RUDN Journal of MIPh
Вестник РУДН. Серия МИФ
2018 Vol. 26 No. 2 103–118
http://journals.rudn.ru/miph

Математика

УДК 517.95
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118

Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой

И. В. Тихонов[*], **Ву Нгуен Шон Тунг**[†]
[*] *Кафедра математической физики*
МГУ имени М. В. Ломоносова
Ленинские горы, ГСП–1, Москва, Россия, 119991
[†] *Кафедра математического анализа*
Московский педагогический государственный университет
ул. Краснопрудная, д. 14, Москва, Россия, 107140

Для эволюционного уравнения в банаховом пространстве изучается линейная обратная задача о нахождении «источника». Требуется восстановить неизвестное неоднородное слагаемое при помощи дополнительного нелокального условия, выраженного в виде интеграла Римана–Стильтьеса. Основное предположение связано с суперустойчивостью (квазинильпотентностью) эволюционной полугруппы. Точнее, предполагается, что эволюционная полугруппа, ассоциированная с абстрактным дифференциальным уравнением, имеет бесконечный отрицательный экспоненциальный тип. Без других ограничений установлена теорема об однозначной разрешимости обратной задачи. Показано, что решение представимо сходящимся рядом Неймана. Предъявлены точные условия, при которых бесконечный ряд обращается в конечную сумму. Здесь алгоритм вычисления решения становится финитным. Разобраны модельные примеры, в том числе — важный пример обратной задачи с финальным переопределением. Перечисленные результаты могут найти применение в специальных разделах математической физики, связанных с теорией упругости и задачами линейного переноса. Как принято, наше исследование проходит «в случае общего положения» — при выборе комплексного поля скаляров, но основные факты справедливы также и в вещественном случае. Созданная теория допускает перенос на нелокальные задачи для эволюционных уравнений, когда для нахождения решения вместо традиционного начального условия используют специальные усреднения по времени.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, обратная задача, суперустойчивая полугруппа, операторное уравнение, ряд Неймана, теорема существования и единственности решения

1. Введение

В банаховом пространстве E при фиксированном значении $T > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения специального вида:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что A — линейный замкнутый оператор в E с плотной областью определения $D(A) \subset E$, причём A порождает в E полугруппу $U(t)$ класса C_0 (подробнее см. [1–5]). Элемент u_0 задан в $D(A)$. Скалярная функция $\varphi(t) \not\equiv 0$ непрерывна на отрезке $[0, T]$. Считаем также, что $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, т. е. $\varphi \in BV[0, T]$.

Статья поступила в редакцию 12 января 2018 г.

Тогда при любом выборе элемента $g \in E$ стандартная формула

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s)\varphi(s)g\,\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

даёт классическое решение задачи (1), такое, что $u \in C^1([0,T];E)$ и $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0,T]$ (см. [6]). Формула (2) однозначно восстанавливает нужное решение: иные решения, отличные от (2), в задаче Коши (1) отсутствуют (см. [4, с. 105–106]).

Допустим теперь, что элемент $g \in E$ неизвестен. Для его нахождения добавим к (1) специальное *нелокальное условие* (переопределение) вида

$$\int\limits_0^T u(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = u_1. \tag{3}$$

Элемент u_1 задан в $D(A)$. Интеграл в условии (3) есть стандартный векторный интеграл Римана–Стильтьеса (см. [1, гл. III]). Скалярная функция $\mu \in BV[0,T]$ предполагается непрерывной справа в любой точке $t \in [0,T)$ и отличной от тождественной константы на $[0,T]$. В частности, всегда

$$\mu(0) = \mu(0+) \equiv \lim_{t\to 0+} \mu(t). \tag{4}$$

Отсутствие скачка у функции $\mu(t)$ при $t = 0$ не есть ограничение общности, поскольку такой (возможный) скачок можно легко убрать из (3) с помощью заданного начального условия $u(0) = u_0$.

Итак, требуется подобрать элемент $g \in E$, при котором векторная функция $u(t)$ из формулы (2) удовлетворяет дополнительному условию (3). Поставленная задача (1), (3) для нахождения пары $(u(t), g)$ называется *линейной обратной задачей* (с нелокальным условием). Общая теория подобных обратных задач была разработана в [6, 7] в рамках известного направления [8]. Наше настоящее исследование (кратко изложенное в заметке [9]) проходит при дополнительном предположении, что полугруппа $U(t)$, порождённая оператором A, является квазинильпотентной или суперустойчивой. Этот вырожденный класс специальных полугрупп привлёк внимание специалистов в последние десятилетия [10–15].

2. Квазинильпотентные операторы и полугруппы

Напомним нужные сведения из спектральной теории [1, 2]. Исходную норму в пространстве E обозначим через $\|\cdot\|$, а единичный оператор — через I. Как известно, линейный ограниченный оператор $B\colon E \to E$ называют *квазинильпотентным* или *вольтерровым*, если его спектральный радиус равен нулю:

$$r(B) \equiv \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\|B^k\|} = 0. \tag{5}$$

Соотношение (5) эквивалентно тому, что $\sigma(B) = \{0\}$, т. е. спектр квазинильпотентного оператора B состоит лишь из нуля. При этом резольвентный ряд

$$(\lambda I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}}\, B^n \tag{6}$$

сходится по операторной норме всюду на множестве $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Использование разложений типа (6) без всяких ограничений на значение $\lambda \neq 0$ составляет главное преимущество квазинильпотентных операторов.

При проверке квазинильпотентности непосредственное обращение к формуле (5) часто бывает затруднительным из-за сложной структуры изучаемого оператора B. Здесь может пригодиться такой критерий (ср. с [16, с. 14–16]).

Лемма 1. *Пусть $B\colon E \to E$ — линейный ограниченный оператор. Следующие утверждения эквивалентны*

1) оператор B квазинильпотентен;

2) для $\forall \varepsilon > 0$ существует эквивалентная норма $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ в E, такая, что

$$\|B\|_{(\varepsilon)} \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть B квазинильпотентен, т. е. $r(B) = 0$. При любом фиксированном выборе $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\|\varepsilon^{-k}B^k\|} = \lim_{k\to+\infty} \varepsilon^{-1} \sqrt[k]{\|B^k\|} = \varepsilon^{-1}\, r(B) = 0.$$

В частности, последовательность $\|\varepsilon^{-k}B^k\|$ будет заведомо ограниченной, и найдётся число $M > 0$, такое, что $\|\varepsilon^{-k}B^k\| \leqslant M$ при всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Положим теперь

$$\|f\|_{(\varepsilon)} \equiv \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\varepsilon^{-k}B^k f\|, \quad f \in E. \tag{8}$$

Свойства нормы для (8) проверяются непосредственно. Поскольку

$$\|f\| = \big\|\varepsilon^{-k}B^k f\big\|\,\big|_{k=0} \leqslant \|f\|_{(\varepsilon)} \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\varepsilon^{-k}B^k\|\|f\| \leqslant M\|f\|, \quad f \in E,$$

то норма (8) эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|$. При этом

$$\begin{aligned}\|Bf\|_{(\varepsilon)} = \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\varepsilon^{-k}B^{k+1}f\| = \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \varepsilon\, \|\varepsilon^{-(k+1)}B^{k+1}f\| = \\ = \varepsilon \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\varepsilon^{-m}B^m f\| \leqslant \varepsilon \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\varepsilon^{-m}B^m f\| = \varepsilon\, \|f\|_{(\varepsilon)}, \quad f \in E,\end{aligned}$$

т. е. для нормы (8) выполнена требуемая оценка (7). Итак, из 1) следует 2).

Обратная импликация почти очевидна. Действительно, пусть выполнено 2). В силу оценки (7) спектр $\sigma(B)$ принадлежит множеству $D_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$. Поскольку значение $\varepsilon > 0$ является произвольным, то $\sigma(B) = \{0\}$. Тем самым оператор B квазинильпотентен. В результате 1) и 2) эквивалентны. Лемма доказана. □

Более тонкие обстоятельства, связанные с квазинильпотентными операторами, для нас сейчас несущественны. Для полноты картины отметим два сравнительно недавних исследования по теме [17, 18], а также ряд работ [19–21], где указаны специальные условия, при которых обобщённые интегральные операторы являются квазинильпотентными.

Перейдём к полугруппам. Напомним, что *экспоненциальным типом* операторной полугруппы $U(t)$ класса C_0 называется величина

$$\omega_0 \equiv \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|U(t)\|}{t}.$$

Указанный предел заведомо существует со значением в промежутке $[-\infty, +\infty)$.

В случае, когда $\omega_0 = -\infty$, полугруппа $U(t)$ называется *квазинильпотентной* или ещё *суперустойчивой*. Мы будем использовать в основном второй термин, говоря именно про «суперустойчивость» полугруппы по аналогии с английским "superstability", принятым в современной западной литературе (см. [10–15]). Данное название вполне оправдано, поскольку требование $\omega_0 = -\infty$ эквивалентно тому, что при любом выборе числа $\alpha > 0$ найдётся константа $M = M_\alpha \geqslant 1$, для которой

$$\|U(t)\| \leqslant Me^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Оценка (9) допускает дополнительную коррекцию при подходящем изменении нормы.

Лемма 2. *Пусть $U(t)$ — суперустойчивая полугруппа класса C_0. Тогда при любом выборе числа $\alpha > 0$ найдётся эквивалентная норма $\|\cdot\|_\alpha$ в пространстве E, такая, что*

$$\|U(t)\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся известным приёмом [1, с. 376]. Зафиксируем число $\alpha > 0$ и запишем оценку (9) с соответствующей константой $M = M_\alpha \geqslant 1$. Положим

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\tau \geqslant 0} \|e^{\alpha\tau} U(\tau) f\|, \quad f \in E. \tag{11}$$

Учитывая (9), получаем, что $\|f\| \leqslant \|f\|_\alpha \leqslant M\|f\|$ для любого $f \in E$. Свойства нормы для $\|\cdot\|_\alpha$ проверяются непосредственно. Итак, формула (11) действительно корректно определяет эквивалентную норму в E. Кроме того, если $t \geqslant 0$, то

$$\|U(t)f\|_\alpha = \sup_{\tau \geqslant 0} \|e^{\alpha\tau} U(\tau + t) f\| = \sup_{\tau \geqslant 0} e^{-\alpha t} \|e^{\alpha(\tau+t)} U(\tau + t) f\| =$$
$$= e^{-\alpha t} \sup_{s \geqslant t} \|e^{\alpha s} U(s) f\| \leqslant e^{-\alpha t} \sup_{s \geqslant 0} \|e^{\alpha s} U(s) f\| = e^{-\alpha t} \|f\|_\alpha, \quad f \in E,$$

откуда и следует нужная оценка (10). Лемма доказана. □

Суперустойчивая полугруппа $U(t)$ называется также квазинильпотентной, поскольку все её операторы $U(t)$, взятые при $t > 0$, являются квазинильпотентными в пространстве E. При этом спектр $\sigma(A)$ порождающего оператора A будет пустым, а резольвентное множество $\rho(A)$ заполнит всю комплексную плоскость. В частности, заведомо существует ограниченный обратный оператор $A^{-1}\colon E \to E$, что несколько упрощает формулы при изучении поставленной задачи (1), (3) (см. [6]).

Особым примером суперустойчивой (квазинильпотентной) полугруппы $U(t)$ служит *нильпотентная полугруппа*, когда

$$U(t) = 0, \quad \forall t \geqslant t_0 > 0, \tag{12}$$

с некоторым фиксированным значением $t_0 > 0$. Нильпотентные полугруппы естественно возникают при рассмотрении процессов простого переноса в той или иной ограниченной области (см. [1, с. 552] или [5, с. 363–364]).

3. Формулировка основных результатов

Вернёмся к рассмотрению обратной задачи (1), (3). Из теории, развитой в [6], следует такое утверждение (см. [6, с. 112]).

Теорема 1. *Пусть линейный замкнутый оператор A порождает суперустойчивую полугруппу $U(t)$ класса C_0. Пусть $\varphi \in C[0,T] \cap BV[0,T]$ и $\mu \in BV[0,T]$ с выполненным условием* (4)*. Пусть также*

$$\beta \equiv \int_0^T \varphi(t)\, \mathrm{d}\mu(t) \neq 0. \tag{13}$$

Тогда обратная задача (1), (3) *имеет и притом единственное решение $(u(t), g)$ при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$.*

Метод доказательства теоремы 1, предложенный в [6], носил неконструктивный характер и базировался на теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, точнее, на специальной версии этой теории, разработанной в трактате [1] для описания спектров интегралов от полугрупп. Дополнительный анализ показывает, что можно избежать обращения к таким сложным концепциям и получить теорему 1 элементарным конструктивным методом.

В предположениях теоремы 1 рассмотрим операторное уравнение на неизвестный элемент $g \in E$. Согласно схеме [6] уравнение допускает запись

$$\beta g - Bg = f \tag{14}$$

со значением $\beta \neq 0$ из формулы (13), линейным ограниченным оператором

$$B = \int_0^T \varphi(0) U(t)\, \mathrm{d}\mu(t) + \int_0^T \mathrm{d}\mu(t) \int_0^t U(t-s)\, \mathrm{d}\varphi(s) \tag{15}$$

и заданным элементом $f \in E$ вида

$$f = A \left(\int_0^T U(t) u_0\, \mathrm{d}\mu(t) - u_1 \right). \tag{16}$$

Здесь и в дальнейшем все операторные интегралы типа (15) понимаются в сильной операторной топологии — со сходимостью на произвольном элементе $h \in E$. Используя структуру выражения (15) и экспоненциальную оценку (10) с подходящим выбором значения $\alpha > 0$, можно оценить оператор B в эквивалентной норме (11) и показать его квазинильпотентность. Наша цель — установить прямым методом следующий принципиальный факт.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда оператор B из формулы* (15) *является квазинильпотентным в пространстве E. При этом решение однозначно разрешимого операторного уравнения* (14) *со значением $\beta \neq 0$ представимо рядом Неймана*

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}}\, B^k f, \tag{17}$$

сходящимся по норме пространства E. Если элемент $f \in E$ взят в виде (16)*, а комплексное число $\beta \neq 0$ — в виде* (13)*, то элемент g из формулы* (17) *даёт второй компонент решения $(u(t), g)$ поставленной обратной задачи* (1), (3)*. При этом первый компонент решения — функция $u(t)$ — выражается формулой* (2)*.*

Теорема 2 есть главный результат нашей работы. Она обосновывает итерационный алгоритм для поиска решения обратной задачи (1), (3) при помощи ряда Неймана (17). Алгоритм приобретает законченный вид в специальном случае нильпотентной полугруппы $U(t)$. Тогда, при некоторых дополнительных ограничениях на функции $\varphi(t), \mu(t)$, можно доказать такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Пусть, дополнительно, полугруппа $U(t)$ является нильпотентной, удовлетворяя соотношению* (12) *с фиксированным значением $t_0 > 0$. Предположим также, что функция $\mu(t)$ является постоянной на некотором промежутке $[0, a] \subset [0, T)$, а функция $\varphi(t)$ является постоянной на некотором промежутке $[T - b, T] \subset (0, T]$, причём*

$$a + b > T. \tag{18}$$

Тогда оператор B из формулы (15) *является нильпотентным и*

$$B^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant \frac{t_0}{a + b - T}. \tag{19}$$

Соответственно, решение операторного уравнения (14) *представимо в виде конечной суммы*

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \qquad N_0 \equiv \left\lceil \frac{t_0}{a + b - T} \right\rceil - 1, \tag{20}$$

замещающей бесконечный ряд Неймана (17).

Здесь через $\lceil c \rceil$ обозначен *потолок* числа $c \in \mathbb{R}$, т. е. наименьшее целое число, большее или равное c (см. [22, с. 88]). Теоремы 2 и 3 различны по характеру, и доказывать их удобно раздельно.

4. Доказательство основной теоремы 2

По поводу теории интеграла Стильтьеса см. [1,23]. Без всяких пояснений используем стандартные оценки типа

$$\left\| \int_0^T v(t)\, \mathrm{d}\mu(t) \right\| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(t)\| \cdot \mathrm{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^T,$$

верные при любом выборе $v \in C([0, T], E)$ и $\mu \in BV[0, T]$. Особо отметим следующий полезный факт.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in C[0, T] \cap BV[0, T]$. Тогда для любого заданного числа $\delta > 0$ можно подобрать такое значение $\tau = \tau(\varphi, \delta) > 0$, что при всех $t_1, t_2 \in [0, T]$, удовлетворяющих условию $0 < t_2 - t_1 \leqslant \tau$, выполняется соотношение*

$$\mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_{t_1}^{t_2} \leqslant \frac{\delta}{2}. \tag{21}$$

Доказательство. Определим функцию

$$\psi(t) \equiv \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_0^t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

монотонно возрастающую на $[0,T]$. Поскольку по условию $\varphi \in C[0,T] \cap BV[0,T]$, то также и $\psi \in C[0,T] \cap BV[0,T]$ (см. [23, с. 210]). По теореме Кантора функция $\psi(t)$ будет равномерно непрерывной на $[0,T]$, т. е. для любого $\delta > 0$ найдётся такое значение $\tau > 0$, что при всех $t_1, t_2 \in [0,T]$, удовлетворяющих условию $0 < t_2 - t_1 \leqslant \tau$, выполнено соотношение

$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| = \psi(t_2) - \psi(t_1) = \operatorname{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_{t_1}^{t_2} \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Но это и утверждается в (21). Лемма доказана. □

Оценим теперь отдельные слагаемые в основном операторе B из формулы (15). Все предположения теоремы 1, а, значит, и теоремы 2, относительно полугруппы $U(t)$ и функций $\varphi(t)$, $\mu(t)$ считаем выполненными. Напомним, что операторные интегралы рассматриваются (и оцениваются) в сильной операторной топологии — на произвольном элементе $h \in E$, который для краткости исключаем из записей.

Лемма 4. *Пусть оператор B_1 определён формулой*

$$B_1 = \int_0^T U(t)\,\mathrm{d}\mu(t). \tag{22}$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдётся такое $\alpha_1 > 0$, что при всех $\alpha > \alpha_1$ верна оценка

$$\|B_1\|_\alpha < \delta. \tag{23}$$

Здесь $\|\cdot\|_\alpha$ — эквивалентная норма, заданная в пространстве E по формуле (11).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. В силу предположения (4) найдётся такое $\gamma \in (0,T]$, что

$$\operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^\gamma < \frac{\delta}{2}. \tag{24}$$

При этом, если $\gamma = T$, то оценка (23) выполняется при любом значении $\alpha > 0$, так как, согласно (10), имеем

$$\|B_1\|_\alpha \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T} e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^T = \operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^\gamma < \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Итак, при $\gamma = T$ значение $\alpha_1 > 0$ можно выбирать произвольно.

Если же $\gamma \in (0,T)$, запишем оператор B_1 в виде

$$B_1 = \int_0^\gamma U(t)\,\mathrm{d}\mu(t) + \int_\gamma^T U(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_0^\gamma U(t)\,\mathrm{d}\mu(t) + U(\gamma)\int_\gamma^T U(t-\gamma)\,\mathrm{d}\mu(t). \tag{25}$$

Оценивая (25) с учётом (10) и (24), получаем

$$\|B_1\|_\alpha \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant \gamma} e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^\gamma + e^{-\alpha\gamma} \cdot \max_{\gamma\leqslant t\leqslant T} e^{-\alpha(t-\gamma)} \cdot \operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_\gamma^T =$$
$$= \operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^\gamma + e^{-\alpha\gamma} \cdot \operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_\gamma^T < \frac{\delta}{2} + e^{-\alpha\gamma} \cdot \operatorname{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^T. \tag{26}$$

Выберем теперь $\alpha_1 > 0$ так, чтобы при всех $\alpha > \alpha_1$ действовало соотношение

$$e^{-\alpha\gamma} \cdot \mathrm{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^T < \frac{\delta}{2}. \tag{27}$$

Комбинируя (26) и (27), получаем нужную оценку (23). Лемма доказана. □

Для оценки второго слагаемого в операторе (15) требуется следующий предварительный результат.

Лемма 5. *Пусть операторная функция $F(t)$ определена формулой*

$$F(t) = \int\limits_0^t U(t-s)\,\mathrm{d}\varphi(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{28}$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдётся такое $\alpha_2 > 0$, что при всех $\alpha > \alpha_2$ верна оценка

$$\|F(t)\|_\alpha < \delta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{29}$$

Здесь $\|\cdot\|_\alpha$ — эквивалентная норма, заданная в пространстве E по формуле (11).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Выберем значение $\tau > 0$ как в лемме 3, чтобы соотношение (21) выполнялось при всех $t_1, t_2 \in [0, T]$, удовлетворяющих условию $0 < t_2 - t_1 \leqslant \tau$. При $\alpha > 0$ и $0 \leqslant t \leqslant \tau$, используя (10) и (21), получаем

$$\|F(t)\|_\alpha \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant t} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_0^t = \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_0^t \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Тем самым оценка (29) выполнена при любом $\alpha > 0$ и $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Возможно, конечно, что $\tau = T$, и тогда все доказано с произвольным выбором значения $\alpha_2 > 0$.

При $0 < \tau < T$ и $\tau < t \leqslant T$ перепишем $F(t)$ в виде

$$F(t) = \int\limits_0^{t-\tau} U(t-s)\,\mathrm{d}\varphi(s) + \int\limits_{t-\tau}^{t} U(t-s)\,\mathrm{d}\varphi(s), \quad \tau < t \leqslant T. \tag{30}$$

Пусть снова $\alpha > 0$. Оценивая (30) с учётом (10) и (21), получаем

$$\begin{gathered} \|F(t)\|_\alpha \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant t-\tau} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_0^{t-\tau} + \max_{t-\tau \leqslant s \leqslant t} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_{t-\tau}^{t} = \\ = e^{-\alpha\tau} \cdot \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_0^{t-\tau} + \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_{t-\tau}^{t} \leqslant e^{-\alpha\tau} \cdot \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_0^{T} + \frac{\delta}{2}. \end{gathered} \tag{31}$$

Выберем теперь $\alpha_2 > 0$ так, чтобы при всех $\alpha > \alpha_2$ действовало соотношение

$$e^{-\alpha\tau} \cdot \mathrm{Var}\{\varphi(s)\}\Big|_0^T < \frac{\delta}{2}. \tag{32}$$

Комбинируя (31) и (32), получаем оценку (29) при $\tau < t \leqslant T$. В итоге с указанным выбором $\tau > 0$ и $\alpha_2 > 0$ нужный результат обоснован на всем отрезке $[0, T]$. Лемма доказана. □

Отметим, что, если $\varphi \in C^1[0,T]$, то доказательство леммы 5 сильно упрощается. Действительно, обозначив $K \equiv \max\limits_{0\leqslant s\leqslant T} |\varphi'(s)|$, для функции (28) имеем оценку

$$\|F(t)\|_\alpha \leqslant \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)}\, |\varphi'(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant K \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}s < \frac{K}{\alpha} < \delta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

верную при $\alpha > \alpha_2 \equiv K/\delta$ с произвольным фиксированным $\delta > 0$.

Приступим к доказательству самой теоремы 2. Оценим основной оператор B из формулы (15). Заметим, что $B = \varphi(0)B_1 + B_2$, где оператор B_1 определён формулой (22), а оператор B_2 имеет вид

$$B_2 = \int\limits_0^T \mathrm{d}\mu(t) \int\limits_0^t U(t-s)\,\mathrm{d}\varphi(s) = \int\limits_0^T F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \tag{33}$$

с функцией $F(t)$ из формулы (28).

Возьмём какое-то значение $\delta > 0$. Принимая во внимание предыдущие леммы 4 и 5 с их выбором α_1 и α_2, положим $\alpha_0 = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда при всех $\alpha > \alpha_0$ в эквивалентной норме $\|\cdot\|_\alpha$, заданной по формуле (11), получим, что

$$\|B\|_\alpha < |\varphi(0)|\cdot\delta + \delta\cdot \mathrm{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^T = \left(|\varphi(0)| + \mathrm{Var}\{\mu(t)\}\Big|_0^T\right)\delta.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Ясно, что при достаточно малых $\delta > 0$ имеем оценку $\|B\|_\alpha \leqslant \varepsilon$, верную при всех $\alpha > \alpha_0$ с соответствующим значением $\alpha_0 > 0$. По лемме 1 это гарантирует квазинильпотентность оператора B. Но тогда операторное уравнение (14) при любом выборе числа $\beta \neq 0$ будет однозначно разрешимым, и его решение $g \in E$ представимо рядом Неймана (17).

То, что уравнение (14) с оператором (15) и заданным элементом (16) эквивалентно исходной обратной задаче (1), (3), следует из прежних результатов [6]. Теорема 2 полностью доказана.

5. Доказательство теоремы 3

Пусть функции $\varphi(t)$, $\mu(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 3, включая специальное требование (18). Тогда для операторов B_1, B_2 из формул (22), (33) возможны представления

$$B_1 = \int\limits_a^T U(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = U(a+b-T)U(T-b)\int\limits_a^T U(t-a)\,\mathrm{d}\mu(t),$$

$$B_2 = \int\limits_a^T \mathrm{d}\mu(t) \int\limits_0^{T-b} U(t-s)\mathrm{d}\varphi(s) = U(a+b-T)\int\limits_a^T \mathrm{d}\mu(t)\int\limits_0^{T-b} U(t-a+T-b-s)\mathrm{d}\varphi(s).$$

Следовательно, основной оператор B из формулы (15) выражается в виде

$$B = \varphi(0)B_1 + B_2 = U(a+b-T)Q, \tag{34}$$

где

$$Q = \varphi(0)U(T-b)\int_a^T U(t-a)\,\mathrm{d}\mu(t) + \int_a^T \mathrm{d}\mu(t)\int_0^{T-b} U(t-a+T-b-s)\,\mathrm{d}\varphi(s). \tag{35}$$

Оператор $U(a+b-T)$ коммутирует с оператором Q. По предположению теоремы 3 полугруппа $U(t)$ является нильпотентной в пространстве E и удовлетворяет соотношению (12) с фиксированным значением $t_0 > 0$. Поэтому

$$B^k = U\big(k(a+b-T)\big)Q^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k(a+b-T) \geqslant t_0,$$

что и даёт формулу (19). Итак, нильпотентность оператора B установлена. В силу (19) ряд Неймана (17) переходит в конечную сумму (20). Теорема доказана.

Как видим, ключевую роль в доказательстве теоремы 3 сыграло специальное разложение (34) с оператором Q из формулы (35). Корректность конструкции обусловлена требованием (18). Отметим примеры, когда такая конструкция сильно упрощается.

6. Модельные примеры

Всюду в данном пункте считаем, что полугруппа $U(t)$ является нильпотентной в пространстве E, удовлетворяя условию (12) с фиксированным значением $t_0 > 0$.

Пусть $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0,T]$. Этот особый случай часто возникает на практике. Поскольку функция $\varphi(t)$ является постоянной на любом промежутке $[T-b,T] \subset (0,T]$, то для применения теоремы 3 достаточно требовать, чтобы функция $\mu(t)$ была постоянной на промежутке $[0,a] \subset [0,T)$ с неким (хоть каким-то) значением $a \in (0,T)$. В ответ можно всегда подобрать такое $b \in (0,T)$, что требование (18) окажется выполненным. Впрочем, здесь нет смысла прибегать к теореме 3, поскольку прямое исследование гораздо нагляднее.

Действительно, зафиксируем значение $a \in (0,T)$ и рассмотрим обратную задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, \quad \displaystyle\int_a^T u(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = u_1. \end{cases} \tag{36}$$

Стандартное требование (13) переходит в условие

$$\beta \equiv \mu(T) - \mu(a) \neq 0. \tag{37}$$

Оператор (15) приобретает вид

$$B = \int_a^T U(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = U(a)\int_a^T U(t-a)\,\mathrm{d}\mu(t). \tag{38}$$

Поскольку $U(ka) = 0$ при $k \geqslant t_0/a$, то $B^k = 0$ при любом натуральном $k \geqslant t_0/a$, т. е. оператор (38) гарантированно является нильпотентным. Формула (17) для неизвестного элемента $g \in E$ сводится к конечной сумме

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \qquad N_0 \equiv \left\lceil \frac{t_0}{a} \right\rceil - 1, \tag{39}$$

с константой $\beta \neq 0$ из формулы (37), оператором B из формулы (38), и элементом

$$f = A\left(U(a) \int_a^T U(t-a)u_0 \, \mathrm{d}\mu(t) - u_1 \right). \tag{40}$$

В случае, когда $a \geqslant t_0$ (а такое вполне возможно), формулы (38)–(40) радикально упрощаются, и элемент g выражается одним слагаемым

$$g = -\frac{1}{\mu(T) - \mu(a)} \, Au_1. \tag{41}$$

Любопытно, что такой ответ (41) зависит не от выбора той или иной конкретной функции $\mu(t)$, а лишь от значения $\beta \equiv \mu(T) - \mu(a) \neq 0$.

Подведём итог: именно соотношения (37)–(41) и надо использовать для нахождения решения обратной задачи (36) с оператором A, порождающим нильпотентную полугруппу $U(t)$.

Специальный интерес представляет частный случай обратной задачи (36), когда $\mu(t)$ есть функция скачков, локализованных в промежутке $[a, T] \subset (0, T]$. Общее нелокальное условие (3) заменяется *многоточечным условием*, и обратная задача принимает вид

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, \quad \displaystyle\sum_k \alpha_k u(\tau_k) = u_1. \end{cases} \tag{42}$$

Здесь $\{\tau_k\}$ — конечный или счётный набор различных точек из $[a, T]$, занумерованных натуральным индексом k. Все числовые коэффициенты α_k считаются отличными от нуля и такими, что $\sum |\alpha_k| < \infty$. Требование (13) переходит в условие

$$\beta \equiv \sum_k \alpha_k \neq 0. \tag{43}$$

Элемент $g \in E$ в обратной задаче (42) выражается прежней конечной суммой (39), где

$$B = \sum_k \alpha_k U(\tau_k), \quad f = A\left(\sum_k \alpha_k U(\tau_k) u_0 - u_1 \right), \tag{44}$$

а значение β вычисляется через (43). Окончательное упрощение формул (43), (44) происходит в случае обратной задачи с финальным переопределением.

Действительно, пусть $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0, T]$, а $\mu(t)$ есть функция единичного скачка в финальной точке $t = T$. Тогда исходная обратная задача (1), (3) принимает вид

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1. \end{cases} \tag{45}$$

Это и есть *модельная обратная задача с финальным переопределением* (см. [8]). Ввиду особой важности примера (45) разберём его более подробно.

Следуя общим формулам (13), (15), (16), получаем

$$\beta = 1, \quad B = U(T), \quad f = A(U(T)u_0 - u_1). \tag{46}$$

Поскольку $B^k = U(kT) = 0$ при любом натуральном $k \geqslant t_0/T$, то общая разрешающая формула (17) вновь сводится к конечной сумме, имеющей в данном случае особенно простой вид

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} U(kT)f, \qquad N_0 \equiv \left\lceil \frac{t_0}{T} \right\rceil - 1, \tag{47}$$

с элементом f из (46). Возможно, конечно, что $T \geqslant t_0$, и тогда $N_0 \equiv \lceil t_0/T \rceil - 1 = 0$. При этом также $U(T) = 0$ и $f = -Au_1$. В результате общий шаблон (47) даёт ответ

$$g = -Au_1.$$

С другой стороны, возможно, что $T < t_0$. Тогда, принимая во внимание представление (46) для элемента f и проводя элементарные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} g = \sum_{k=0}^{N_0} U(kT)f = f + U(T)f + U(2T)f + \ldots + U(N_0T)f = \\ = A\left(U(T)u_0 + U(2T)u_0 + U(3T)u_0 + \ldots + U\left((N_0+1)\,T\right)u_0\right) - \\ - A\left(u_1 + U(T)u_1 + U(2T)u_1 + \ldots + U\left(N_0T\right)u_1\right) = \\ = -Au_1 + A\sum_{k=1}^{N_0} U(kT)\left(u_0 - u_1\right), \quad N_0 \equiv \left\lceil \frac{t_0}{T} \right\rceil - 1. \end{aligned}$$

Слагаемое $U\left((N_0+1)\,T\right)u_0$ пропадает, ибо $(N_0+1)\,T \geqslant t_0$ и $U\left((N_0+1)\,T\right) = 0$.

В итоге формулу (47) для второго компонента g решения обратной задачи (45) можно записать в виде

$$g = \begin{cases} -Au_1, & 0 < t_0 \leqslant T, \\ -Au_1 + A\displaystyle\sum_{k=1}^{N_0} U(kT)\left(u_0 - u_1\right), & t_0 > T > 0, \end{cases} \tag{48}$$

где $N_0 \equiv \lceil t_0/T \rceil - 1$. Выражение (48) удобно на практике. Для последующих применений данного результата зафиксируем точное утверждение.

Теорема 4. *Пусть линейный замкнутый оператор A порождает нильпотентную полугруппу $U(t)$ класса C_0, удовлетворяющую условию* (12) *с фиксированным значением $t_0 > 0$. Тогда при любом выборе $u_0, u_1 \in D(A)$ элемент $g \in E$, разрешающий обратную задачу* (45)*, находится по формуле* (48).

При этом функция $u(t)$ восстанавливается по формуле

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(s)g\,\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{49}$$

непосредственно следующей из (2) в случае, когда $\varphi(t) \equiv 1$. Формула (49) используется также в обратных задачах (36) и (42).

7. Заключение

Итак, теория линейной обратной задачи (1), (3) с оператором A, порождающим суперустойчивую полугруппу, оказывается в основном завершённой. Полученные результаты представляют интерес для некоторых специальных разделов математической физики, связанных с теорией упругости и задачами линейного переноса. Например, на основе формул, установленных нами в п. 6, можно разработать конкретные алгоритмы решения обратных задач типа (36) для многомерного уравнения переноса, взятого в среде без столкновений, но с возможным поглощением частиц. Этот материал полезно опубликовать отдельно.

Литература

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
2. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — N.Y.: Springer Verlag, 1983.
5. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — N.Y.: Springer, 2000.
6. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Математические заметки. — 1994. — Т. 56, вып. 2. — С. 99–113.
7. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58, вып. 2. — С. 167–188.
8. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — N.Y.: Basel, 2000.
9. *Тихонов И. В., Тунг В. Н. Ш.* Метод решения обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. — Вып. 2. — С. 51–58.
10. *Balakrishnan A. V.* On Superstability of Semigroups // Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics / Ed. by M. P. Polis et al. — 1999. — Pp. 12–19.
11. *Balakrishnan A. V.* Smart Structures and Super Stability // Evolution Equations and Their Applications in Physical and Life Sciences. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics / Ed. by G. Lumer, L. Weis. — Vol. 215. — 2001. — Pp. 43–53.
12. *Balakrishnan A. V.* Superstability of Systems // Applied Mathematics and Computation. — 2005. — Vol. 164, issue 2. — Pp. 321–326.
13. *Creutz D., Mazo M., Preda C.* Superstability and Finite Time Extinction for C_0–Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted. — 2013. — Pp. 1–12.
14. *Chen J.-H., Lu W.-Y.* Perturbation of Nilpotent Semigroups and Application to Heat Exchanger Equations // Applied Mathematics Letters. — 2011. — Vol. 24. — Pp. 1698–1701.
15. *Kmit I., Lyul'ko N.* Perturbations of Superstable Linear Hyperbolic Systems // arXiv:1605.04703. Submitted. — 2017. — Pp. 1–26.
16. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. — М.: Наука, 1969.

17. *Malinen J., Nevanlinna O., Zemánek J.* Microspectral Analysis of Quasinilpotent Operators // arXiv:1211.4790v1. Submitted. — 2012. — Pp. 1–25.
18. *Eskandari R., Mirzapour F.* Hyperinvariant Subspaces and Quasinilpotent Operators // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. — 2015. — Vol. 41, issue 4. — Pp. 805–813.
19. *Забрейко П. П.* О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра // Литовский математический сборник. — 1967. — Т. 7, вып. 2. — С. 281–287.
20. *Жуковский Е. С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, вып. 9. — С. 1599–1605.
21. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, вып. 10. — С. 1402–1411.
22. *Грехэм Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.
23. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.

UDC 517.95
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118

The Solvability of the Inverse Problem for the Evolution Equation with a Superstable Semigroup

I. V. Tikhonov*, **Vu Nguyen Son Tung**†

* *Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics*
Lomonosov Moscow State University
Leninskyie Gori, Moscow, 119991, Russian Federation
† *Mathematical Analysis Department*
Moscow State University of Education
14 Krasnoprudnaya Str., Moscow, 107140, Russian Federation

For the evolution equation in a Banach space, the linear inverse source problem is studied. It is required to recover an unknown nonhomogeneous term by means of an additional nonlocal condition written in the form of a Riemann–Stieltjes integral. The main assumption is related to the superstability (quasinilpotency) of the evolution semigroup. More precisely, it is assumed that the evolutionary semigroup associated with the abstract differential equation has an infinite negative exponential type. Without other restrictions, a theorem on the solvability of the inverse problem is obtained. It is shown that the solution can be represented by a convergent Neumann series. Exact conditions under which an infinite series becomes a finite sum are found. Here, the algorithm for calculating the solution becomes finite. Model examples are considered, including an important example of the inverse problem with final overdetermination. The above results can be applicated in special parts of mathematical physics related to the theory of elasticity and the linear transport theory. As is customary, our research takes place in the general case with a choice of the complex scalar field, but the main facts are also true in the real case. The created theory allows transfer to nonlocal problems for evolution equations, when instead of the traditional initial condition special time averaging is used to find the solution.

Key words and phrases: evolution equation, inverse problem, superstable semigroup, operator equation, Neumann series, existence and uniqueness theorem of the solution

References

1. E. Hille, R. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, IL, Moscow, 1962, in Russian.
2. N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators. P. 1. General Theory, IL, Moscow, 1962, in Russian.
3. S. G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Space, Nauka, Moscow, 1967, in Russian.

4. A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag, N.Y., 1983.
5. K.-J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer, N.Y., 2000.
6. I. V. Tikhonov, Yu. S. Eidelman, Problems on Correctness of Ordinary and Inverse Problems for Evolutionary Equations of a Special Form, Math. Notes 56 (1994) 830–839, in Russian.
7. A. I. Prilepko, I. V. Tikhonov, Recovery of the Nonhomogeneous Term in an Abstract Evolution Equation, Russian Acad. Sci. Izv. Math. 58 (1994) 167–188, in Russian.
8. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Basel, N.Y., 2000.
9. I. V. Tikhonov, V. N. S. Tung, A Method of Solving the Inverse Problem for the Evolution Equation with a Superstable Semigroup, Journal Differential Equations and Control Processes (2) (2017) 51–58, in Russian.
10. A. V. Balakrishnan, On Superstability of Semigroups, in: M. P. Polis, et al. (Eds.), Systems Modelling and Optimization, Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, CRC Research Notes in Mathematics, Chapman and Hall, 1999, pp. 12–19.
11. A. V. Balakrishnan, Smart Structures and Super Stability, in: G. Lumer, L. Weis (Eds.), Evolution Equations and Their Applications in Physical and Life Sciences. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 215, 2001, pp. 43–53.
12. A. V. Balakrishnan, Superstability of Systems, Applied Mathematics and Computation 164 (2005) 321–326.
13. D. Creutz, M. Mazo, C. Preda, Superstability and Finite Time Extinction for C_0–Semigroups, arXiv:0907.4812. Submitted (2013) 1–12.
14. J.-H. Chen, W.-Y. Lu, Perturbation of Nilpotent Semigroups and Application to Heat Exchanger Equations, Applied Mathematics Letters 24 (2011) 1698–1701.
15. I. Kmit, N. Lyul'ko, Perturbations of Superstable Linear Hyperbolic Systems, arXiv:1605.04703. Submitted (2017) 1–26.
16. M. A. Krasnoselsky, G. M. Vainikko, P. P. Zabreiko, Y. B. Rutitsky, V. Y. Stetsenko, Approximate Solution of Operator Equations, Nauka, Moscow, 1969, in Russian.
17. J. Malinen, O. Nevanlinna, J. Zemánek, Microspectral analysis of quasinilpotent operators, arXiv:1211.4790v1. Submitted (2012) 1–25.
18. R. Eskandari, F. Mirzapour, Hyperinvariant Subspaces and Quasinilpotent Operators, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 41 (2015) 805–813.
19. P. P. Zabreiko, On the Spectral Radius of Volterra Integral Operators, Lithuanian Math. Collection 7 (1967) 281–287, in Russian.
20. E. S. Zhukovskii, On the Theory of Volterra Equations, Differential Equations 25 (1989) 1132–1137, in Russian.
21. V. I. Sumin, A. V. Chernov, Operators in the Spaces of Measurable Functions: the Volterra Property and Quasinilpotency, Differential Equations 34 (1998) 1403–1411, in Russian.
22. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, Mir, Moscow, 1998, in Russian.
23. I. P. Natanson, Theory of Functions of a Real Variable, Nauka, Moscow, 1974, in Russian.

Для цитирования:
Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 103–118. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118.

For citation:
Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung The Solvability of the Inverse Problem for the Evolution Equation with a Superstable Semigroup, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 103–118. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118. In Russian.

Сведения об авторах:
Тихонов Иван Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (e-mail: `ivtikh@mail.ru`, тел.: +7 9162963261)
Ву Нгуен Шон Тунг — аспирант кафедры математического анализа Московского педагогического государственного университета (e-mail: `vnsontung@mail.ru`, тел.: +7 9169735556)

Information about the authors:
Tikhonov I. V. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Department of Mathematical Physics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (e-mail: `ivtikh@mail.ru`, phone: +7 9162963261)
Vu Nguyen Son Tung — Postgraduate Student of Mathematical Analysis Department, Moscow State University of Education (e-mail: `vnsontung@mail.ru`, phone: +7 9169735556)