УДК 533.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409

Уединённая правополяризованная электромагнитная волна в релятивистской плазме

В. Г. Дорофеенко*, **В. Б. Красовицкий***, **В. А. Туриков**†

* *Отдел кинетических уравнений*
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Миусская пл., д. 4, Москва, Россия, 125047

† *Кафедра прикладной физики*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе проведено исследование свойств нелинейной лазерной волны, распространяющейся в нагретой плазме вдоль сильного внешнего магнитного поля в условиях электронно-циклотронного резонанса. Сильная нелинейность такого процесса обусловлена релятивистским движением электронов и резонансным возрастанием пондеромоторной силы, действующей на электроны со стороны волны. Из гидродинамических уравнений и уравнений Максвелла получена система уравнений, описывающая огибающую импульса правополяризованной лазерной волны. Посредством численного интегрирования этой системы уравнений найдены солитонные решения для случая холодной плазмы. Такие решения имеет вид солитонов огибающих, содержащих внутри себя плазменные колебания. Получено аналитическое выражение для интеграла плотности энергии в холодной плазме. Для нагретой плазмы из численных результатов следует, что в условиях циклотронного резонанса солитонное решение становится неустойчивым. При этом плотность энергии перестаёт сохраняться, но выполняется закон сохранения плотности продольного импульса электронов. Сделан вывод о том, что нелинейное насыщение амплитуды поля возникает в результате разделения зарядов плазмы под действием давления электромагнитного излучения. При этом дискретный набор значений несущей частоты для солитона огибающей определяется отношением частоты нелинейных продольных колебаний электрона в поле электромагнитной волны к ленгмюровской частоте плазмы. В случае плазмы малой плотности найденный численным интегрированием дискретный спектр частот переходит в непрерывный.

Ключевые слова: магнитоактивная плазма, правополяризованная волна, релятивистские электроны, фазовая и групповая скорости, солитонные решения

1. Введение

Известно [1–3], что электрон может быть ускорен до высоких энергий в электромагнитном поле плоской волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля со скоростью света. Характерной особенностью этого способа ускорения является рост энергии частицы поперёк магнитного поля с последующей перестройкой поперечного движения электрона в продольное под действием силы Лоренца.

В работе [4] было показано, что существуют электромагнитные импульсы, распространяющиеся в холодной плазме вдоль сильного магнитного поля в условиях циклотронного резонанса, имеющие вид солитонов со «встроенными» ленгмюровскими колебаниями. При этом насыщение амплитуды поля возникает из-за разделения зарядов плазмы под действием давления излучения, а дискретный набор частот определяется отношением частоты нелинейных колебаний плазмы к ленгмюровской частоте.

Распространение уединённой ионно-акустической волны большой амплитуды в замагниченной плазме рассмотрено в работе [5]. Проблема решена без учёта нейтральности плазмы в пределах импульса, а потенциал определялся уравнением

Статья поступила в редакцию 8 июня 2017 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008. госзадание 3.2223.2017/4.6).

Пуассона. Найдены решения в форме сверхзвуковых и почти звуковых уединённых волн, распространяющихся относительно магнитного поля. Импульс имеет несколько пиков и существует для дискретного набора параметров волны. Амплитуда и частота уединённой волны определены как функции числа Маха, определяющего угол распространения относительно магнитного поля. Динамика солитонов в электронно-ионной плазме аналитически и численно исследована в работе [6].

2. Основные уравнения

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в плазме вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, направленного вдоль оси z (см. рис. 1):

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, k), \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, 0).$$

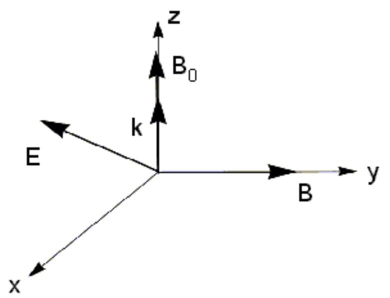

Рис. 1. Геометрия электромагнитной волны

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ описываются уравнениями Максвелла:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_x = \frac{4\pi e}{c} n v_x, \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_y = \frac{4\pi e}{c} n v_y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi e(n - n_0), \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi \mathrm{env}_z = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал, n — плотность электронов, n_0 — плотность невозмущённой плазмы, v_z — гидродинамическая скорость электронов. Ионы считаем неподвижными.

Движение электронов будем описывать релятивистскими гидродинамическими уравнениями

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right) p_x = e\left[E_x + \frac{1}{c}\left(v_y B_0 - v_z B_y\right)\right], \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right) p_y = e\left[E_y + \frac{1}{c}\left(v_z B_x - v_x B_0\right)\right], \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right) p_z = e\left[E_z + \frac{1}{c}\left(v_x B_y - v_y B_x\right)\right] - \frac{T}{n}\frac{\partial}{\partial z}\frac{n}{\gamma}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv_z) = 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ — релятивистский импульс электронов, T — электронная температура.

Заметим, что в согласии с работой [7], массу электрона m в уравнениях движения (4)–(6) следует заменить эффективной тепловой массой m_T, которая определяется соотношением:

$$m_T = m\frac{K_3\left(mc^2/T\right)}{K_2\left(mc^2/T\right)},$$

где $K_2(z)$ и $K_3(z)$ — функции Макдональда.

3. Поперечное и продольное движения плазмы

Введём поперечные $\tilde{x}(t,z), \tilde{y}(t,z)$ и продольную $\tilde{z}(t,z)$ координаты смещения электрона от положения равновесия с помощью соотношений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{x} = v_x, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{y} = v_y, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{z} = v_z. \tag{8}$$

Уравнения (8) можно рассматривать как определение координат смещения $\tilde{x}(t,z)$, $\tilde{y}(t,z)$, $\tilde{z}(t,z)$, которые функционально не связаны с поперечными координатами x, y системы отсчёта. Заметим, что ненулевое поперечное смещение электрона следует из наличия у него ненулевой поперечной скорости и не приводит к появлению зависимости функций поля от поперечных координат, если все электроны в поперечной плоскости движутся синхронно. Поскольку компоненты поля и гидродинамических переменных не зависят от поперечных координат, прямое интегрирование уравнений (1)–(4) с учётом соотношений (8) приводит к закону сохранения поперечного импульса:

$$p_\perp + \frac{e}{c}A_\perp + m_T\omega_B r_\perp = 0, \tag{9}$$

где $\omega_B = eB_0/m_Tc$ и введены комплексные величины:

$$p_\perp = p_x + ip_y, \quad A_\perp = A_x + iA_y, \quad r_\perp = \tilde{x} + i\tilde{y}.$$

Мы предполагаем, что в отсутствие поля импульс и поперечное смещение электрона равны нулю. Из уравнений (3) для продольного поля и уравнения непрерывности (7) получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)E_z = -4\pi en_0v_z.$$

Учитывая, что $v_z \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)$, интеграл последнего уравнения можно записать в виде:

$$E_z = -4\pi en_0\tilde{z}. \tag{10}$$

4. Нелинейный циклотронный резонанс

После перехода к безразмерным переменным из (1), (2) и (4)–(5) получаем следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p}{\gamma}\frac{\partial}{\partial Z}\right)\xi = -\frac{i\xi + A}{\gamma}, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{p}{\gamma}\frac{\partial}{\partial Z}\right)p=-\mu\zeta+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial A^*}{\partial Z}+\frac{\mathrm{d}\xi^*}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial A}{\partial Z}\right)-\Theta\frac{n_0}{n}\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{n}{n_0\gamma}\right), \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)A=\mu\frac{n}{n_0}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}, \tag{13}$$

где введены следующие обозначения:

$$\xi=\frac{\omega_B}{c}(\tilde{x}+i\tilde{y}),\quad \zeta=\frac{\omega_B}{c}\tilde{z},\quad p=\gamma\frac{v_z}{c},\quad A=\frac{e}{m_Tc^2}\left(A_x+A_y\right),\quad E=\frac{eE_z}{m_T\omega_Bc},$$
$$\tau=\omega_Bt,\quad Z=\frac{\omega_B}{c}z,\quad \Theta=\frac{T}{m_Tc^2},\quad \mu=\frac{\omega_p^2}{\omega_B^2},\quad \omega_p^2=\frac{4\pi e^2n_0}{m_T},\quad \omega_B=\frac{eB_0}{m_Tc}, \tag{14}$$
$$\gamma=\sqrt{1+p^2+|i\xi+A|^2}.$$

Будем искать решение системы уравнений (11)–(13) в виде бегущего импульса огибающей правополяризованной волны:

$$A=\mathbf{A}(\psi)\exp[i\Phi(\tau,Z)],\quad \xi=\Xi(\psi)\exp[i\Phi(\tau,Z)],\quad \zeta=\zeta(\psi),\quad p=p(\psi), \tag{15}$$

где $\Phi(\tau,Z)$ — фаза волны, которая выбирается таким образом, чтобы величина Ξ оставалась вещественной, а амплитуда зависела от автомодельной переменной $\psi=\tau-Z/u$.

Частота и волновое число определяются равенствами:

$$\omega=\frac{\partial\Phi}{\partial\tau},\quad \kappa=-\frac{\partial\Phi}{\partial Z},$$

так что выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial Z}+\frac{\partial\kappa}{\partial\tau}=0. \tag{16}$$

В этом случае

$$\kappa=-\frac{\partial\Phi}{\partial Z},\quad \frac{n}{n_0}=\left(1-\frac{p}{\gamma u}\right)^{-1},$$

а безразмерные уравнения (11)–(13) можно записать в виде:

$$\omega-\frac{\kappa p}{\gamma}=-\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{\mathrm{Im}\,(\mathbf{A})}{\Xi}\right), \tag{17}$$

$$\Xi'=-\mathrm{Re}\,(\mathbf{A})\,\frac{1}{\gamma-\frac{p}{u}},\quad \zeta'=\frac{p}{\gamma-\frac{p}{u}}, \tag{18}$$

$$\left(1-\frac{p}{\gamma u}\right)p'=-\mu\zeta+\frac{1}{\gamma u}\left[\Xi\left((\omega-\Omega)\mathrm{Re}(\mathbf{A})+\mathrm{Im}(\mathbf{A}')\right)+\mathrm{Re}(\mathbf{A}'\mathbf{A}^*)-\frac{\Theta\left(\gamma-\frac{p}{u}\right)'}{\gamma-\frac{p}{u}}\right], \tag{19}$$

$$\left(\omega^2-\kappa^2\right)\mathbf{A}-\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathbf{A}''-2i\mathbf{A}'\left(\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\omega+\frac{\Omega}{u^2}\right)-$$
$$-i\mathbf{A}\left(\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\omega+\frac{\Omega}{u^2}\right)'=\frac{\mu}{\gamma-\frac{p}{u}}(\mathbf{A}+i\,\Xi), \tag{20}$$

где штрихом обозначена производная по ψ. Так как ω и κ также зависят только от ψ, то уравнение (16) имеет интеграл: $\omega - \kappa u = \Omega \equiv \mathrm{const}$.

Уравнение (17) является нелинейным обобщением условия циклотронного резонанса. Заметим, что система (17)–(20) не требует медленности изменения амплитуды волны и остаётся справедливой при $|\mathbf{A}'| \sim |\omega\mathbf{A}|$. Продольное смещение электронов $\zeta(\psi)$ и продольное электрическое поле $E = -\mu\zeta(\psi)$ не зависят от циклотронной фазы Φ, как это имеет место и в линейной теории, что является следствием предположения (15) о циркулярной поляризации волны. Заметим также, что требование $\omega = \omega(\psi)$, $\kappa = \kappa(\psi)$ приводит к следующему выражению для циклотронной фазы Φ:

$$\Phi = \int \omega(\psi)\mathrm{d}\psi + \frac{\Omega}{u} Z.$$

Т.е. наша система математически эквивалентна уравнениям, получаемым из исходных с помощью подстановки:

$$f(\tau, Z) = f(\psi)\exp\left(i\frac{\Omega}{u}Z\right). \tag{21}$$

Однако подстановка (21) не содержит физически осмысленного разделения на поперечные (циклотронные) и продольные (плазменные) колебания.

В отсутствие теплового разброса $\Theta = 0$ сохраняется интеграл плотности энергии:

$$W = \gamma + \frac{1}{2}\mu\zeta^2 + \frac{1}{2\mu}\left(\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\omega^2 + \frac{\Omega^2}{u^2}\right)|\mathbf{A}|^2 + \\ + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\left(i\omega\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{A}'\mathbf{A}^*\right) + |\mathbf{A}'|^2\right) = 1. \tag{22}$$

В случае конечного теплового разброса $\Theta > 0$ плотность энергии перестаёт сохраняться, однако, вводя потенциал

$$\varphi = \int\limits_0^\psi \zeta(\psi)\mathrm{d}\psi',$$

можно записать закон сохранения плотности продольного импульса:

$$p + \frac{\mu}{2u}\zeta^2 + \mu\varphi - \frac{\Theta}{\gamma u - p} + \frac{1}{2\mu u}\left(\left(\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)(\omega - \Omega)^2 - \Omega^2\right)|\mathbf{A}|^2 + \\ + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)|\mathbf{A}'|^2 + i(\omega - \Omega)(\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{A}'\mathbf{A}^*)\right) = P. \tag{23}$$

Заметим, однако, что интеграл продольного импульса (23) требует введения дополнительной переменной φ, и поэтому, в отличие от интеграла энергии (22), не приводит к реальному ограничению траектории движения.

Получить аналитические решения системы уравнений (17)–(20) в общем случае весьма сложно. В связи с этим было проведено численное интегрирование этой системы в широкой области изменения параметров. Результаты расчётов показали, что для холодной плазмы существуют солитоны огибающей (рис. 2) с дискретным спектром несущей частоты. В нагретой плазме полученные решения не удовлетворяли солитонным граничным условиям при $\psi \to +\infty$ (рис. 3). Отсюда можно сделать вывод о том, что при конечных температурах плазмы авторезонансные солитоны огибающей формироваться не могут.

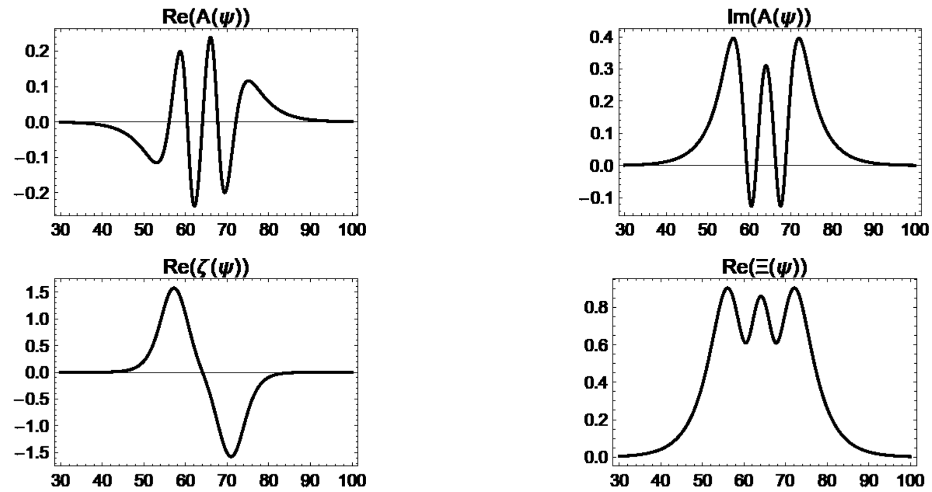

Рис. 2. Солитонное решение в холодной плазме,
$\mu = 0{,}0846$, $u = 0{,}754$, $\Omega = -0{,}387$, $\Theta = 0$

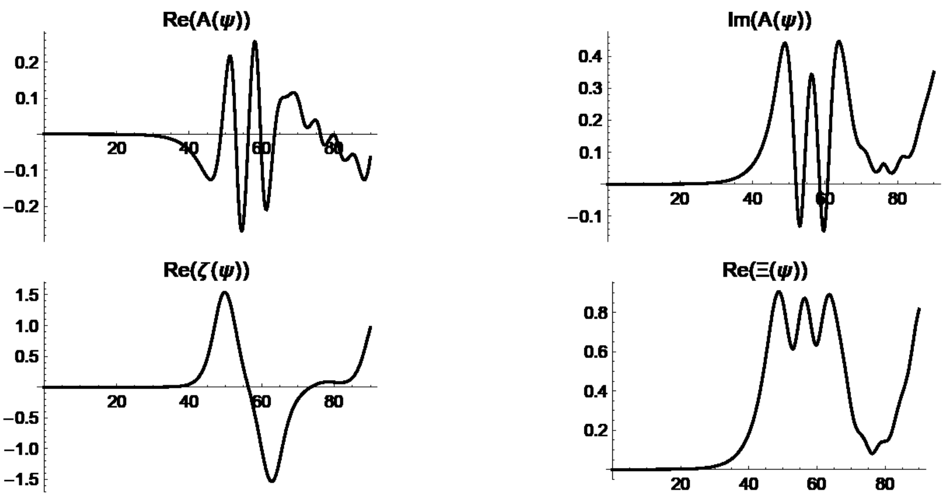

Рис. 3. Электромагнитный импульс в нагретой плазме,
$\mu = 0{,}0846$, $u = 0{,}754$, $\Omega = -0{,}387$, $\Theta = 0{,}1$

5. Заключение

В работе получена система уравнений (17)–(20) для огибающей нелинейной правополяризованной лазерной волны в нагретой плазме. Анализ численных решений этой системы показал, что в условиях электронно-циклотронного резонанса в холодной плазме такая волна может переходить в солитон огибающей. При этом продольные плазменные колебания целиком заперты внутри солитона. Такие решения возникают из-за сильной нелинейности, связанной с релятивистским движением электронов и резонансным возрастанием пондеромоторной силы. Численное интегрирование для плазмы с конечной температурой показало, что в условиях циклотронного резонанса устойчивых солитонных решений не существует. Построено аналитическое выражение для интеграла продольного импульса электронов в нагретой плазме. Сделан вывод о том, что нелинейное насыщение амплитуды излучения связано с возбуждением продольных колебаний плазмы под действием пондеромоторной силы. В этом случае дискретный набор значений несущей частоты солитона огибающей зависит от отношения частоты нелинейных продольных колебаний к ленгмюровской частоте плазмы.

Литература

1. *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Резонансные явления при движении частиц в плоской электромагнитной волне // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44, № 1. — С. 261–269.
2. *Давыдовский В. Я.* О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43, № 3. — С. 886–888.
3. *Roberts C. S., Buchsbaum S. J.* Motion of a Charged Particle in a Constant Magnetic Field and a Transverse Electromagnetic Wave Propagating along the Field // Physical Review. — 1964. — Vol. 135. — Pp. 381–389.
4. *Красовицкий В. Б., Прудских В. В.* Авторезонансный солитон в плазме // Физика плазмы. — 1994. — Т. 20. — С. 564–570.
5. *Прудских В. В.* Сверхзвуковые и околозвуковые уединенные ионно-звуковые волны в замагниченной плазме // Физика плазмы. — 2010. — Т. 36. — С. 1052–1058.
6. Weakly Relativistic One-Dimensional Laser Pulse Envelope Solitons in a Warm Plasma / S. Poornakala, A. Das, P. K. Kaw, A. Sen, Z. M. Sheng, Y. Sentoku, K. Mima, K. Nishkava // Physics of Plasmas. — 2002. — Vol. 9. — Pp. 3802–3810.
7. *Джавахишвили Д. И., Цинцадзе Н. Л.* Явления переноса в полностью ионизирован-ной ультрарелятивистской плазме // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 64. — С. 1214–1325.

UDC 533.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409

Solitary Right Hand Polarized Electromagnetic Wave in Relativistic Plasma

V. G. Dorofeenko*, V. B. Krasovitskiy*, V. A. Turikov†

* *Department of Kinetic Equations*
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences
4 Miusskaya pl., Moscow, 125047, Russian Federation

† *Department of Applied Physics*
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

In this paper of the nonlinear laser wave propagation in the hot plasma along the strong external magnetic field under the electron cyclotron resonance conditions is investigated. The strong nonlinearity of such a process is caused by the relativistic electron movement and resonance wave ponderomotive force acting on the electrons. The system of equations for the envelope right hand polarized laser pulse is derived using the hydrodynamics and Maxwell's equations. The numerical integration of this system for the cold plasma case discovered the soliton solutions. This kind of solutions take a form of the envelope solitons containing inside them the plasma oscillations. The analytical expression for the energy density integral in a cold plasma is derived. It follows from the numerical results that for a hot plasma under cyclotron resonance conditions the soliton solution becomes unstable. In this case the energy density conservation breaks down, but electron momentum density conserves. It is concluded that the nonlinear saturation of the field amplitude is due to the plasma charge separation under electromagnetic radiation pressure. In this case the discrete set of the envelope soliton carrier frequency is determined by the ratio of the frequency of the nonlinear longitudinal electron oscillations to the Langmuir frequency of plasma. For the low density plasma the discrete frequency spectrum obtained by the numerical integration transforms to the continuous one.

Key words and phrases: magnetoactive plasma, right hand polarized wave, relativistic electrons, phase and group velocities, soliton solutions

References

1. A. A. Kolomensky, A. N. Lebedev, Resonance Phenomena During the Particles Movement in a Plane Electromagnetic Wave, JETP 44 (1) (1963) 261–269, in Russian.
2. V. Ya. Davydovskii, About the Possibility of the Resonance Acceleration of Charged Particles by Electromagnetic Waves in a Constant Magnetic Field, JEPT 43 (3) (1962) 886–888, in Russian.
3. C. S. Roberts, S. J. Buchsbaum, Motion of a Charged Particle in a Constant Magnetic Field and a Transverse Electromagnetic Wave Propagating along the Field, Physical Review 135 (1964) 381–389.
4. V. B. Krsovitskiy, V. V. Prudskikh, Autoresonant Soliton in Plasma, Plasma Physics Reports 20 (1994) 564–570, in Russian.
5. V. V. Prudskikh, Supersonic and Near-Sonic Solitary Ion-Sound Waves in a Magnetized Plasma, Plasma Physics Reports 36 (2010) 1052–1058, in Russian.
6. S. Poornakala, A. Das, P. K. Kaw, A. Sen, Z. M. Sheng, Y. Sentoku, K. Mima, K. Nishkava, Weakly Relativistic One-Dimensional Laser Pulse Envelope Solitons in a Warm Plasma, Physics of Plasmas 9 (2002) 3802–3810.
7. D. I. Dzhavakhishvili, N. L. Tsintsadze, Transport Phenomena in a Completely Ionized Ultrarelativistic Plasma, JEPT 64 (1973) 1214–1325, in Russian.

Для цитирования:
Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б., Туриков В. А. Уединённая правополяризованная электромагнитная волна в релятивистской плазме // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 401–409. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409.

For citation:
Dorofeenko V. G., Krasovitskiy V. B., Turikov V. A. Solitary Right Hand Polarized Electromagnetic Wave in Relativistic Plasma, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 401–409. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409. In Russian.

Сведения об авторах:
Красовицкий Валерий Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, эксперт отдела кинетических уравнений ИПМ РАН им. М. В. Келдыша (e-mail: `krasovit@mail.ru`, тел.: +7 (495)3304917)
Дорофеенко Виктор Геннадьевич — профессор, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела кинетических уравнений ИПМ РАН им. М. В. Келдыша (e-mail: `dorofeen@gmail.com`, тел.: +7 (909)1505716)
Туриков Валерий Алексеевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики РУДН (e-mail: `turikov_va@rudn.university`)

Information about the authors:
Krasovitskiy V. B. — professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, expert of Department of Kinetic Equations of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (e-mail: krasovit@mail.ru, phone: +7 (495)3304917)
Dorofeenko V. G. — professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher of Department of Kinetic Equations of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (e-mail: dorofeen@gmail.com, phone: +7 (909)1505716)
Turikov V. A. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Physics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: turikov_va@rudn.university)