1)–(3) является наличие нелинейных членов, которые присутствуют в левых частях первых двух уравнений. Эти члены уравнений создают основные сложности при исследовании и решении. Но именно эти члены являются неотъемлемой частью уравнений Эйлера и должны быть учтены при решении по возможности более строго.

Ранее было обнаружено, что уравнения (1)–(3) допускают простое одномерное решение. Действительно, если предположить, что течение имеет лишь одну ненулевую компоненту скорости вдоль оси OX, тогда

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

В результате получаем $p = \text{const}$ и $u = u_0(y)$. То есть давление не изменяется и профиль продольной скорости, который был во входном сечении канала, будет сохраняться без каких-либо изменений и при движении вдоль всего канала. Решение (4), которое соответствует такому простейшему движению, можно назвать тривиальным.

Однако экспериментальные результаты и простые визуальные наблюдения говорят о том, что, как правило, существуют зоны течения, где движение заведомо не одномерно и $v \neq 0$. Кроме того, в реальных течениях всегда существует некоторый ненулевой перепад давления, который является основной причиной движения.

Все это заставляет вновь обращаться к этой известной задаче теоретической гидромеханики и сосредоточиться на поиске нетривиальных решений, которые соответствуют наблюдаемым на практике заведомо не одномерным движениям.

2. Постановка задачи

Будем считать, что движение жидкости происходит в канале между двумя параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии 2H друг от друга. Выберем систему координат так, что ось OY перпендикулярна ограничивающим поверхностям, а ось OX им параллельна и отстоит от каждой из поверхностей на расстояние H. Ограничимся рассмотрением плоской задачи, считая, что движение одинаково во всех плоскостях, перпендикулярных ограничивающим поверхностям и параллельных оси OX. Считаем, что канал имеет конечную протяжённость вдоль оси OX. Пусть для простоты $-L < x < L$, где величину L полагаем положительной и изначально заданной. Будем считать, что на концах канала при $x = \pm L$ создаётся перепад давления Δp, который и является основной причиной движения.

Таким образом, постановка задачи аналогична известной задаче Пуазейля для движения вязкой жидкости в канале [1–4] с тем лишь различием, что вместо вязкой жидкости в нашем случае рассматривается идеальная и канал представляет не цилиндрическую трубу, как обычно предполагается в задаче Пуазейля, а имеет более простую конфигурацию. Основной вопрос состоит в том, чтобы определить гидродинамические характеристики потока при заданном перепаде давления на концах канала.

В данной работе предлагается подход, основная идея которого состоит в том, чтобы строить решение задачи основываясь не на уравнениях Эйлера (1)–(3) непосредственно, а на основе первого интеграла этих уравнений. Первый интеграл уравнений (1)–(3) есть следствие интеграла уравнений Навье — Стокса, полученного автором для общего случая 3D неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости [6–8] при сохранении нелинейных членов. Для рассматриваемого в данной работе более простого случая $2D$ движения при $\frac{1}{Re} = 0$ и $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ вывод соотношений, представляющих первый интеграл, сводится к следующему.

Преобразуем нелинейные члены уравнений (1)–(2) с учётом известных формул дифференцирования произведения и уравнения неразрывности (3) как

$$\begin{aligned} v\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial uv}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2}, \\ u\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial uv}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{v^2}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

С учётом выражений для нелинейных членов в виде (5) каждое из уравнений системы (1)–(3) представляется в дивергентном виде

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial Q_i}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

где P_i и Q_i есть некоторые комбинации неизвестных.

Уравнение неразрывности (3) изначально имеет вид (6), а для уравнений (1)–(2) нужные представления следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial uv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 + \frac{p}{\rho}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Известно, что решение уравнения неразрывности (3) задаётся выражениями [1–3]

$$u = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \tag{8}$$

где $\Psi_1(x, y)$ представляет функцию тока, хорошо известную в гидромеханике величину.

Аналогично можно построить решение всякого уравнения вида (6). В частности, решения уравнений (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u^2 + \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial y}, \quad uv = -\frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial x}, \\ uv &= \frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial y}, \quad v^2 + \frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial x}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\Psi_{1,2}$ и $\Psi_{1,3}$ представляют некоторые функции переменных x и y.

Обозначения этих функций соответствуют названиям, которые были предложены в [6–8]. В указанных работах эти функции были названы псевдофункциями тока первого порядка с номерами 2 и 3 соответственно.

Из уравнений (9) следуют соотношения

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\left(u^2+v^2\right)}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial x}\right), \quad u^2 - v^2 = \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

Последнее из уравнений (10) представляет уравнение вида (6), и его решение можно представить как

$$\Psi_{1,2} = \frac{\partial \Psi_{2,1}}{\partial y}, \quad \Psi_{1,3} = -\frac{\partial \Psi_{2,1}}{\partial x}, \tag{11}$$

где $\Psi_{2,1}$ есть псевдофункция тока второго порядка с номером 1. Она представляет некоторую функцию переменных x и y. Вводя эту функцию в качестве нового ассоциированного неизвестного и используя для неё более простое обозначение Ψ_2, из (9) получаем определяющие соотношения в виде

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{U^2}{2} - d, \tag{12}$$

$$u^2 - v^2 = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}, \tag{13}$$

$$uv = -\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y}. \tag{14}$$

В уравнениях (12)–(14) p_0 есть аддитивная постоянная давления; $U = \sqrt{u^2+v^2}$ – модуль вектора скорости; Ψ_2 – новое ассоциированное неизвестное, возникающее при интегрировании; величина d в правой части (12) есть приведённая плотность вихревой энергии, вычисляемая по формуле

$$d = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2}\right). \tag{15}$$

Если выполнены (12)–(14), то исходные уравнения Эйлера (1)–(2) также будут удовлетворены. Соотношения (12)–(14) представляют первый интеграл уравнений Эйлера для случая 2D установившегося движения идеальной несжимаемой среды. Уравнения (12)–(14) имеют нулевой порядок производных относительно основных неизвестных u, v, p и значит, решение этих уравнений сводится к более простой математической задаче. Именно уравнения (12)–(14) вместе с уравнением неразрывности (3) возьмём в качестве основных для дальнейшего решения задачи.

Задачу будем рассматривать в безразмерных переменных при следующем выборе масштабов. В нашем случае специфика задачи подсказывает выбрать для координат x и y разные масштабы. В качестве масштаба координаты y возьмём H, в качестве масштаба координаты x – величину L, масштабом продольной скорости выберем величину U_0, а масштабом поперечной скорости – величину kU_0, где $k = \frac{H}{L}$. В качестве масштаба давления полагаем ρU_0^2. Для всех безразмерных величин сохраним те же обозначения, что и для соответствующих им размерным величинам.

С учётом указанного выбора масштабов область течения в нашем случае будет задаваться неравенствами $-1 < x < 1$ и $-1 < y < 1$.

Кроме того, некоторые из определяющих уравнений несколько изменят свой вид. Так с учётом выбора масштабов уравнения (12) и (13) будут иметь вид

$$p - p_0 = -\frac{U^2}{2} - d, \tag{16}$$

$$u^2 - k^2 v^2 = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} - k^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}. \tag{17}$$

По той же причине выражение для модуля скорости примет вид $U = \sqrt{u^2 + k^2 v^2}$, а уравнение (15) должно быть записано как

$$d = -\frac{1}{2}\left(k^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2}\right). \tag{18}$$

Граничные условия зададим следующим образом. На ограничивающих поверхностях считаем выполненными условия непротекания [2–4]. Для нашего случая они сводятся к равенству нулю поперечной составляющей скорости вдоль границ канала при $y = \pm 1$. Таким образом, потребуем выполнения равенств

$$v(x, \pm 1) = 0. \tag{19}$$

Будем считать, что на входе в канал в сечении $x = -1$ скорость имеет только продольную составляющую, тогда как поперечная составляющая равна нулю:

$$v(-1, y) = 0. \tag{20}$$

Считаем также, что на концах канала при $x = \pm 1$ перепад давления задан. Пусть в безразмерных переменных его значение равно величине θ, где θ представляет заданный положительный параметр, $\theta = \Delta p/(\rho U_0^2)$. Тогда данное данное граничное условие задаётся равенством

$$p(-1, y) - p(1, y) = \theta. \tag{21}$$

Таким образом, в рамках рассматриваемой постановки задача сводится к решению уравнений (14), (16)–(17), (3) при трёх граничных условиях (19)–(21). Величины k и θ представляют изначально заданные положительные параметры.

3. Решение определяющих уравнений

В уравнениях (14), (16)–(17) отсутствуют производные основных неизвестных u, v, p. То есть по отношению к этим неизвестных имеем чисто алгебраические уравнения.

Предлагается подход к решению, который был использован автором в работах [9, 10].

На первом этапе зададим общий вид выражений для $u(x, y)$ и $v(x, y)$ так, чтобы заведомо удовлетворить и уравнению неразрывности (3), и граничным условиям (19)–(20). На втором этапе уточним полученные выражения, чтобы удовлетворить уравнениям (14), (17). На последних этапах составим выражение для $p - p_0$ в соответствии с равенством (16) и удовлетворим граничному условию (21). Таким образом, всё последующее решение можно представить, как решение отдельных более простых задач.

3.1. Первый этап

Чтобы изначально удовлетворить уравнению неразрывности (3), введём функцию тока Ψ_1. Тогда для неизвестных u и v справедливы соотношения (8).

Функцию тока зададим в виде разложения по степеням $x^n y^m$, где показатели степеней ограничены неравенством $0 \leqslant n+m \leqslant N$. Таким образом, положим

$$\Psi_1(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N-n} a_{nm} x^n y^m, \tag{22}$$

где a_{nm} представляют некоторые, пока не определённые коэффициенты.

Предварительный анализ показывает, что нетривиальные решения получаются уже, начиная с пятого приближения $N \geqslant 5$. В дальнейшем полагаем $N = 5$ и будем искать неизвестное $\Psi_1(x,y)$ в виде многочлена пятой степени относительно $x^n y^m$.

Без учёта аддитивной постоянной a_{00}, значение которой произвольно, на данном этапе имеем 20 неопределённых коэффициентов. При этом $u(x,y)$ и $v(x,y)$,, вычисленные согласно (8), представляют многочлены четвёртой степени относительно $x^n y^m$, и они заведомо удовлетворяют уравнению неразрывности (3).

3.2. Второй этап

Подберём коэффициенты a_{nm} так, чтобы удовлетворить граничному условию (19). Рассмотрим выражение для поперечной скорости, согласно второму из (8) и с учётом (22). Получаем выражение

$$\begin{gathered} v = -(a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + 3a_{31}x^2y + \\ 2a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + 5a_{50}x^4 + 4a_{41}x^3y + 3a_{32}x^2y^2 + 2a_{23}xy^3 + a_{14}y^4). \end{gathered} \tag{23}$$

Условие (19) требует, чтобы при $y = \pm 1$ поперечная скорость v обратилась бы в нуль. А значит, в рамках рассматриваемого приближения должно быть выполнено

$$v = (1-y^2)(\eta_{00} + \eta_{10}x + \eta_{01}y + \eta_{20}x^2 + \eta_{11}xy + \eta_{02}y^2), \tag{24}$$

где η_{ij} некоторые вспомогательные коэффициенты.

Составляя равенства правых частей (23) и (24), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x^n y^m$, получаем выражения для вспомогательных коэффициентов η_{ij} через основные коэффициенты a_{nm}

$$\eta_{00} = -a_{10}, \quad \eta_{10} = -2a_{20}, \quad \eta_{01} = -a_{11}, \quad \eta_{20} = -3a_{30},$$

$$\eta_{11} = -2a_{21}, \quad \eta_{02} = -a_{12} - a_{10}.$$

Кроме того, в результате указанной процедуры получаются и дополнительные ограничения на коэффициенты a_{nm}

$$a_{40} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{22} = -a_{20}, \quad a_{13} = -a_{11}, \quad a_{23} = -a_{21},$$

$$a_{50} = 0, \quad a_{41} = 0, \quad a_{32} = -a_{30}, \quad a_{14} = -a_{12} - a_{10}. \tag{25}$$

Последние равенства гарантируют выполнимость граничного условия (19).

3.3. Третий этап

Наложим новые ограничения на a_{nm}, чтобы удовлетворить граничному условию (20). Это условие требует, чтобы при $x = -1$ поперечная скорость v была нулевая.

Обратимся к выражению (23) с учётом (25), и положим $x = -1$. В результате получаем

$$v = -((a_{10} - 2a_{20} + 3a_{30}) + y(a_{11} - 2a_{21}) + y^2(a_{12} + 2a_{20} - 3a_{30}) + y^3(a_{13} + 2a_{21}) - y^4(a_{12} + a_{10})).$$

Правая часть обращается в нуль при условии, что все коэффициенты при степенях y^m будут нулевыми. Рассматривая полученные равенства как систему уравнений, получаем три новых ограничения на коэффициенты

$$a_{30} = \frac{1}{3}(2a_{20} - a_{10}), \quad a_{21} = \frac{1}{2}a_{11}, \quad a_{12} = -a_{10}. \tag{26}$$

Таким образом, из двадцати коэффициентов, которые присутствовали в выражениях изначально, уже определено двенадцать. На данном этапе имеем выражения для скоростей, которые удовлетворяют и уравнению неразрывности, и граничным условиям (19)–(20). Эти выражения следующие

$$u = a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y + \frac{1}{2}a_{11}x^2 - 2a_{10}xy + 3a_{03}y^2 - 2a_{20}x^2y - 3a_{11}xy^2 + {} + 4a_{04}y^3 + \frac{2}{3}(a_{10} - 2a_{20})x^3y - \frac{3}{2}a_{11}x^2y^2 + 5a_{05}y^4, \tag{27}$$

$$v = -a_{10} - 2a_{20}x - a_{11}y + (a_{10} - 2a_{20})x^2 - a_{11}xy + a_{10}y^2 + 2a_{20}xy^2 + {} + a_{11}y^3 + (2a_{20} - a_{10})x^2y^2 + a_{11}xy^3. \tag{28}$$

Введём ещё одно предположение. Будем считать, что в правой части выражения (27) для u первое слагаемое равно единице, то есть $a_{01} = 1$. Это предположение соответствует тому, что в размерных единицах первое слагаемое совпадает с величиной U_0, выбранной в качестве масштаба продольной скорости.

3.4. Четвёртый этап

На этом этапе нужно обеспечить выполнимость уравнений (14), (17), которые связывают основные неизвестные u, v и производные ассоциированного неизвестного Ψ_2. Ассоциированное неизвестное $\Psi_2(x, y)$, так же как и функцию тока $\Psi_1(x, y)$, представляем в виде разложения по степеням

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n} b_{nm}x^n y^m, \tag{29}$$

где b_{nm} есть некоторые, пока не определённые коэффициенты. Считаем, что $N = 5$ и ограничиваемся рассмотрением в правой части (29) степеней не выше пятой $0 \leqslant n + m \leqslant 5$.

Неизвестное $\Psi_2(x, y)$ полностью определено, если все коэффициенты b_{nm} будут найдены. Обратимся к уравнениям (14), (17) и найдём разложения всех членов уравнений по степеням $x^n y^m$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x^n y^m$ в левых и правых частях, получаем неоднородные системы уравнений относительно неизвестных b_{nm}. Для $n + m = 2$ и $n + m = 3$ имеем решения только при условии выполнимости условий совместности. Эти условия задаются следующими тремя уравнениями

$$\begin{gathered}6a_{03}a_{10} - 4k^2a_{20} + 2(1+k^2)a_{10} + k^2a_{11}a_{10} = 0,\\ 6a_{03}a_{20} + 2a_{20} - (2-k^2)a_{11}a_{10} - k^2a_{20}a_{11} = 0,\\ 12a_{04}a_{10} + 2(1+k^2)a_{02}a_{10} - 4k^2a_{20}a_{02} + 3a_{03}a_{11} + 3a_{11} - 2k^2a_{20}a_{10} + \frac{k^2}{2}a_{11}^2 = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Если выполнены соотношения (30), то коэффициенты b_{nm} находятся однозначно за исключением b_{20}, который может быть выбран произвольно. Вычисления приводят к следующим выражениям

$$\begin{gathered}b_{02} = k^2b_{20} + \frac{1}{2}\left(1 - k^2a_{10}^2\right), \quad b_{11} = a_{10},\\ b_{30} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k^2}a_{02}a_{10} - \frac{1}{2k^2}a_{11} + 2a_{20}a_{10}\right), \quad b_{21} = a_{20} + \frac{1}{2}a_{11}a_{10},\\ b_{12} = a_{02}a_{10} + \frac{1}{2}a_{11}, \quad b_{03} = \frac{1}{3}\left(2a_{02} - \frac{k^2}{2}a_{11}a_{10} + k^2a_{20}\right),\\ b_{40} = \frac{1}{3}a_{20}^2 + \frac{1}{3}a_{20}a_{10} - \frac{1+2k^2}{12k^2}a_{10}^2 + \frac{1}{6k^2}a_{20}a_{02} - \frac{1}{24k^2}\left(a_{11}^2 + a_{11}\right),\\ b_{31} = \frac{1}{3}\left(2a_{20} + 2a_{20}a_{11} - a_{10} + \frac{1}{2}a_{11}a_{10}\right),\\ b_{22} = \frac{1}{4}\left(4a_{20}a_{02} - 2a_{10}^2 + a_{11} + a_{11}^2\right), \quad b_{13} = \frac{1}{3}\left(2a_{11}a_{02} - a_{10} + 3a_{03}a_{10}\right),\\ b_{04} = \frac{1}{2}\left(a_{03} + \frac{2}{3}a_{02}^2 + \frac{k^2}{3}a_{20}a_{02} + \frac{k^2}{6}a_{10}^2 - \frac{k^2}{12}a_{11}^2 + \frac{k^2}{12}a_{11}\right),\\ b_{50} = \frac{2}{5}a_{20}^2 - \frac{1+2k^2}{10k^2}a_{20}a_{10} + \frac{1}{15k^2}a_{20}a_{02} - \frac{1}{30k^2}a_{02}a_{10} - \frac{1}{40k^2}a_{11}^2,\\ b_{41} = \frac{3}{4}a_{20}a_{11} - \frac{1}{4}a_{11}a_{10}, \quad b_{32} = \frac{2}{3}a_{20}a_{02} - \frac{1}{3}a_{02}a_{10} - a_{20}a_{10} + \frac{1}{4}a_{11}^2,\\ b_{23} = a_{03}a_{20} - a_{11}a_{10} + \frac{1}{3}\left(a_{02}a_{11} - a_{20}\right),\\ b_{14} = a_{04}a_{10} + \frac{3}{4}a_{03}a_{11} - \frac{1}{2}a_{02}a_{10} - \frac{1}{4}a_{11},\\ b_{05} = \frac{k^2}{10}\left(a_{03}a_{20} + a_{11}a_{10}\right) + \frac{1}{5}\left(3a_{03}a_{02} + 2a_{04}\right) + \frac{k^2}{30}\left(a_{02}a_{11} - a_{20}\right).\end{gathered} \tag{31}$$

Выражения (31) полностью определяют неизвестное $\Psi_2(x,y)$ в рассматриваемом приближении. Уравнения (14), (17) также удовлетворены.

3.5. Пятый этап

Осталось удовлетворить граничному условию (21). Рассмотрим правую часть уравнения (16). В правой части присутствуют вторые производные неизвестного Ψ_2, поскольку через них определяется величина d согласно (18). В рассматриваемом приближении неизвестное Ψ_2 определялось с точностью до пятых степеней, а значит, для неизвестного p должны получить разложение с точностью до третьих степеней. То есть неизвестное p будет определено равенством:

$$p = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + \\ + p_{30}x^3 + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3, \quad (32)$$

где p_{00} является произвольно выбираемой аддитивной постоянной давления, а остальные коэффициенты p_{nm} должны быть определены. Рассматривая разложения по степеням для всех членов правой части (16), приходим к следующим выражениям

$$\begin{gathered}
p_{10} = 2a_{02}a_{10} - a_{11}, \quad p_{01} = 2k^2a_{20} - k^2a_{11}a_{10}, \\
p_{20} = 2a_{20}a_{02} - a_{10}^2 - \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{11}^2\right), \\
p_{11} = 2k^2a_{20} + a_{10}\left(1 - k^2 + 3a_{03} - \frac{k^2}{2}a_{11}\right), \\
p_{02} = k^2\left(a_{10}^2 + 2a_{20}a_{02} + \frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{11}^2\right)\right), \\
p_{30} = -\frac{1}{2}a_{11}^2 - 2a_{20}a_{10} + \frac{2}{3}a_{02}\left(2a_{20} - a_{10}\right), \qquad (33) \\
p_{21} = a_{20}\left(1 + 3a_{03} + \frac{k^2}{2}a_{11}\right) - \left(1 + \frac{k^2}{2}\right)a_{11}a_{10}, \\
p_{12} = \frac{3a_{11}}{2}\left(1 + a_{03}\right) + a_{02}a_{10}\left(1 - k^2\right) + 6a_{04}a_{10} + k^2\left(2a_{20}a_{02} + a_{20}a_{10} - \frac{1}{4}a_{11}^2\right), \\
p_{03} = 2k^2\left(a_{11}a_{10} + a_{03}a_{20} + \frac{1}{3}a_{02}a_{11} - \frac{1}{3}a_{20}\right).
\end{gathered}$$

Условие (21) в нашем случае сводится к равенству

$$p_{10} + p_{30} + p_{11}y + p_{12}y^2 = -\frac{\theta}{2}. \qquad (34)$$

Это равенство должно выполняться тождественно при любых $-1 < y < 1$. Для этого необходимо и достаточно

$$p_{10} + p_{30} = -\frac{\theta}{2}, \quad p_{11} = 0, \quad p_{12} = 0. \qquad (35)$$

Выражения (33) позволяют уточнить левые части (35). В результате несложных вычислений приходим к трём уравнениям

$$\begin{gathered}
\frac{4}{3}\left(a_{02}a_{10} + a_{20}a_{02}\right) - a_{11} - 2a_{20}a_{10} - \frac{1}{2}a_{11}^2 = -\frac{\theta}{2}, \\
3a_{03}a_{10} + 2k^2a_{20} - \frac{k^2}{2}a_{11}a_{10} + \left(1 - k^2\right)a_{10} = 0, \qquad (36) \\
6a_{04}a_{10} + a_{02}a_{10} + \frac{3}{2}a_{11}\left(a_{03} + 1\right) + k^2\left(2a_{20}a_{02} + a_{20}a_{10} - a_{02}a_{10} - \frac{1}{4}a_{11}^2\right) = 0.
\end{gathered}$$

Уравнения (36) вместе с уравнениями (30), определяющими условия совместности, представляют дополнительные ограничения на оставшиеся коэффициенты a_{ij}. Если они выполнены, то все уравнения и граничные условия удовлетворены и задача полностью решена.

Уравнения (30), (36) образуют систему шести нелинейных уравнений с шестью неизвестными a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{03}, a_{04}. Для завершения решения задачи осталось разрешить эту систему и найти указанные определяющие коэффициенты. Все остальные интересующие нас величины, включая и основные гидродинамические характеристики $u(x, y)$, $v(x, y)$, $p(x, y)$, могут быть найдены через определяющие коэффициенты по приведённым выше формулам. Для $u(x, y)$, $v(x, y)$ такими формулами являются (27), (28), а для $p(x, y)$ это формулы (32) с учётом (33).

Аналитическое решение системы (30), (36) затруднительно, поэтому решение было реализовано численно с помощью программ стандартного пакета *Maple*.

4. Результаты

Решение было реализовано для случая $\theta = 0{,}1$ и $k = 0{,}5$. Выбранные значения параметров соответствуют случаю сравнительно небольшого перепада давления и относительно малой протяжённости канала, для которого $L = 2H$.

Численное решение системы приводит к следующим результатам. Значения шести определяющих коэффициентов получились как

$$a_{10} = \pm 4{,}113; \quad a_{20} = \mp 28{,}789; \quad a_{11} = -30{,}00;$$

$$a_{02} = \mp 5{,}567; \quad a_{03} = -0{,}333; \quad a_{04} = \pm 2{,}144.$$

Имеем два набора коэффициентов, а значит, имеем два различных решения. Для обоих решений коэффициенты a_{11} и a_{03} совпадают, а значения остальных отличаются знаком.

Ниже представлены таблицы значений основных гидродинамических характеристик, как функции координат x и y, которые соответствуют каждому из этих решений. Структура таблиц следующая. Каждая вертикальная колонка таблицы соответствует определённому значению координаты x, начиная с $x = -0{,}8$. Горизонтальные строки таблиц соответствуют значениям y, начиная с $y = -0{,}9$. Первыми представлены характеристики для решения 1, для которого выбирались верхние знаки коэффициентов a_{ij}. В обозначении характеристик для решения 1 и решения 2 добавляется соответствующий верхний индекс.

Таблица 1

Решение 1: Профиль продольной скорости $u^{(1)}(x, y)$

$y \setminus x$	$-0{,}8$	$-0{,}4$	$0{,}0$	$0{,}4$	$0{,}8$
$-0{,}9$	$-36{,}77$	$-18{,}65$	$3{,}96$	$16{,}85$	$5{,}81$
$-0{,}6$	$-9{,}11$	$-1{,}22$	$5{,}47$	$1{,}49$	$-22{,}64$
$-0{,}3$	$7{,}82$	$8{,}07$	$4{,}02$	$-9{,}06$	$-35{,}91$
$0{,}0$	$15{,}40$	$10{,}60$	$1{,}00$	$-13{,}40$	$-32{,}60$
$0{,}3$	$15{,}03$	$7{,}77$	$-2{,}20$	$-10{,}14$	$-11{,}33$
$0{,}6$	$8{,}08$	$0{,}97$	$-4{,}19$	$2{,}10$	$29{,}30$
$0{,}9$	$-4{,}04$	$-8{,}42$	$-3{,}58$	$24{,}71$	$90{,}66$

Таблица 2

Решение 1: Профиль поперечной скорости $v^{(1)}(x, y)$

$y \setminus x$	−0,8	−0,4	0,0	0,4	0,8
−0,9	−3,06	−6,36	−5,91	−1,71	6,24
−0,6	−9,15	−17,97	−14,15	2,30	31,38
−0,3	−11,37	−20,63	−11,93	14,73	59,36
0,0	−10,69	−17,28	−4,11	28,79	81,43
0,3	−8,09	−10,81	4,45	37,66	88,85
0,6	−4,54	−4,14	8,88	34,55	72,85
0,9	−1,01	−0,20	4,35	12,65	24,71

Таблица 3

Решение 1: Давление $p^{(1)}(x, y) - p_0$, как функция координат

$y \setminus x$	−0,8	−0,4	0,0	0,4	0,8
−0,9	−244,63	−74,21	−22,96	−84,82	−253,76
−0,6	−190,41	−55,52	−16,11	−66,13	−199,54
−0,3	−134,06	−34,71	−7,15	−45,33	−143,20
0,0	−79,53	−15,72	0,00	−26,33	−88,67
0,3	−30,74	−2,46	1,41	−13,08	−39,88
0,6	8,37	1,12	−6,85	−9,49	−0,76
0,9	33,89	−8,90	−28,71	−19,51	24,76

Таблица 4

Решение 2: Профиль продольной скорости $u^{(2)}(x, y)$

$y \setminus x$	−0,8	−0,4	0,0	0,4	0,8
−0,9	−4,04	−8,42	−3,58	24,71	90,66
−0,6	8,08	0,97	−4,19	2,10	29,30
−0,3	15,03	7,77	−2,20	−10,14	−11,33
0,0	15,40	10,60	1,00	−13,40	−32,60
0,3	7,82	8,07	4,02	−9,06	−35,91
0,6	−9,11	−1,22	5,47	1,49	−22,64
0,9	−36,77	−18,65	3,96	16,85	5,81

Таблица 5

Решение 2: Профиль поперечной скорости $v^{(2)}(x,y)$

$y \setminus x$	−0,8	−0,4	0,0	0,4	0,8
−0,9	1,01	0,20	−4,35	−12,65	−24,71
−0,6	4,54	4,14	−8,88	−34,55	−72,85
−0,3	8,09	10,81	−4,45	−37,66	−88,85
0,0	10,69	17,28	4,11	−28,79	−81,43
0,3	11,37	20,63	11,93	−14,73	−59,36
0,6	9,15	17,97	14,15	−2,30	−31,38
0,9	3,06	6,36	5,91	1,71	−6,24

Таблица 6

Решение 2: Давление $p^{(2)}(x,y) - p_0$, как функция координат

$y \setminus x$	−0,8	−0,4	0,0	0,4	0,8
−0,9	33,89	−8,90	−28,71	−19,51	24,76
−0,6	8,37	1,12	−6,85	−9,49	−0,76
−0,3	−30,74	−2,46	1,41	−13,08	−39,88
0,0	−79,53	−15,72	0,00	−26,33	−88,67
0,3	−134,06	−34,71	−7,15	−45,33	−143,20
0,6	−190,41	−55,52	−16,11	−66,13	−199,54
0,9	−244,63	−74,21	−22,96	−84,82	−253,76

5. Анализ результатов

Представленные решения, как функции переменных x и y, обладают симметрией. При переходе от одного решения к другому и при одновременной замене y на $-y$, продольная скорость и давление не изменятся, тогда как поперечная скорость изменяет знак на противоположный

$$u^{(1)}(x,-y) = u^{(2)}(x,y), \quad p^{(1)}(x,-y) = p^{(2)}(x,y), \quad v^{(1)}(x,-y) = -v^{(2)}(x,y).$$

Например, для $x = -0{,}4$ и $y = \pm 0{,}6$ по табл. 1 находим значение продольной скорости для первого решения $u^{(1)}(-0{,}4; 0{,}6) = 0{,}97$. По табл. 4 для второго решения с противоположным знаком координаты y определяем $u^{(2)}(-0{,}4; -0{,}6) = 0{,}97$. Имеем совпадающие значения $u^{(1)}(-0{,}4; 0{,}6) = u^{(2)}(-0{,}4; -0{,}6)$. Для поперечной скорости для первого решения по табл. 2 находим $v^{(1)}(-0{,}4; 0{,}6) = -4{,}14$, тогда как для второго решения по табл. 5 получаем $v^{(2)}(-0{,}4; -0{,}6) = 4{,}14$. Указанные значения отличаются знаком. Для давления в случае первого решения из табл. 3 находим $p^{(1)}(-0{,}4; 0{,}6) - p_0 = 1{,}12$, тогда как для второго решения из табл. 6 получаем такое же значение $p^{(2)}(-0{,}4; -0{,}6) - p_0 = 1{,}12$.

Таким образом, оба решения в некотором смысле симметричны по отношению друг к другу и для выявления качественных особенностей достаточно проанализировать одно из них, например первое, которое представлено табл. 1, 2, 3.

Рассмотрим значения продольной скорости $u^{(1)}(x;y)$ по табл. 1. Основным направлением движения является движение слева направо. При движении в этом направлении продольная скорость положительна, а при движении в обратном – отрицательна. Из табл. 1 следует, что положительное направление движения имеет основная масса жидкости, сосредоточенной в области $-0{,}3 < y < 0{,}6$. И лишь в области вблизи границ $y \pm 1$ продольная скорость отрицательна и движение происходит в обратном направлении. Однако при $x > 0$ направление движения изменяется. В области, прилегающей к центральной линии $y = 0$, движение происходит в обратном направлении, тогда как в области, прилегающей к границам $y \pm 1$, движение происходит в основном направлении при положительной продольной скорости. Получается, что при движении вдоль всего канала $-1 < x < 1$ существуют значительные области движения в обоих направлениях. Обнаруживаются довольно интенсивные возвратные движения, и основное направление движения теряется.

Рассмотрим значения поперечной скорости $v^{(1)}(x;y)$ по табл. 2. При этом не забудем, что масштабы поперечной и продольной скоростей отличаются в k раз. В нашем случае $k = 0{,}5$ и для того, чтобы сравнение поперечной и продольной скоростей было адекватным, нужно все значения табл. 2 умножать на 0,5. С учётом этого заключаем, что по модулю поперечная скорость меньше продольной, но она ненулевая. Движение во всей области значительно отличается от одномерного. Расчёты показывают, что одномерное движение имело бы место только в случае $\theta = 0$. Для этого случая система (30), (36) имела бы решения $a_{10} = a_{20} = a_{11} = 0$, и основные гидродинамические характеристики совпадали бы с (4). Однако для нашего случая $\theta = 0{,}1$, и даже это сравнительно небольшое отличие параметра θ от нуля исключает наличие одномерного движения. Так что в рамках рассматриваемой постановки движение двумерно. Кроме того, из табл. 2 следует, что существуют значительные области, как с положительными, так и с отрицательными значениями продольной скорости $v(x;y)$. Значит, имеются зоны с интенсивными вихревыми движениями.

Значения, приведённые в табл. 3, подтверждают отмеченные выше закономерности. Из табл. 3 следует, что если говорить об области течения в целом, то величина $p(x;y) - p_0$ изменяется как по знаку, так и значительно изменяется по абсолютной величине. Этот факт соответствует наличию и интенсивных возвратных течений, и интенсивных вихревых движений.

Литература

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Часть 2. — Наука, 1970. — 568 с.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. — Физматлит, 1963. — 584 с.
3. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. — ЛГУ им. А. А. Жданова, 1978. — 295 с.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — Наука, 2003. — 846 с.
5. *Lodyzhenskaya O. A.* The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid. — Gordon and Breach, 1969. — 288 p.
6. *Koptev A. V.* Structure of Solution of the Navier — Stokes Equations // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. — 2014. — Т. 6, № 3.
7. *Коптев А. В.* Первый интеграл уравнений движения несжимаемой жидкости // Материалы 11-го Всероссийского Съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник доклвдов. Казань. — 2015. — 4480 с.
8. *Koptev A. V.* Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern // Handbook on Navier — Stokes Equations: Theory and Applied Analysis / Ed. by D. Campos. — New York, 2017. — 489 p.

9. *Koptev A. V.* Nonlinear Effects in Poiseuille Problem // Journal of Siberian Federal University, Math.and Phys. — 2013. — Vol. 6, No 3.
10. *Коптев А. В.* Теоретическое исследование обтекания цилиндра потоком идеальной несжимаемой среды при наличии экранирующего эффекта // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. — 2016. — Т. 36, № 2.

UDC 532.51:517.95
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154

An Inviscid Analogue of the Poiseuille Problem

A. V. Koptev

Mathematical Department
Institute of Water Way Transport
Admiral Makarov State University of maritime and inland shipping
5/7 Dvinskaya St., Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation

We consider a plane problem of steady-state motion of an ideal incompressible fluid flow in a channel between two parallel planes under the action of a given pressure drop. The problem is considered in Cartesian coordinates.

The formulation is analogous to the well-known Poiseuille problem with the difference that an ideal fluid is considered instead of a viscous one. The non-flow condition is set as the boundary ones on the channel walls. So, that the velocity vector is parallel to the bounding surfaces over the channel walls. The pressure drop is set as a given positive quantity.

An approach proposed based on the use of the first integral of the Euler equations while preserving nonlinear terms. We represent the derivation of main relations for the case of 2D steady-state motion of an incompressible fluid. The solution of equations for hydrodynamic characteristics in the form of expansions in powers of the Cartesian coordinates was found out by analytical way. The standard programs of Maple package are used to determine the coefficients of decomposition for some values of defining parameters.

As a result expressions for hydrodynamic characteristics are obtained and their features investigated. In particular, zones of recurrent motions and zones of intense vortex motion of fluid were revealed.

Key words and phrases: steady-state motion, ideal incompressible fluid, pressure drop, Euler equations, integral, expansion in powers

References

1. L. I. Sedov, Continuum Mechanics. Part 2, Nauka, 1970, in Russian.
2. N. E. Kochin, I. A. Kibel, N. B. Rose, Theoretical Hydromechanics. Part 1, Fismatlit, 1963, in Russian.
3. S. V. Vallander, Lectures on Hydroaeromechanics, LGU im. A. A. Zhdanova, 1978, in Russian.
4. L. G. Loitsyanskiy, Mechanics of Fluid and Gas, Nauka, 2003, in Russian.
5. O. A. Lodyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid, Gordon and Breach, 1969.
6. A. V. Koptev, Structure of Solution of the Navier — Stokes Equations, Bulletin of the National Research Nuclear University MEPI 6 (3).
7. A. V. Koptev, First Integral of Motion of an Incompressible Fluid, 2015, in Russian.
8. A. V. Koptev, Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern, New York, 2017.
9. A. V. Koptev, Nonlinear Effects in Poiseuille Problem, Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys. 6 (3).

10. A. V. Koptev, Theoretical Research of the Flow around Cylinder of an Ideal Incompressible Medium in the Presence of a Shielding Effect, Bulletin of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping 36 (2), in Russian.

Для цитирования:
Коптев А. В. Невязкий аналог задачи Пуазейля // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 140–154. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154.

For citation:
Koptev A. V. An Inviscid Analogue of the Poiseuille Problem, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 140–154. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154. In Russian.

Сведения об авторах:
Коптев Александр Владимирович — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Института водного транспорта Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова (e-mail: Alex.Koptev@mail.ru, тел.: +7 (921)3524901)

Information about the authors:
Koptev A. V. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Mathematical Department of Institute of Water Way Transport of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping (e-mail: Alex.Koptev@mail.ru, phone: +7 (921)3524901)