RUDN Journal of MIPh
Вестник РУДН. Серия МИФ
2018 Vol. 26 No. 1 39–48
http://journals.rudn.ru/miph

Математическое моделирование

УДК 519.633.2
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48

О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца

М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов, А. А. Тютюнник

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Исследование электромагнитного поля в регулярном волноводе, заполненным однородным веществом, сводится к исследованию двух независимых краевых задач для уравнения Гельмгольца. В случае волновода, заполненного неоднородным веществом, между модами этих двух задач возникает связь, которую в численных экспериментах не всегда удаётся учесть в полной мере. В настоящей статье показано, как переписать уравнения Гельмгольца в векторной форме, чтобы выразить эту связь явно.

В работе рассматривается цилиндрический волновод с идеально проводящими стенками, заполнение которого может менять в поперечном сечении произвольным образом. В основе нашего подхода лежит двумерный аналог теоремы, известной в теории упругих тел как декомпозиция Гельмгольца. На её основании будут введены четыре потенциала вместо двух, обычно используемых в теории полых волноводов. Доказано, что любое решение уравнений Максвелла в волноводе, удовлетворяющее краевым условиям идеальной проводимости на стенках волновода, можно представить при помощи этих потенциалов. Система уравнений Максвелла записана относительно этих потенциалов, и показано, что эта система переходит в пару несвязанных уравнений Гельмгольца в случае полого волновода.

Ключевые слова: волновод, уравнения Максвелла, уравнение Гельмгольца, нормальные моды, Sagemath

Введение

Первые задачи, описывающие распространение и дифракцию волноводных мод, были успешно решены ещё в середине прошлого века в ставших уже классическими работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1] и А. Г. Свешникова [2–4]. За редкими исключениями, рассмотренными ещё в работах А.Н. Тихонова и А. А. Самарского, эти задачи не решаются в символьном виде и требуют создания ресурсоёмких комплексов программ [5–7]. Фактически подобные комплексы создавались под конкретные задачи и не были детально описаны и переданы в общественное пользование, чему способствовала закрытость тематики в 1970–1980-х годах. Из опубликованных исследований следует упомянуть в первую очередь цикл работ, выполненных в МГУ им. М. В. Ломоносова, в том числе по проектированию волноводного перехода [8–11], вычислению нормальных мод волновода со сложным диэлектрическим заполнением [12, 13], решению дифракции волн на неоднородности в волноводе [14–18].

Теоретическая сторона этих вопросов хорошо проработана в общей векторной постановке. Для спектральной задачи установлена дискретность спектра и полнота системы нормальных волн, причём даже для волноводов с очень сложным заполнением [19–22]. Для задачи дифракции установлена фредгомовость [23–26] и с некоторыми оговорками обосновано применение неполного метода Галёркина, в том числе для волновода, сечение которого имеет входящие ребра [27–29]. Однако на практике при проведении численных экспериментов очень часто ограничиваются так называемым скалярным приближением. На самом деле векторный характер поля в заполненных волноводах приводит к гибридизации TE- и TM-мод. Однако плохо изучено,

Статья поступила в редакцию 4 декабря 2017 г.
Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при частичной поддержке грантов РФФИ № 16-07-00556, № 18-07-00567.

насколько значительно этот эффект влияет на адекватность численных экспериментов натурным, а значит векторным задачам о распространении волноводных мод. Упомянутые выше теоретические результаты были сначала получены в скалярном приближении, а затем перенесены на векторный случай путём введения нестандартных функциональных норм. Перенесение этих конструкций на язык метода конечных разностей или метода конечных элементов часто представляет технически трудную задачу и приводит к весьма громоздким формулам.

Проектирование современных устройств интегральной и волоконной оптики приводит к тем же задачам о распространении и дифракции волноводных волн с той существенной для численных экспериментов оговоркой, что параметры волновода, например, линейные размеры, раньше бывшие примерно равными, могут отличаться друг от друга на четыре порядка. Так, например, высота волноводной линзы Люнеберга меньше её диаметра в 10^4 раз, что неизбежно приводит к вычислительным трудностям. В настоящее время созданы комплексы программ (Ansys, Comsol Multiphysics) и даже специализированные языки программирования (FreeFem++), позволяющие решать стандартные краевые и начально краевые задачи математической физики по методу конечных разностей в самых разнообразных его модификациях и обобщениях [30]. Следует, однако, заметить, что задача дифракции в волноводе становится корректной математической задачей только после постановки парциальных условий излучения [5, 6], которые не являются локальными в отличие от классических краевых условий, реализованных в общедоступных комплексах программ по умолчанию. Поэтому в настоящий момент представляется весьма актуальной разработка современного комплекса программ, в котором было бы реализовано вычисление нормальных мод волновода с произвольным заполнением и решение задачи дифракции именно в полной электромагнитной постановке и с парциальными условиями излучения.

Общедоступность такого комплекса не может быть достигнута, если в нём не будет реализована наглядная и в то же время весьма общая схема решения. На наш взгляд, ключевой момент в векторной задаче таится в отсутствии ответа на очень старый вопрос. Хорошо известно, что в некоторых криволинейных координатах, в том числе цилиндрических, можно свести уравнения Максвелла к паре уравнений Гельмгольца. Потенциалы вводились и именовались по разному, например, назывались функциями Боргниса или z-координатой векторов Герца [6, 31]. Поэтому волны в полом регулярном волноводе описываются двумя независимыми уравнениями Гельмгольца, что и даёт деление нормальных мод на TE- и TM-моды. Однако в волноводе со вставками такая декомпозиция оказывается невозможной хотя бы потому, что там возникают гибридные моды. На интуитивном уровне понятно, что в этом случае поле должно описываться парой уравнений Гельмгольца, «зацепляющихся» некоторым перекрёстным членом, величина которого характеризует явление гибридизации, а значит ошибку в применении скалярного приближения. Вопрос же состоит в том, как явно выписать эту пару уравнений Гельмгольца. Первые работы по математической теории волновода всегда имели в виду обобщение метода Фурье, поэтому вопрос о сведении системы уравнений Максвелла к двум скалярным уравнениям оказался в тени теоремы о полноте системы нормальных мод. В этой статье мы покажем, как выписать эту пару связанных уравнений Гельмгольца, если перейти к гамильтоновой или, выражаясь точнее, векторной форме этих уравнений. В основе нашего подхода [32] лежит двумерный аналог теоремы, известной в теории упругих тел как декомпозиция Гельмгольца [33].

1. Исключение продольных компонент из системы уравнений Максвелла

Рассмотрим волновод постоянного сечения S с идеально проводящими стенками, относительно заполнения ε, μ которого не будет делать пока никаких предположений. Ось Oz направим по оси цилиндра, нормаль к поверхности волновода будем обозначать как $\vec{n}$, касательный вектор, перпендикулярный к $\vec{e}_z$ как $\vec{\tau}$. В этой системе координат векторное поле $\vec{F}$ можно записать как $\vec{F} = \vec{F}_\perp + F_z\vec{e}_z$.

При решении задач в волноводах в полной векторной постановке можно выбирать в качестве основных различные наборы координат векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Обзор возможностей на примере спектральной задачи дан в [12].

Возьмём сейчас за основу систему уравнений Максвелла, из которой исключим E_z и H_z. Чтобы выписать эту систему, положим $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$, $\quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x)^T$.

Как известно, $(\operatorname{rot}\vec{A})_\perp = \vec{e}_z \times \partial_z\vec{A}_\perp + \nabla A_z \times \vec{e}_z$. Поэтому уравнения Максвелла можно записать так

$$\begin{cases} \vec{e}_z \times \partial_z\vec{H}_\perp + \nabla H_z \times \vec{e}_z + ik\varepsilon\vec{E}_\perp = 0, \\ (\operatorname{rot}\vec{H}_\perp)_z + ik\varepsilon E_z = 0, \\ \vec{e}_z \times \partial_z\vec{E}_\perp + \nabla E_z \times \vec{e}_z - ik\mu\vec{H}_\perp = 0, \\ (\operatorname{rot}\vec{E}_\perp)_z - ik\mu H_z = 0. \end{cases}$$

Исключая отсюда продольные компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, имеем

$$\begin{cases} \vec{e}_z \times \partial_z\vec{H}_\perp + \nabla \dfrac{1}{ik\mu}(\operatorname{rot}\vec{E}_\perp)_z \times \vec{e}_z + ik\varepsilon\vec{E}_\perp = 0, \\ \vec{e}_z \times \partial_z\vec{E}_\perp - \nabla \dfrac{1}{ik\varepsilon}(\operatorname{rot}\vec{H}_\perp)_z \times \vec{e}_z - ik\mu\vec{H}_\perp = 0. \end{cases} \tag{1}$$

На границе выполняются условия идеальной проводимости

$$\vec{E}_\perp \times \vec{n} = 0, \quad \vec{H}_\perp \cdot \vec{n} = 0, \quad E_z = 0. \tag{2}$$

2. Декомпозиция Гельмгольца

Теорема 1. *Пусть S — односвязная область на плоскости. Если вектор $\vec{A} = (A_x, A_y)^T$ удовлетворяет граничному условию $\vec{A}\cdot\vec{\tau} = 0$ и имеет первые непрерывные производные в S, то найдутся такие функции $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(S)$ и $v \in W_2^1(S)$, что $\vec{A} = \nabla u + \nabla' v$; при этом u — решение задачи*

$$\Delta u = \partial_x A_x + \partial_y A_y, \quad u|_{\partial S} = 0, \tag{3}$$

а v — решение задачи

$$\Delta v = \partial_x A_y - \partial_y A_x, \quad \nabla v \cdot n|_{\partial S} = 0. \tag{4}$$

Указанное представление единственно с точностью до аддитивных констант.

Доказательство. Задачи (3) и (4) имеют решение в $\overset{0}{W}{}_2^1(S)$ и $W_2^1(S)$ [34], которое во внутренних точках области S является дважды непрерывно дифференцируемыми в силу леммы Вейля [35]. Вектор $\vec{B} = \nabla u + \nabla' v - \vec{A}$ удовлетворяет в обобщённом смысле двум условиям

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = \Delta u - \partial_x A_x - \partial_y A_y = 0 \quad \text{и} \quad \partial_x B_y - \partial_y B_x = \Delta v - \partial_x A_y + \partial_y A_x = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{B} = \nabla w$, где w гармоническая функция. На границе

$$\vec{B} \cdot \tau = \nabla u \cdot \tau + \nabla' v \cdot \tau - \vec{A} \cdot \tau = 0,$$

то есть w принимает на границе постоянное значение. В силу принципа максимума это означает, что w =const, а $\vec{B} = 0$. □

Теорема 2. *Пусть S — односвязная область на плоскости. Если вектор $\vec{A} = (A_x, A_y)^T$ удовлетворяет граничному условию $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$ и имеет первые непрерывные производные в S, то найдутся такие функции $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(S)$ и $v \in W_2^1(S)$, что $\vec{A} = \nabla v + \nabla' u$; при этом v — решение задачи*

$$\Delta v = \partial_x A_x + \partial_y A_y, \quad \nabla v \cdot n|_{\partial S} = 0, \tag{5}$$

а u — решение задачи

$$\Delta u = \partial_x A_y - \partial_y A_x, \quad u|_{\partial S} = 0. \tag{6}$$

При этом потенциалы определены с точностью до аддитивных констант.

Доказательство. Задачи (6) и (5) имеют решение в $\overset{0}{W}{}_2^1(S)$ и $W_2^1(S)$ [34], которое во внутренних точках области S является дважды непрерывно дифференцируемыми в силу леммы Вейля [35]. Вектор $\vec{B} = \nabla v + \nabla' u - \vec{A}$ удовлетворяет в обобщённом смысле двум условиям:

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = \Delta v - \partial_x A_x - \partial_y A_y = 0 \quad \text{и} \quad \partial_x B_y - \partial_y B_x = \Delta u - \partial_x A_y + \partial_y A_x = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{B} = \nabla w$, где w гармоническая функция. На границе

$$\vec{B} \cdot n = \nabla v \cdot n + \nabla' u \cdot n - \vec{A} \cdot n = 0,$$

то есть $\nabla w \cdot n = 0$. Это означает, что w =const, а $\vec{B} = 0$. □

3. Уравнения Максвелла, записанные относительно потенциалов

Теоремы 1, 2 позволяют в случае волноводов с односвязным сечением, не ограничивая общности рассмотрения, искать решение системы (1) в виде

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \nabla' u_h. \tag{7}$$

Если сечение является многосвязным, то искать решение в таком виде можно, сознавая, что так теряются некоторые «электростатические» решения.

Введённые здесь на основании теоремы 1 четыре скалярные функции будем называть потенциалами и всегда предполагать, что они удовлетворяют граничным условиям

$$u_e = u_h = n \cdot \nabla v_e = n \cdot \nabla v_h \tag{8}$$

на границе волновода. При этом автоматически выполняются два из трёх граничных условий (2): $\vec{E}_\perp \cdot \vec{\tau} = \nabla u_e \cdot \vec{\tau} + \nabla' v_e \cdot \vec{\tau} = 0$, $\vec{H}_\perp \cdot \vec{n} = \nabla v_h \cdot \vec{n} + \nabla' u_h \cdot \vec{n} = 0$.

Что же касается третьего условия E_z, то его можно записать как $(\operatorname{rot} \vec{H}_\perp)_z = 0$ или

$$\Delta u_h|_{\partial S} = 0. \tag{9}$$

В простых случаях на физическом уровне строгости третье условие выводят из первых двух, и поэтому про него можно было бы забыть. На самом деле, при обобщённой формулировке задачи это условие появляется вполне естественным образом.

Подставляя выражения (7) в уравнения Максвелла (1), получим

$$\begin{cases} \nabla' \left(\partial_z v_h - \dfrac{1}{ik\mu} \Delta v_e \right) + ik\varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik\varepsilon \nabla u_e = 0, \\ \nabla' \left(\partial_z u_e + \dfrac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) - ik\mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik\mu \nabla v_h = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Эта система представляет собой уравнения Максвелла, записанные относительно 4-х потенциалов.

Если ε и μ зависят от x, y, то эта система не распадается на две: отдельно для u-потенциалов, отдельно для v-потенциалов, в чем, собственно говоря, и состоит упомянутое выше явление гибридизации мод. Частный случай, когда ε и μ не зависят от x и y, интересен тем, что он позволяет разглядеть в этой системе пару уравнений Гельмгольца.

4. Частный случай, когда система распадается на два скалярных уравнения Гельмгольца

Пусть ε и μ не зависят от x и y. Не делая пока никаких предположений об их зависимости от z, можем переписать систему (10) следующим образом

$$\begin{cases} \nabla' \left(\partial_z v_h - \dfrac{1}{ik\mu} \Delta v_e + ik\varepsilon v_e \right) - \nabla \left(\partial_z u_h - ik\varepsilon u_e \right) = 0, \\ \nabla' \left(\partial_z u_e + \dfrac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h - ik\mu u_h \right) - \nabla \left(\partial_z v_e + ik\mu v_h \right) = 0. \end{cases}$$

Всякое решение этой системы, удовлетворяющее граничным условиям $u_e = \Delta u_e = 0$, $\nabla v_e \cdot n = \nabla \Delta v_e \cdot n = 0$, в силу теорем 1 и 2 удовлетворяет системе из четырёх уравнений, которая распадается на две системы:

$$\begin{cases} \partial_z v_h - \dfrac{1}{ik\mu} \Delta v_e + ik\varepsilon v_e = 0, \\ \partial_z v_e + ik\mu v_h = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_z u_e + \dfrac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h - ik\mu u_h = 0, \\ \partial_z u_h - ik\varepsilon u_e = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Исключая v_h и u_e, получим два уравнения

$$\mu \partial_z \frac{1}{\mu} \partial_z v_e + \Delta v_e + k^2 \varepsilon \mu v_e = 0, \quad \varepsilon \partial_z \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u_h + \Delta u_h + k^2 \varepsilon \mu u_h = 0. \tag{12}$$

В том случае, когда ε и μ не зависят и от z, уравнения (12) переходят в уравнение Гельмгольца.

Переход от системы уравнений первого порядка к эквивалентному им уравнению второго порядка хорошо известен в классической механике как переход от уравнений Гамильтона к уравнениям Ньютона. Следуя этой аналогии, будем называть системы (11) гамильтоновыми формами уравнения Гельмгольца (12). Однако этот термин подразумевает проведение дополнительного исследования симплектической структуры, связанной с этими уравнениями. Поэтому мы будем говорить осторожнее, что зацепление между уравнениями Гельмгольца мы выразили, переписав сами уравнения Гельмгольца в векторной форме.

Заключение

Введение четырёх потенциалов вместо двух позволило свести систему уравнений Максвелла в волноводе к системе (10), которую можно трактовать как систему двух связанных уравнений Гельмгольца, записанных в векторной форме. По всей видимости, эта форма будет очень удобна для численно-аналитического анализа по неполному методу Галёркина, однако сказанное требует дальнейшего исследования.

Литература

1. *Самарский А. А., Тихонов А. Н.* О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959–970.
2. *Свешников А. Г.* К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 170–179.
3. *Свешников А. Г.* К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 2. — С. 314–326.
4. *Свешников А. Г.* Неполный метод Галеркина // ДАН СССР. — 1977. — Т. 236, № 5. — С. 1076–1079.
5. *Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Математические модели электродинамики. — Москва: Высшая школа, 1991. — 224 с.
6. *Могилевский И. Е., Свешников А. Г.* Математические задачи теории дифракции. — Москва: Физический факультет МГУ, 2010. — 197 с.
7. *Chew W. C.* Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides. — 2012. — `http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwAll20121211.pdf`.
8. *Боголюбов А. Н., Минаев Д. В.* Синтез плоского волноводного перехода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1993. — Т. 34, № 2. — С. 67–69.
9. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Минаев Д. В.* Расчёт согласующего волноводного перехода между двумя коаксиальными волноводами овальной формы // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1997. — № 4. — С. 51–54.
10. *Боголюбов А. Н., Будкарев А. А.* Применение метода конечных элементов к исследованию волноводного перехода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 2003. — № 4. — С. 6–9.
11. *Делицын А. Л.* О применении метода конечных элементов к задаче сочленения коаксиального и радиальных волноводов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2016. — № 4. — С. 30–35.
12. *Боголюбов А. Н., Едакина Т. В.* Применение вариационно-разностных методов для расчета диэлектрических волноводов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1991. — Т. 32, № 2. — С. 6–14.
13. *Боголюбов А. Н., Едакина Т. В.* Расчет диэлектрических волноводов со сложной формой поперечного сечения вариационно-разностынм методом // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1992. — Т. 34, № 3. — С. 72–74.
14. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л.* Расчет диэлектрических волноводов методом конечных элементов, исключающий появление нефизических решений // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 1996. — № 1. — С. 9–13.
15. *Лавренова А. В.* Расчёт неоднородности волновода методом конечных элементов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 2004. — № 1. — С. 22–24.

16. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Лавренова А. В.* Метод конечных элементов в задаче волноводной дифракции // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2004. — Т. 9, № 8. — С. 22–25.
17. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Лавренова А. В.* Применение метода конечных элементов в волноводных задачах дифракции // Радиотехника. — 2004. — № 12. — С. 20–26.
18. *Боголюбов А. Н., Лавренова А. В.* Математическое моделирование дифракции на неоднородности в волноводе с использованием смешанных конечных элементов // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 122–128.
19. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г.* О полноте корневых векторов радиоволновода // Доклады Академии Наук. — 1999. — С. 458–460.
20. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г.* О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 38, № 11. — С. 1891–1899.
21. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д.* О корневых векторах цилиндрического волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 1. — С. 126–129.
22. *Делицын А. Л.* О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — № 10. — С. 1883–1888.
23. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г.* Об условиях разрешимости задачи возбуждения радиоволновода // Доклады Академии Наук. — 2000. — № 4. — С. 1–4.
24. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г.* О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 11. — С. 1869–1888.
25. *Малых М. Д.* О способе повышения нижней границы непрерывного спектра в задачах спектральной теории волноведущих систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — № 4. — С. 3–5.
26. *Делицын А. Л.* О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2007. — Т. 71, № 3. — С. 61–112.
27. *Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е.* Векторная модель волновода с входящими рёбрами // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). — 2012. — № 2.
28. *Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е.* Математическое моделирование нерегулярного волновода с входящими ребрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — № 6. — С. 1058–1062.
29. *Ерохин А. И.* Применение проекционных методов к расчету волноведущих и резонансных структур с особенностями // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — № 1. — С. 192–196.
30. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2008. — 256 с.
31. *Zhang K., Li D.* Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics. 2nd ed. — Berlin: Springer, 2008. — 711 p.
32. On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials / M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2017. — Pp. 1–13. — DOI: 10.1080/09205071.2017.1409137.
33. *Лав Дж.* Теория упругости. — ГТТИ, 1939.
34. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — Москва: Наука, 1973. — 407 с.
35. *Hellwig G.* Differential Operators of Mathematical Physics. — Reading, MA: Addison-Wesley, 1967. — 304 p.

UDC 519.633.2
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48

On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations

M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik

Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

The investigation of the electromagnetic field in a regular homogeneous waveguide reduces to the investigation of two independent boundary value problems for the Helmholtz equation, corresponding to TE- and TM-modes. In the case of an inhomogeneous waveguide TE- and TM-modes are connected to each other, which in numerical experiments can not always be fully taken into account. In this paper we show how to rewrite the Helmholtz equations in vector form to express this relationship explicitly.

In the article the cylindrical waveguide with perfectly conducting walls is considered, but we don't make any assumptions about filling of waveguide. The introduced approach is based on two-dimensional analogue of the theorem known in the theory of elastic bodies as the Helmholtz decomposition. On its basis, we introduce four potentials, instead of two potentials, usually used in the theory of hollow waveguides. It is proved that any solution of Maxwell's equations in a waveguide that satisfies the boundary conditions of ideal conductivity on the boundaries of a waveguide can be represented with the help of these potentials. The system of Maxwell's equations is written with respect to these potentials and it is shown that this system has the form of two independent Helmholtz equations in the case of a hollow waveguide.

Key words and phrases: waveguide, Maxwell's equations, Helmholtz Equation, normal modes, Sagemath

References

1. A. A. Samarskiy, A. N. Tikhonov, On the Representation of a Field in a Waveguide in the Form of a Sum of Fields TE and TM, Zhurnal tekhnicheskoy fiziki 18 (7) (1948) 959–970, in Russian.
2. A. G. Sveshnikov, The Basis for a Method of Calculating Irregular Waveguides, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 3 (1) (1963) 219–232.
3. A. G. Sveshnikov, A Substantiation of a Method for Computing the Propagation of Electromagnetic Oscillations in Irregular Waveguides, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 3 (2) (1963) 413–429.
4. A. G. Sveshnikov, Incomplete Galerkin Method, DAN USSR 236 (5) (1977) 1076–1079, in Russian.
5. A. S. Il'inskij, V. V. Kravcov, A. G. Sveshnikov, Mathematical Models of Electrodynamics, Vysshaja shkola, Moscow, 1991, in Russian.
6. I. E. Mogilevskii, A. G. Sveshnikov, Mathematical Problems of the Theory of Diffraction, Faculty of Physics MSU, Moscow, 2010, in Russian.
7. W. C. Chew, Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides (2012). URL `http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwAll20121211.pdf`
8. A. N. Bogolyubov, D. V. Minaev, Synthesis of a Plane Waveguide Transition, Moscow University Physics Bulletin 48 (2) (1993) 63–64.
9. A. G. Sveshnikov, A. N. Bogolyubov, D. V. Minaev, Calculation of the Matching Waveguide Transition between Two Coaxial Waveguides of the Oval Shape, Moscow University Physics Bulletin (4) (1997) 51–54, in Russian.
10. A. N. Bogolyubov, A. A. Budkarev, Studying the Waveguide Transition by the Finite Element Method, Moscow University Physics Bulletin 58 (4) (2003) 6–10.
11. A. L. Delitsyn, Finite-Element Methods for Junction Problems for Coaxial and Radial Waveguides, Moscow University Physics Bulletin 71 (4) (2016) 368–374.

12. A. N. Bogolyubov, T. V. Eygakina, Application of Variational-Difference Methods to Dielectric Waveguide Calculations, Moscow University Physics Bulletin 46 (2) (1991) 7–13.
13. A. N. Bogolyubov, T. V. Eygakina, Calculation of Dielectric Waveguides with a Complicated Cross-Sectional Shape by the Variational-Difference Method, Moscow University Physics Bulletin 34 (3) (1992) 72–74, in Russian.
14. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, Calculation of Dielectric Waveguides by the Finite Element Method, Eliminating the Appearance of Unphysical Solutions, Moscow University Physics Bulletin (1) (1996) 9–13, in Russian.
15. A. V. Lavrenova, Calculation of the Waveguide Heterogeneity by the Finite Element Method, Moscow University Physics Bulletin (1) (2004) 22–24, in Russian.
16. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. V. Lavrenova, Finite Element Method in the Problem of Waveguide Diffraction, Elektromagnitnyye volny i elektronnyye sistemy 9 (8) (2004) 22–25, in Russian.
17. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. V. Lavrenova, Application of the Finite Element Method in Waveguide Diffraction Problems, Radiotekhnika (12) (2004) 20–26, in Russian.
18. A. N. Bogolyubov, A. V. Lavrenova, Mathematical Modeling of Diffraction on an Inhomogeneity in a Waveguide Using Mixed Finite Elements, Mathematical Models and Computer Simulations 1 (1) (2009) 131–137.
19. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, On the Completeness of Root Vectors of a Radio Waveguide, Doklady Mathematics (3) (1999) 453–455.
20. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, A. G. Sveshnikov, On the Problem of the Excitation of a Waveguide with an Inhomogeneous Medium, Computational Mathematics and Mathematical Physics 38 (11) (1999) 1815–1823.
21. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, M. D. Malykh, On the Root Vectors of a Cylindrical Waveguide, Computational Mathematics and Mathematical Physics 41 (1) (2001) 121–124.
22. A. L. Delitsyn, On the Completeness of the System of Eigenvectors of Electromagnetic Waveguides, Computational Mathematics and Mathematical Physics (10) (2011) 1771–1776.
23. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, Solvability Conditions for the Radio Waveguide Excitation Problem, Doklady Mathematics (1) (2000) 126–129.
24. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, A. G. Sveshnikov, On the Problem of Exciting a Waveguide with an Inhomogeneous Medium, Computational Mathematics and Mathematical Physic 39 (11) (1999) 1794–1813.
25. M. D. Malykh, On the Method of Raising the Lower Boundary of a Continuous Spectrum in Problems of the Spectral Theory of Waveguiding Systems, Moscow University Physics Bulletin (4) (2006) 3–5, in Russian.
26. A. L. Delicyn, On the Formulation of Boundary Value Problems for the System of Maxwell Equations in a Cylinder and Their Solvability, Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya 71 (3) (2007) 61–112, in Russian.
27. A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevsky, Vector Waveguide Model with Incoming Edges, Zhurnal radioelektroniki (electronic journal) (2), in Russian.
28. A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevskii, Mathematical simulation of an irregular waveguide with reentering edges, Computational Mathematics and Mathematical Physics (6) (2012) 932–936.
29. A. I. Erokhin, Application of Projective Methods to Calculation the Waveguide and Resonant Structures with Features, Vychislitel'nye metody i programmirovanie (1) (2012) 192–196, in Russian.
30. M. Ju. Zhukov, E. V. Shirjaeva, Usege of the FEA FreeFem ++ in problems of hydrodynamics, electrophoresis and biology, Southern Federal University, Rostov-on-Don, 2008, in Russian.
31. K. Zhang, D. Li, Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics. 2nd ed., Springer, Berlin, 2008.

32. M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev, On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials, Journal of Electromagnetic Waves and Applications (2017) 1–13DOI: 10.1080/09205071.2017.1409137.
33. J. Love, Theory of Elasticity, GTTI, 1939, in Russian.
34. O. A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.
35. G. Hellwig, Differential Operators of Mathematical Physics, Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.

Для цитирования:
Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А. О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39–48. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48.

For citation:
Malykh M. D., Sevastianov A. L., Sevastianov L. A., Tyutyunnik A. A. On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 39–48. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48. In Russian.

Сведения об авторах:
Малых Михаил Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: malykhmd@yandex.ru, тел.: +7 (495)9550999)
Севастьянов Антон Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: sevastianov_al@rudn.university, тел.: +7(495)9522572)
Севастьянов Леонид Антонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: sevastianov_la@rudn.university, тел.: +7(495)9522572)
Тютюнник Анастасия Александровна — ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: tyutyunnik_aa@rudn.university, тел.: +7 (495)9522572)

Information about the authors:
Malykh M. D. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: malykhmd@yandex.ru, phone: +7 (495)9550999)
Sevastianov A. L. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: sevastianov_al@rudn.university, phone: +7(495)9522572)
Sevastianov L. A. — professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: sevastianov_la@rudn.university, phone: +7(495)9522572)
Tyutyunnik A. A. — assistant of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: tyutyunnik_aa@rudn.university, phone: +7 (495)9522572)