RUDN Journal of MIPh
Вестник РУДН. Серия МИФ
2018 Vol. 26 No. 1 49–57
http://journals.rudn.ru/miph

УДК 519.633, 538.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57

Об одном методе исследования самосогласованной нелинейной краевой задачи на собственные значения с растущими потенциалами

И. В. Амирханов, Н. Р. Саркар

Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Один из распространённых методов исследования многочастичных задач в рамках вариационного подхода — переход к нелинейной одночастичной задаче путём введения самосогласованного поля, зависящего от состояний этих частиц. В работе рассматривается нелинейная краевая задача на собственные значения для уравнения Шрёдингера с растущим потенциалом, включающим зависимость от волновой функции и степенную зависимость от координаты r^n, $n = 1, 2, 3\ldots$. При $n = 2$ краевая задача для уравнения Шрёдингера (линейная задача) имеет точное решение. Для чётных степеней n показано, что решения такой задачи можно выразить через решения соответствующей линейной задачи, причём при $n = 2$ решение удаётся получить в явном виде. Получаемый для $n = 2$ набор решений характеризуется эквидистантностью расстояний между соседними собственными значениями. Показано, что решение нелинейной задачи отличается от решения линейной сдвигом собственных значений. В случае потенциала выше квадратичного, появляются новые растущие потенциалы меньшей степени. Для случая нечётных значений n обсуждается переход от интегро-дифференциальной формулировки задачи к системе дифференциальных уравнений, которая может быть решена численно на основе метода последовательных приближений, подтвердивший свою эффективность при исследовании модели полярона.

Ключевые слова: автолокализация, собственные значения, полярон, растущие потенциалы, нелинейная краевая задача

1. Введение

При исследовании решений многочастичных задач применяя вариационный принцип и путём введения самосогласованного поля, можно свести их к одночастичной задаче. Самосогласованные поля сами зависят от состояний этих частиц, и тем самым задача становиться нелинейной.

В качестве характерного примера можно привести концепцию полярона, являющуюся одной из классических моделей квантовой теории поля, которая имеет многочисленные приложения в физике конденсированных сред. Отметим, что проблема полярона была первоначально сформулирована как задача автолокализованного электрона в ионном кристалле. В настоящее время исследованию автолокализованных состояний в конденсированных средах посвящено много оригинальных работ, обзоров и монографий [1–5].

Эффект автолокализации в жидкостях приводит к образованию в них сольватированных электронов, играющих важную роль во многих химических процессах [6, 7]. Под действием облучения вода (или иная среда) переходит в особое состояние, характеризуемое специальными физическими и химическими свойствами [8].

Подобные задачи возникают в рамках квантово-механической задачи двух тел, и её изучение является актуальной проблемой современной физики элементарных частиц. Например, в нерелятивистской потенциальной модели описание спектра тяжёлых кваркониев [9] сводится к решению уравнения Шрёдингера для двух тел.

Статья поступила в редакцию 9 января 2018 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, №17-01-00661-а.
Авторы выражают благодарность Земляной Е.В., Дикусару Н.Д и Тухлиеву З.К. за полезное обсуждение и ценные замечания.

Релятивистское обобщение этой модели в рамках КХД, необходимое для единообразного описания спектров лёгких и тяжёлых кваркониев, приводит к релятивистским вариантам уравнения Шрёдингера. В качестве эффективного потенциала межкваркового взаимодействия обычно используется сочетание растущего и кулоновского потенциалов. Численные исследования задач на собственные значения с кулоновским и линейно растущими потенциалами приведены в работах [10, 11].

Другой пример использования самосогласованного поля — уравнение Хартри для исследования задач в ядерной или атомной физике, в том числе для системы электронов [12].

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{яд}}(r_j) + \sum_{i=1 j\neq i}^{N} e^2\Phi_i(r_j)\right]\psi_j = \varepsilon_j\psi_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{1}$$

где потенциалы определяются из системы N уравнений Пуассона

$$\Delta\Phi_i = -4\pi\psi_i^*\psi_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{2}$$

где $V_{\text{яд}}(r_j)$ — потенциал взаимодействия j того электрона в кулоновском поле ядра.

Полученная таким способом потенциальная энергия (2) называется самосогласованным полем Хартри. Путём введения самосогласованного поля (2) многоэлектронная задача сводится к одноэлектронной, т.е. к решению уравнения Шрёдингера (1), содержащего координаты только одного электрона. Самосогласованное поле, правильно учитывающее симметрию перестановки частиц, было получено Фоком [12]. Система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фока отличается от системы Хартри с присутствием обменного интеграла, обусловленным симметризацией координатных функций.

В данной работе предложен метод исследования решений нелинейной краевой задачи на собственные значения для уравнения Шрёдингера с растущим потенциалом, включающим зависимость от волновой функции.

2. Постановка задачи

Изучение стационарных автолокализованных состояний в среде, как правило, сводится к исследованию решений нелинейной краевой задачи в рамках уравнения Шрёдингера, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\left[\Delta + E - c\Phi\left(|\psi|^2\right)\right]\psi\left(\vec{r}\right) = 0, \tag{3}$$

где

$$\Phi = \int \mathrm{d}\vec{r}_1 V\left(|\vec{r}-\vec{r}_1|\right)|\psi\left(\vec{r}_1\right)|^2, \tag{4}$$

при условии сохранения нормировки $\int \mathrm{d}\vec{r}\,|\psi\left(\vec{r}\right)|^2 = 1$, а также граничные условия имеют вид:

$$\psi(0) = \text{const}, \quad \psi\left(\vec{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0. \tag{5}$$

Потенциал (4) является самосогласованным, т.е. так как зависит от самого решения уравнения (3).

Характер такой зависимости, а также форма функции V определяются конкретной моделью. Так, при исследовании состояний полярона $V\left(|\vec{r}-\vec{r}_1|\right) = 1/|\vec{r}-\vec{r}_1|$. Тогда функция Φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\Phi = -4\pi|\psi|^2. \tag{6}$$

Отметим, что с вычислительной точки зрения обычно более удобно исследовать систему дифференциальных уравнений (3) и (6) с граничными условиями (5), а не систему интегро-дифференциальных уравнений (3)–(5). В работе проводится исследование нелинейной краевой задачи (3)–(5), где потенциал V имеет вид

$$V\left(|\vec{r}-\vec{r}_1|\right) = |\vec{r}-\vec{r}_1|^n, \quad n = 1,2,3,4,\ldots. \tag{7}$$

3. Методы исследования и анализ полученных результатов

Исследование свойств решений задачи (3)–(5), (7) будем проводить отдельно для чётных и нечётных значений.

1. Рассмотрим случай, когда $n = 2,4,6,\ldots$.

Сферически симметричное решение (3) ищем в виде $\psi(\vec{r}) = (\varphi(r)/r)Y_{00}$, с граничными условиями $\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0$, где $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$. Тогда (4) примет следующий вид

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}r_1\varphi^2(r_1)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_1\sin\theta_1\,|\vec{r}-\vec{r}_1|^n. \tag{8}$$

При $n = 2$, после интегрирования по углам получим

$$\Phi = A_1r^2 + A_2, \quad \text{где} \quad A_1 = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r_1\varphi^2(r_1), \tag{9}$$

с учётом нормировки $A_1 = 1$, $A_2 = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r_1 r_1^2\varphi^2(r_1)$.

Уравнение (3) для сферически симметричных решений в безразмерных переменных перепишем в виде

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + E_m - c\Phi\right]\varphi_m(r) = 0 \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

с граничными условиями $\varphi_m(0) = \varphi_m(\infty) = 0$.

Решая уравнение (10) с этими же граничными условиями, находим собственные значения E_m. Далее будем сравнивать аналитическое решения уравнения (10) с потенциалом $\Phi = r^2$ (линейная задача) с решениями нелинейной задачи с потенциалом (9).

Решения ищем в виде

$$\varphi_i = N_i\bar{\varphi}_i, \tag{11}$$

где $N_i (i = 0,1,2,\ldots)$ — нормировочные постоянные, которые имеют вид

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^\infty \bar{\varphi}_i^2\mathrm{d}r}}, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

$$\bar\varphi_0 = re^{-\beta r^2};\quad \bar\varphi_1 = r(r^2-a_1)e^{-\beta r^2};\quad \bar\varphi_2 = r(r^2-a_2)(r^2-a_3)e^{-\beta r^2};$$
$$\bar\varphi_3 = r(r^2-a_4)(r^2-a_5)(r^2-a_6)e^{-\beta r^2};$$
$$\bar\varphi_4 = r(r^2-a_7)(r^2-a_8)(r^2-a_9)(r^2-a_{10})e^{-\beta r^2}.$$

Подставляя выражения (11) для разных $i = 0, 1, 2, \ldots$ в уравнение (10) с потенциалом $\Phi = r^2$, получим систему алгебраических уравнений для нахождения собственных значений $E_m (m = 0, 1, 2, 3, 4)$ и параметров $a_i = 1, 2, \ldots, 10$. Решая эту систему уравнений, получим

$$E_0 = 3\sqrt{c},\quad E_1 = 7\sqrt{c},\quad E_2 = 11\sqrt{c},\quad E_3 = 15\sqrt{c},\quad E_4 = 19\sqrt{c},$$
$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(3),\quad a_2 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(5-\sqrt{10}),\quad a_3 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(5+\sqrt{10}),\quad a_4 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(14,0657980),$$
$$a_5 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(1,3326518),\quad a_6 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(5,6015501),\quad a_7 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(20,3648752),$$
$$a_8 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(10,2747750),\quad a_9 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(4,3132752),\quad a_{10} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(1,0470521),\quad \beta = \frac{\sqrt{c}}{2}.$$

Для нелинейной задачи с потенциалом $\Phi_m = r^2 + A_{2m}$, где $A_{2m} = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r r^2 \varphi_m^2(r)$, собственные значения E_m сдвигаются на cA_{2m}. Тогда имеем $\bar E_0 = E_0 + cA_{20}$, $\bar E_1 = E_1 + cA_{21}$, $\bar E_2 = E_2 + cA_{22}$, $\bar E_3 = E_3 + cA_{23}$, $\bar E_4 = E_4 + cA_{24}$.

Таким образом, решение нелинейной краевой задачи с потенциалом (9) свели к решению линейной задачи с потенциалом $\Phi = r^2$. Действительно, если потенциал (9) поставить в уравнение (10), то получаем линейную задачу со сдвинутым собственным значением $\overline{E}_m = E_m + cA_{2m}$.

Так как уравнение (10) с потенциалом $\Phi = r^2$ имеет аналитическое решение, то и нелинейная задача также имеет аналитическое решение (см. табл. 1).

Интегралы

$$A_{2m} = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r r^2 \varphi_m^2(r)$$

с функциями (11) вычисляются аналитически. Так как вычисления интегралов громоздкие, мы их опускаем, в таблице приведены только окончательные результаты. Из полученных результатов следует, что расстояния между соседними собственными значениями нелинейной задачи эквидистантны (см. последние колонки табл. 1). А также проверено, что решения (11) φ_n ортогональны, т.е.

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}r \varphi_l \varphi_m = 0,\quad l \neq m.$$

При $n = 4$ после интегрирования по углам (8) получим

$$\Phi = \frac{10}{3}A_2 r^2 + A_1 r^4 + A_3,\quad \text{где}\quad A_3 = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r_1 r_1^4 \varphi^2(r_1)\,. \tag{12}$$

Таблица 1

Собственные значения линейной задачи E, нелинейной задачи $\overline{E}$ и значения интеграла A_{2m} при $n = 2$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$

c	m	**0.25**	**1.0**	**4.0**
Собственные значения линейной задачи E	0	1.5	3	6
	1	3.5	7	14
	2	5.5	11	22
	3	7.5	15	30
	4	9,5	19	38
Значения интеграла A_{2m}	0	3	1,5	0,75
	1	7	3,5	1,75
	2	11	5,5	2,75
	3	15	7,5	3,75
	4	19	9,5	4,75
Собственные значения нелинейной задачи $\bar{E}$	0	2,25	4,50	9
	1	5,25	10,5	21
	2	8,25	16,5	33
	3	11,25	22,5	45
	4	14,25	28,5	57
Расстояние между соседними собственными значениями		3	6	12
		3	6	12
		3	6	12
		3	6	12

При $n = 6$ получим

$$\Phi = 7A_3 r^2 + 7A_2 r^4 + A_1 r^6 + A_4, \quad \text{где} \quad A_4 = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r_1 r_1^6 \varphi^2 (r_1) \tag{13}$$

и т.д.

В этом случае кроме потенциалов $\Phi = r^4$, $\Phi = r^6$ исходной задачи в нелинейной задаче появляются новые растущие потенциалы меньшей степени (см. (12) и (13)). Однако найти аналитические решения не удалось.

2. Теперь рассмотрим случаи, когда n принимает нечётные значения $n = 1, 3, 5, \ldots$ Пусть $n = 1$. Тогда

$$\Phi_1(\vec{r}) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\vec{r}_1 \left|\vec{r} - \vec{r}_1\right| \left|\psi\left(\vec{r}_1\right)\right|^2 .$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$\Phi_1(0) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\vec{r}_1 r_1 \left|\psi\left(\vec{r}_1\right)\right|^2 , \quad \Phi_1\left(\vec{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} r. \tag{14}$$

Действуя на функцию $\Phi_1\left(\vec{r}\right)$ оператором Δ, получим

$$\Delta\Phi_1 = 2\Phi_2, \tag{15}$$

где

$$\Phi_2 = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\vec{r}_1 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \left|\psi\left(\vec{r}_1\right)\right|^2.$$

Действуя на функцию $\Phi_2(\vec{r})$ оператором Δ, получим

$$\Delta\Phi_2 = -4\pi|\psi|^2, \tag{16}$$

где

$$\Phi_2(0) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\vec{r}_1 \frac{1}{r_1} \left|\psi\left(\vec{r}_1\right)\right|^2, \quad \Phi_2\left(\vec{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{r}. \tag{17}$$

Таким образом, вместо системы интегро-дифференциальных уравнений (3)–(5) получили систему трёх дифференциальных уравнений (3), (15), (16).

Сферические симметричные решения системы (3), (15), (16) ищем в виде

$$\psi\left(\vec{r}\right) = \frac{\varphi(r)}{r} Y_{00}, \Phi_1\left(\vec{r}\right) = \frac{V_1(r)}{r} Y_{00}, \Phi_2\left(\vec{r}\right) = \frac{V_2(r)}{r} Y_{00}, \quad \text{где} \quad Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

Подставляя в систему уравнений (3), (15), (16), получим

$$\varphi'' + E\varphi - \frac{c}{\sqrt{4\pi}} \frac{V_1}{r} \varphi = 0, \quad V_1'' = 2V_2, \quad V_2'' = -\frac{|\varphi|^2}{r} \tag{18}$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad V_1(0) = 0, \quad V_1(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} r^2, \quad V_2(0) = 0, \quad V_2'(\infty) = 0. \tag{19}$$

При написании граничных условий (19) учтены свойства (14) и (17).

Для решения задачи (18), (19) можно использовать алгоритм на основе метода последовательных приближений, успешно апробированный для решения системы уравнений полярона в работе [13]:

1) решаем третье уравнение системы (18) при заданном (в начальном приближении) φ^k и найдём V_2;
2) решаем второе уравнение для нахождения V_1;
3) решая первое уравнение, найдём в следующем приближении φ^{k+1};
4) повторяем весь алгоритм до самосогласования, т.е. $\max\limits_{0<r<\infty} \left|\varphi^{k+1}(r) - \varphi^k(r)\right| < \varepsilon$, где ε — заданная малая положительная величина, влияющая на точность получаемого численного решения.

Точность определяется порядком аппроксимации и шагом дискретной сетки.

Пусть $n = 3$. Тогда $\Phi_3(\vec{r}) = \int_0^\infty \mathrm{d}\vec{r}_1 \left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|^3 \left|\psi\left(\vec{r}_1\right)\right|^2$, где

$$\Phi_3(0) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\vec{r}_1 r_1^3 \left|\psi\left(\vec{r}_1\right)\right|^2, \quad \Phi_3\left(\vec{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} r^3. \tag{20}$$

Действуя на функцию $\Phi_3(\vec{r})$ оператором Δ несколько раз, получим

$$\Delta\Phi_3 = 12\Phi_1, \quad \Delta\Phi_1 = 2\Phi_2, \quad \Delta\Phi_2 = -4\pi|\psi|^2. \tag{21}$$

Таким образом, получили систему четырёх дифференциальных уравнений. Аналогично, при $n = 5$, получим систему пяти дифференциальных уравнений и т.д. Для численного решения этих систем необходимо обобщить вышеописанный алгоритм на случаю большего числа уравнений.

4. Выводы

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

а) При исследовании обсуждаемой нелинейной краевой задачи (3)–(5), (7) в случае чётных значений n, эта задача сведена к решению линейной задачи. При $n = 2$ получено аналитическое решение нелинейной задачи, характеризующееся эквидистантностью расстояний между соседними собственными значениями спектра.

б) Для случая нечётных значений на основе исходной системы интегро-дифференциальных уравнений формулируется система дифференциальных уравнений, численное решение которой может быть проведено на основе метода последовательных приближений, что является предметом дальнейшей работы.

Литература

1. *Пекар С. И.* Исследования по электронной теории кристаллов. — М.: ГИТГЛ, 1951. — 256 с.
2. *Каширина Н. И., Лахно В. Д.* Математическое моделирование автолокализованных состояний в конденсированных средах. — М.: Физматлит, 2013. — 292 с.
3. Решение уравнений ЛЛП в теории биполярона / И. В. Амирханов, И. В. Пузынин, Т. А. Стриж, В. Д. Лахно // Известия АН, серия физическая. — 1995. — Т. 59, № 8. — С. 106–110.
4. Численное исследование квантово-полевой модели бинуклона сильной связи / И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, В. Д. Лахно, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж // Препринт ОИЯИ, Дубна. — 1996. — № Р11-96-268.
5. Численное исследование нелинейной самосогласованной задачи на собственные значения в обобщенной модели полярона / И. В. Амирханов, В. Д. Лахно, И. В. Пузынин, Т. А. Стриж, В. К. Федянин // Препринт, Биологические исследования АН СССР, Пущино. — 1988. — 23 с.
6. *Томпсон Д.* Электроны в жидком аммиаке. — М.: Мир, 1979. — 138 с.
7. Численное исследование нелинейной самосогласованной задачи на собственные значения в обобщенной модели сольватированного электрона / И. В. Амирханов, И. В. Пузынин, Т. А. Стриж, О. В. Васильев, В. Д. Лахно // Препринт, Биологические исследования СССР, Пущино. — 1990. — 24 с.
8. Поляронная модель формирования состояний гидратированного электрона / В. Д. Лахно, А. В. Волохова, Е. В. Земляная, И. В. Амирханов, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2015. — № 1. — С. 1–6.
9. *Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В.* Потенциальные модели кваркония // Успехи физических наук. — 1984. — Т. 143. — С. 3.
10. О некоторых проблемах численного исследования задачи на собственные значения в импульсном представлении / И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, № 10. — С. 111–119.
11. Численное исследование релятивистских уравнений на связанные состояния с кулоновским и линейным потенциалами / И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 12. — С. 79–96.
12. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 387 с.

13. *Амирханов И. В. и др.* Численное исследование динамики поляронных состояний // Вестник тверского университета. Серия: Прикладная математика. — 2009. — № 17. — С. 5–14.

UDC 519.633, 538.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57

On a Method of Investigation of the Self-Consistent Nonlinear Boundary-Value Problem for Eigen-Values with Growing Potentials

I. V. Amirkhanov, N. R. Sarker

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, Russia, 141980

One of the most common methods for investigating multiparticle problems in the framework of the variational approach is the transition to a nonlinear one-particle problem by introducing a self-consistent field that depends on the states of these particles. The paper considers a nonlinear boundary value eigenvalue problem for the Schrödinger equation with a growing potential including a dependence on the wave function and a power dependence on the coordinate $V = r^n$ where $n = 1, 2, 3....$ For n = 2, the boundary value problem for the Schrödinger equation (linear problem) has an exact solution. For even powers of n, it is shown that solutions of such a problem can be expressed in terms of solutions corresponding to the linear problem, and for $n = 2$ the solution can be obtained in explicit form. The set of solutions obtained for $n = 2$ is characterized by equal distances between neighboring eigenvalues. It is shown that the solution of the nonlinear problem differs from the solution of the linear problem by the shift of the eigenvalues. In the case of a potential higher than the quadratic one, new growing potentials of a lesser degree appear. For the case of odd values of n, the transition is discussed, from the integro-differential formulation of the problem to a system of differential equations which can be solved numerically on the basis of the method of successive approximations, which has proved its effectiveness in the study of the polaron model.

Key words and phrases: self-localization, eigenvalues, polaron, growing potentials, nonlinear boundary value problem

References

1. S. I. Pekar, Studies on the Electronic Theory of Crystals, GITGL, Moscow, 1951, in Russian.
2. N. I. Kashirina, V. D. Lakhno, Mathematical Modeling of Autolocalized States in Condensed Media, Fizmatlit, Moscow, 2013, in Russian.
3. I. V. Amirkhanov, I. V. Puzynin, T. A. Strizh, V. D. Lakhno, Solution of LLP Equations in Bipolaron Theory, Bulletin of the Academy of Sciences, the series of physical 59 (8) (1995) 106–110, in Russian.
4. I. V. Amirkhanov, E. V. Zemlyanaya, V. D. Lakhno, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, T. A. Strizh, Numerical Investigation of the Quantum Field Model of the Strong-Binding Binucleon, Mathematical Modelling 8 (1997) 51–59, in Russian.
5. I. V. Amirkhanov, V. D. Lakhno, I. V. Puzynin, T. A. Strizh, V. K. Fedyanin, Numerical Study of a Nonlinear Self-Consistent Eigenvalue Problem in the Generalized Polaron Model, 1988, in Russian.
6. J. Thompson, Electrons in Liquid Ammonia, Mir, Moscow, 1979, in Russian.
7. I. V. Amirkhanov, I. V. Puzynin, T. A. Strizh, O. V. Vasilyev, V. D. Lakhno, Numerical Investigation of a Nonlinear Self-Consistent Eigenvalue Problem in the Generalized Model of a Solvated Electron, 1990, in Russian.

8. V. D. Lakhno, A. V. Volokhova, E. V. Zemlyanaya, I. V. Amirkhanov, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, Polaron Model of the Formation of Hydrated Electron States, Surface. X-ray, synchrotron and neutron studies (1) (2015) 1–6, in Russian.
9. A. A. Bykov, I. M. Dremin, A. V. Leonidov, Potential models of quarkonium, Successes of Physical Sciences 143 (1984) 3, in Russian.
10. I. V. Amirkhanov, E. V. Zemlyanaya, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, T. A. Strizh, On Some Problems of Numerical Investigation of the Eigenvalue Problem in the Momentum Representation, Mathematical modeling 9 (10) (1997) 111–119, in Russian.
11. I. V. Amirkhanov, E. V. Zemlyanaya, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, T. A. Strizh, Numerical Investigation of Relativistic Equations for Bound States with Coulomb and Linear Potentials, Math modeling 12 (12) (2000) 79–96, in Russian.
12. D. Potter, Computational Methods in Physics, Mir, Moscow, 1975, in Russian.
13. I. V. Amirkhanov, et al., Numerical Study of the Dynamics of Polaron States, Bulletin of Tver University. Series: Applied Mathematics (17) (2009) 5–14, in Russian.

Для цитирования:
Амирханов И. В., Саркар Н. Р. Об одном методе исследования самосогласованной нелинейной краевой задачи на собственные значения с растущими потенциалами // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 49–57. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57.

For citation:
Amirkhanov I. V., Sarker N. R. On a Method of Investigation of the Self-Consistent Nonlinear Boundary-Value Problem for Eigen-Values with Growing Potentials, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 49–57. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57. In Russian.

Сведения об авторах:
Амирханов Илькизар Валиевич — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, начальник сектора Научного отдела вычислительной физики Лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: camir@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 62547)
Саркар Нил Ратан (Бангладеш) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научного отдела вычислительной физики Лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: sarker@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 62547)

Information about the authors:
Amirkhanov I. V. — Senior Researcher, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Sector "Scientific Division of Computational Physics". Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (e-mail: camir@jinr.ru, phone: +7 (49621) 62547)
Sarker Nil Ratan — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher "Scientific Division of Computational Physics". Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (e-mail: sarker@jinr.ru, phone: +7 (49621) 62547)