УДК 517.951
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349

Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса

Х. Алмохаммад, Н. Х. Альхалиль

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе изучаются интегральные свойства свёрток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда $G_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$. Локальное поведение ядер Бесселя–Макдональда в окрестности начала координат характеризуется наличием особенности степенного типа $|x|^{\alpha-n}$. Ядра обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса могут иметь нестепенные особенности в окрестности начала координат. Их поведение на бесконечности связано лишь с условием интегрируемости, так что в рассмотрение включены и ядра с компактным носителем. В статье получена конкретизация общих критериев вложения потенциалов в перестановочно–инвариантные пространства в случае, когда базовое пространство для потенциалов есть весовое пространство Лоренца. Получены явные описания оптимального перестановочно-инвариантного пространства для такого вложения.

Ключевые слова: потенциалы типа Рисса, пространства Лоренца, убывающие перестановки, перестановочно-инвариантные пространства, оптимальные вложения

1. Введение

В данной статье мы изучаем обобщения ядер Бесселя–Макдональда. В отличие от классического случая в них допускаются нестепенные особенности ядер в окрестности начала координат. Их поведение на бесконечности связано лишь с условием интегрируемости, так что в рассмотрение включены и ядра с компактным носителем. В связи с этим порождённые ими пространства обобщённых потенциалов Бесселя относятся к так называемым пространствам обобщённой гладкости. Оценки свёрток, возникающих при описании пространства потенциалов исследованы О'Нейлом [1].

Общие критерии вложений обобщённых потенциалов Бесселя и Рисса в различные перестановочно инвариантные пространства исследовались в работах М. Л. Гольдмана [2]. Постановки задач об оптимальных вложениях пространств обобщённой гладкости и ряд важных результатов в этом направлении содержатся в работах Ю. В. Нетрусова [3, 4], М. Л. Гольдмана и др. [5, 6].

2. Вспомогательные определения. Потенциалы типа Бесселя и типа Рисса

Всюду в этой работе $E = E(\mathbb{R}^n)$ есть перестановочно инвариантное пространство (кратко: ПИП), $E' = E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное ПИП.

Вводим также пространства $\tilde{E} = \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга, т. е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}}, \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'},$$

где f^* — убывающая перестановка функции f, т. е. неотрицательная убывающая непрерывная справа функция на $R_+ = (0, \infty)$, которая равноизмерима с f.

Статья поступила в редакцию 15 июня 2017 г.

Пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$: определяем как множество свёрток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H_E^G \left\{(\mathbb{R}^n) = u = G * f : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\right\},$$

где E — перестановочно-инвариантное пространство, а ядро G — специального вида,

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\left\{\|f\|_E : \ f \in E(\mathbb{R}^n), \ G * f = u\right\},$$

(фактор-норма). Ядро представления G назовём допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n).$$

Здесь свёртка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Замечание 1. В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов $u \in H_E^G$ определить убывающие перестановки u^*.

Пусть δ — положительная измеримая функция (вес), $\Delta(s) = \int\limits_0^s \delta(t) \, \mathrm{d}t$

$$f_\delta^{**}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \int\limits_0^t f^*(\tau)\delta(\tau) \, \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В частности, когда $\delta = 1$,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^t f^*(\tau) \, \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Определение 1. Функция $\Phi : (0, R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathrm{Im}_n(R)$, если:

1) Φ — убывающая и непрерывная на $(0, R)$ функция;
2) существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$r^{-n} \int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1} \, \mathrm{d}\rho \leqslant c\Phi(r), \quad r \in (0, R),$$

$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\tfrac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathrm{Im}_1(T), \ f_\varphi(t; \tau) = \min\left\{\varphi(t), \varphi(\tau)\right\}.$$

Определение 2. Пусть $\Phi \in \mathrm{Im}_n(\infty)$.

Считаем, что $G \in S_R(\Phi)$, если $G(x) \cong \Phi(|x|)$, $0 < \rho = |x| < R$.

Считаем, что $G \in S_R(\Phi; \mathrm{X})$, где $\mathrm{X}(\mathbb{R}^n)$ ПИП, если при $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$, $R \in \mathbb{R}_+$ справедливо представление

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x),$$

где $G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x)$; $G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R}^c(x)$, $G_R^0(x) \cong \Phi(|x|)$, при $|x| < R$, $G_R^1 \in \mathrm{X}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 3. Пусть $\Phi \in \mathrm{Im}_n(\infty)$, $f_\Phi(t;\cdot) \in E'(\mathbb{R}_+)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $G \in S_\infty(\Phi)$. Тогда потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ называются обобщёнными потенциалами Рисса.

Определение 4. Пусть $\Phi \in \mathrm{Im}_n(R)$. Потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ называются обобщёнными потенциалами Бесселя, если

$$G \in S_R(\Phi; L_1 \cap E'), \quad \int\limits_{R^n} G\,\mathrm{d}x \neq 0,$$

где $R \in \mathbb{R}_+$.

Определение 5. Пусть оператор $\mathrm{Re}_{\varphi,T}: \ \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T)$, $T \in (0,\infty]$ определён по формуле:

$$\mathrm{Re}_{\varphi,T}[g](t) = \int\limits_0^T f_\varphi(t;\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad g \in \tilde{E}_0(0,T).$$

Определение 6. Пространствами Лоренца $\Lambda^q(u)$ и $\Gamma^q(u)$, где δ и $u > 0$ — измеримые функции, называются пространства измеримых функций с конечной нормой.

$$\|f\|_{\Lambda^q(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*q}(t)u(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leqslant q < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\{f^*(t)u(t)\}, & q = \infty; \end{cases}$$

$$\|f\|_{\Gamma^q_\delta(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f_\delta^{**q}(t)u(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leqslant q < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\{f_\delta^{**}(t)u(t)\}, & q = \infty. \end{cases}$$

В частности когда $\delta = 1$,

$$\|f\|_{\Gamma^q(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**q}(t)u(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leqslant q < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\{f^{**}(t)u(t)\}, & q = \infty. \end{cases}$$

Ассоциированными к пространствам Лоренца являются пространства

$$\Lambda^q(u)' = \begin{cases} \Gamma^\infty\left(\frac{t}{U(t)}\right), & q = \infty; \\ \Gamma^{q'}\left(\frac{t^{q'}u(t)}{U^{q'}(t)}\right), & 1 < q < \infty; \\ \Lambda^1\left(\frac{1}{\operatorname{ess\,sup}_{0<s<t} u(s)}\right), & q = 1. \end{cases}$$

3. Интегральные свойства потенциалов

Пусть $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}\to\tilde{X}} = \sup\left\{\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{X}} :\ g\in\tilde{E};\ \|g\|_{\tilde{E}}\leqslant 1\right\}$. Тогда

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\| \leqslant \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}\to\tilde{X}}\|g\|_{\tilde{E}};\quad \forall g\in\tilde{E}(\mathbb{R}_+).$$

Задача — описать оптимальное ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)\subset X(\mathbb{R}^n)$, т. е. такое ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$, что

1) $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)\subset X_0(\mathbb{R}^n)$;
2) если ПИП $X(\mathbb{R}^n)$ такое, что есть вложение $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)\subset X(\mathbb{R}^n)$, то $X_0(\mathbb{R}^n)\subset X(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1 (см. [6]). *Для потенциалов типа Рисса вложение* $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)\subset X(\mathbb{R}^n)$ *эквивалентно ограниченности оператора* $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty} :\ \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 2 (см. [6]). *В случае обобщённых потенциалов Бесселя вложение* $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)\subset X(\mathbb{R}^n)$ *справедливо тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*
1) оператор $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty} :\ \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ *ограничен;*
2) справедливо вложение $\Lambda^q(u)(\mathbb{R}^n)\cap L_\infty(\mathbb{R}^n)\subset X(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3 (см. [6]). *При* $T=\infty$ *для потенциалов типа Рисса,* $T=V_n(R/2)^n\in\mathbb{R}_+$ *для потенциалов типа Бесселя имеет место эквивалентность*

$$H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n)\subset L_\infty(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow \varphi\in[\Lambda^q(u)]'(0,T).$$

4. Основная часть

Замечание 2. Мы будем использовать результат из работы [7]. Именно, при $1<p\leqslant q<\infty$
$\|f\|_{\Gamma^q(\omega)}\leqslant c\|f\|_{\Lambda^p(\nu)}\Leftrightarrow$

$$A=\sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty\left(\frac{x}{x+t}\right)^q\omega(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_0^\infty\left(\frac{t}{t+x}\right)^{p'}\cdot\frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}<\infty.$$

Лемма 1. $\|\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)}\cong\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)}\Leftrightarrow$

$$\tilde{A}=\sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty\left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'}\cdot\nu(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\int_0^\infty\left(\frac{t}{t+x}\right)^{p}\cdot\frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\}<\infty.$$

Доказательство. Из замечания 2 получим $q\to p'$, $p\to p'$, $\omega=\nu$
$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)}\leqslant c\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)}\Leftrightarrow$

$$\tilde{A}=\sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty\left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'}\cdot\nu(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot\left(\int_0^\infty\left(\frac{t}{t+x}\right)^{p}\cdot\frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\}<\infty.$$

Всегда $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} \geqslant \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)}$ $(\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*] \geqslant \operatorname{Re}^{*}_{\varphi,\infty}[g^*]) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)}$.

При этом:

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} = \left(\int\limits_0^\infty (\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*])^{p'}\nu(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \|\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)},$$

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)} = \left(\int\limits_0^\infty (\operatorname{Re}^{*}_{\varphi,\infty}[g^*])^{p'}\nu(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= (0 < \operatorname{Re}_{\varphi,\infty}\downarrow, \Rightarrow \operatorname{Re}_{\varphi,\infty} = \operatorname{Re}^{*}_{\varphi,\infty}) = \left(\int\limits_0^\infty (\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*])^{p'}\nu(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)},$$

$$\|\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} \Leftrightarrow \tilde{A} < \infty.$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *а функции* u, v, ω, V *и* U *определены следующим образом*

$$U(s) = \int\limits_0^s u(t)\,\mathrm{d}t, \quad v(t) = \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}, \quad V(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\omega(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t)\int\limits_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)\mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'}\int\limits_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

Кроме того, пусть

$$\tilde{A} = \sup_{x>0}\left\{\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{x+t}\right)^{p'} \cdot \nu(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{t+x}\right)^{p} \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty.$$

$$C = \sup_{r>0}\left(\int\limits_0^r \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\nu(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p'}u^{\frac{p}{p'}}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Тогда оптимальное ПИП для вложения $H^G_{\Lambda^q(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ *имеет эквивалентную норму* $\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(\omega)}$.

Доказательство. Учитывая определение ассоциированных пространств для пространств Лоренца, мы можем представить норму оператора $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}$:

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} = \left(\int\limits_0^\infty (\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*])^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Применяя результат леммы 1, получим

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} = \left(\int\limits_0^\infty (\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*])^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =$$
$$= \|\operatorname{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} =$$
$$= \left(\int\limits_0^\infty (\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*])^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau) g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Из определении функции f_φ мы можем представить норму оператора $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}$ в пространстве $\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)$ в виде суммы:

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} = \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \cong$$
$$\cong \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Но у нас $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)}$.

Итак, $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} \cong J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}},\ J_2 = \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Мы хотим оценить слагаемое J_2 слагаемым J_1. Из убывания функции g^* получим для J_1:

$$J_1 \geqslant \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)g^*(t)\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_0^\infty [\varphi(t)g^*(t)]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} := S,$$

$$J_2 < \alpha S,$$

где α — постоянная, не зависящая от функций φ и g^*, такая, что $J_2 \leqslant \alpha S$. Достаточно, чтобы определённая следующим образом постоянная C была конечна:

$$C = \sup_{r>0} \left(\int\limits_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \nu(t)\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p'} u^{\frac{p}{p'}}(t)}\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Эта постоянная и есть константа C из условия теоремы.

Здесь мы применили обобщённое неравенство Харди для функции одной переменной, приведённое в книге В. Г. Мазьи [8, Глава 1].

Итак, мы получили, что $J_1 \geqslant S$ и $J_2 \leqslant \alpha S$, поэтому можно писать $J_2 \leqslant C J_1$.

Эти оценки дают, что

$$\| \operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*] \|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \cong J_1 + J_2 \cong J_1,$$

$$\| \operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*] \|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \cong \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t) \int\limits_0^t g^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)}\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t) \frac{1}{t} \int\limits_0^t g^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)}\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_0^\infty [\varphi(t) g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)}\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty [g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{2p'} u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}\right)}. \quad (1)$$

Формула

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} = \sup \left\{ \int\limits_0^\infty f^* g^*\, \mathrm{d}t;\ g \in L_0(\mathbb{R}_+);\ \| \operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*] \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1 \right\}$$

даёт, что норма в оптимальном ПИП $\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)$ является ассоциированной к норме (1), т. е. $\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'}$, где $v(t) = t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t) / U^{p'}(t)$.

Осталось заметить, что можно описать эквивалентную норму ассоциированного пространства в следующем виде (см. [7]):

$$\|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'} = \left(\int\limits_0^\infty \frac{t^{p+p'-1} f^{**}(t) V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$V(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \frac{\tau^{2p'} u(\tau) \varphi^{p'}(\tau)}{U^{p'}(\tau)}\, \mathrm{d}\tau.$$

Учтём теперь обозначение

$$\omega(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int\limits_t^{\infty} \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{V(t) + t^{p'} \int\limits_t^{\infty} \tau^{-p'} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

Отсюда следует, что $\|f\|_{\Gamma^p(\omega)} \cong \|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)}$.

Итак, теорема доказана. □

Замечание 3. Условие $\int\limits_0^r \varphi(\rho)\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\varphi(r)r$, приведённое в работе [9], гарантирует эквивалентность $\mathrm{Re}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*] \cong \mathrm{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]$.

Мы не накладываем это требование, заменив его условием на весовые функции:

$$\tilde{A} = \sup_{x>0} \left\{ \left(\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{x}{x+t} \right)^{p'} \nu(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{t}{t+x} \right)^{p} \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}}\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

При его выполнении получаем эквивалентность норм

$$\|\mathrm{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} \cong \|\mathrm{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)} = \|\mathrm{Re}^*_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} = \|\mathrm{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)}.$$

Последнее равенство опирается на соотношение $\mathrm{Re}^*_{\varphi,\infty}[g^*](t) = \mathrm{Re}_{\varphi,\infty}[g^*](t)$.

Формула в правой части неотрицательна, убивающая и непрерывная, т. е. она совпадает со своей убывающей перестановкой.

5. Заключение

В работе получены следующие основные результаты.

1. Рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
2. Установлены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
3. Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Литература

1. *O'Neil R.* Convolution Operators and $L(p,q)$ Spaces // Duke Mathematical Journal. — 1963. — Vol. 30. — Pp. 129–142.
2. *Goldman M. L.* On the Cones of Rearrangements for Generalized Bessel and Riesz Potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010.
3. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Лизоркина–Трибеля // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1987. — Т. 159. — С. 103–112.
4. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Бесова в идеальные пространства // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1987. — Т. 159. — С. 69–82.

5. *Гольдман М. Л., Энрикес Ф.* Описание перестановочно инвариантной оболочки анизотропного пространства Кальдерона // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2005. — Т. 248. — С. 94–105.
6. *Гольдман М. Л.* Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2010. — Т. 269. — С. 91–111.
7. Characterization of Embeddings in Lorentz Spaces Using a Method of Discretization and Anti-Discretization / A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L. E. Persson // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 2007. — Vol. 76. — Pp. 69–92.
8. *Мазъя В. Г.* Пространства Соболева. — Ленинград: Издательство ЛГУ, 1985.
9. *Малышева А. В.* Оптимальные вложения обобщённых потенциалов Рисса // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2013. — № 2. — С. 28–37.

UDC 517.951
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349

Integral Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type

Kh. Almohammad, N. Alkhalil

Department of Nonlinear Analysis and Optimization
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university)
6, Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

In the paper we study integral properties of convolutions of functions with kernels generalizing the classical Bessel–Macdonald kernels $G_\alpha(x)$, $x \in R^n$, $0 < \alpha < n$. The local behavior of Bessel-Macdonald kernels in the neighborhood of the origin are characterized by the singularity of power type $|x|^{\alpha-n}$. The kernels of generalized Bessel–Riesz potentials may have non-power singularities in the neighborhood of the origin. Their behavior at the infinity is restricted only by the integrability condition, so that the kernels with compact support are included too. In the paper the general criteria for the embedding of potentials into rearrangement invariant spaces are concretized in the case when the basic space coincides with the weighted Lorentz space. We obtain the explicit descriptions for the optimal rearrangement invariant space for such an embedding.

Key words and phrases: Riesz potentials, Lorentz spaces, decreasing rearrangement, rearrangement-invariant spaces, optimal embedding

References

1. R. O'Neil, Convolution Operators and $L(p, q)$ Spaces, Duke Mathematical Journal 30 (1963) 129–142.
2. M. L. Goldman, On the Cones of Rearrangements for Generalized Bessel and Riesz Potentials, Complex Variables and Elliptic Equations.
3. Yu. V. Netrusov, Embedding Theorems of Lizorkin–Triebel Spaces, Notes of scientific seminars LOMI 159 (1987) 103–112, in Russian.
4. Yu. V. Netrusov, Embedding Theorems of Besov Spaces into Ideal Spaces, Notes of scientific seminars LOMI 159 (1987) 69–82, in Russian.
5. M. L. Goldman, F. Henriques, Description of Rearrangement Invariant Shell of an Anisotropic Calderon Space, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 248 (2005) 94–105, in Russian.
6. M. L. Goldman, On Optimal Investment Potentials of the Generalized Bessel and Riesz, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 269 (2010) 91–111, in Russian.

7. A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L. E. Persson, Characterization of Embeddings in Lorentz Spaces Using a Method of Discretization and Anti-Discretization, Bulletin of the Australian Mathematical Society 76 (2007) 69–92.
8. V. G. Mazya, Sobolev Spaces, Publishing house Leningrad state University, Leningrad, 1985, in Russian.
9. A. V. Malysheva, Optimal Embedding of the Generalized Riesz Potentials, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (2) (2013) 28–37, in Russian.

Для цитирования:
Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х. Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 340–349. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349.

For citation:
Almohammad Kh., Alkhalil N. Integral Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 340–349. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349. In Russian.

Сведения об авторах:
Алмохаммад Халиль — студент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: `khaleel.almahamad1985@gmail.com`, тел.: +7 (968) 0806641)
Альхалиль Нисрин Хамадех — студент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: `khaleel.almahamad1985@gmail.com`, тел.: +7 (968) 0806641)

Information about the authors:
Almohammad Kh. — student of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: `khaleel.almahamad1985@gmail.com`, phone: +7 (968) 0806641)
Alkhalil N. — student of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: `khaleel.almahamad1985@gmail.com`, phone: +7 (968) 0806641)