УДК 517.977
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-331-339

Локальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства

И. С. Максимова, В. Н. Розова

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В данной работе исследуется задача управляемости со сменой фазового пространства. В настоящее время растёт интерес к задачам управляемости с переменной структурой по причине расширения зоны их практического применения. Подобные задачи возникают как в физике, в биологии, так и в экономике. Итак, на заданных отрезках времени рассматривается задача перевода объекта из заданного множества одного пространства в заданное множество другого пространства через точку нуль. Фазовые пространства могут иметь разные размерности. Возможен переход как из пространства большей размерности в пространство меньшей размерности, так и наоборот. Движение объекта описывается двумя нелинейными системами дифференциальных уравнений, при этом управляющее воздействие первой системы имеет специальный вид, обусловленный некоторыми физическими приложениями. Переход объекта из одного пространства в другое задаётся некоторым отображением. Для задачи, в которой нелинейная система в первом пространстве является локально нуль-управляемой, а правая часть дифференциального включения во втором пространстве является вогнутым отображением, получены достаточные условия управляемости. Задача исследуется с помощью аппарата теории управляемости, выпуклого анализа и теории многозначных отображений. Принимая во внимание прикладной характер поставленной задачи, полученные в данной работе результаты представляют как теоретический, так и практический интерес.

Ключевые слова: управляемость, локальная управляемость, смена фазового пространства, множество достижимости, многозначное отображение, опорная функция

1. Постановка задачи

В фазовых пространствах $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x) + B(t)u, \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in \mathcal{X}, \quad t \in [0, \tau], \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in \mathcal{Y}, \quad t \in [\tau, T], \tag{2}$$

где $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$, $B(t)$ — матрица размера $n \times r$ вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$

Управляющее воздействие имеет специальную структуру, которая обусловлена физическими приложениями. Так, например, при некоторых конкретных функциях $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ подобные управляющие воздействия возникают в задачах космической навигации [1].

Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [0, \tau]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ являются чётными.

Моменты времени τ и T заданы. Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r | u(\cdot) \in L_\infty[0, \tau];\ u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}$, $0 \in \operatorname{int}\Omega$, $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], \mathbb{R}^m)$, для которых $u(t) \in U$ при п.в. $t \in [0, \tau]$ и $v(t) \in V$ при п.в.

$t \in [\tau, T]$. Решениями систем (1) и (2) при $t \in [0, \tau]$ и $t \in [\tau, T]$ являются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ системам (1) и (2) соответственно. Функции $f(x)$, $g(t, y, v)$ таковы, что решение задачи Коши для систем (1) и (2) существует и единственно.

В $\mathcal{X}$ задано некоторое начальное множество M_0. На отрезке времени $[0, \tau]$ объект движется по закону (1), в момент времени τ он попадает в точку ноль и далее происходит переход в пространство $\mathcal{Y}$, заданный отображением $q : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве $\mathcal{Y}$ по закону (2). Наконец, в пространстве $\mathcal{Y}$ задано конечное выпуклое множество M_1 такое, что $q(x(\tau)) \notin M_1$ (если $q(x(\tau)) \in M_1$, то задача решена).

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (1) и (2), будет управляемым из M_0 в M_1.

В соответствии с [2] объект, описываемый системами (1) и (2), называется управляемым из M_0 в M_1, если существуют такие допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) = 0$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Рассмотрим следующий подход к исследованию поставленной задачи: пусть при выполнении некоторых условий объект, описываемый системой (1), является локально управляемым в нуль на отрезке времени $[0, \tau]$. Если множество M_0 содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение, причём $0 \notin M_0$, то по определению локальной управляемости мы имеем возможность из множества M_0 попасть в нуль в некоторый момент времени τ. Далее в момент времени τ осуществляем переход в пространство $\mathcal{Y}$, используя отображение $q : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Получаем точку $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau)$, которая является начальной точкой для движения объекта, описываемого системой (2), в пространстве $\mathcal{Y}$. Выписываем множество достижимости $K(T)$ для системы (2) из точки $y(\tau)$ на отрезке времени $[\tau, T]$. Рассматриваем пересечение полученного множества достижимости $K(T)$ с конечным множеством M_1. В случае, если пересечение не пусто, объект, описываемый системами (1) и (2), является управляемым на отрезке времени $[0, T]$ из множества M_0 пространства $\mathcal{X}$ в M_1 пространства $\mathcal{Y}$. Теперь рассмотрим данный подход в конкретном случае, при этом разобьём поставленную задачу на две подзадачи:

1) локальная управляемость в ноль в пространстве $\mathcal{X}$;
2) управляемость из точки $y(\tau) = q(0)$ на множество M_1 в пространстве $\mathcal{Y}$.

2. Локальная управляемость в ноль в пространстве $\mathcal{X}$

В данном пункте приведём условия локальной нуль-управляемости для нелинейной системы специального вида.

В пространстве $\mathcal{X}$ рассмотрим управляемую систему:

$$\dot{x} = f(x) + B(t)u, \tag{3}$$

где

$$f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r |\, u(\cdot) \in L_\infty[0, \tau];\, u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}, \quad 0 \in \mathrm{int}\Omega, \quad t \in [0, \tau],$$

$B(t)$ — матрица размера $n \times r$ специального вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$

Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [0, \tau]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ являются чётными.

Задача: найти условия локальной нуль-управляемости системы (3) на $[0, \tau]$ и выразить их через элементы матриц A, B_1 и B_2, где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0.$$

Обозначим через $S_\varepsilon(0)$ открытый шар радиуса ε с центром в точке 0.

Определение 1 (см. [3]). Управляемый объект, описываемый системой (3), называется локально нуль-управляемым на отрезке времени $[0, \tau]$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in S_\varepsilon(0)$ объект является управляемым на отрезке $[0, \tau]$ из начального положения x_0 на конечное множество $M = 0$. Это означает, что для любой точки $x_0 \in S_\varepsilon(0)$ существует допустимое управление $u(t)$, такое, что соответствующее этому управлению решение $x(t)$ системы (3) перейдёт из точки x_0 в нуль на отрезке времени $[0, \tau]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены все предположения на $f(x)$, $B(t)$ и $u(t)$ и на отрезке $[0, \tau]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен n, где*

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \ldots,$$
$$C_{n-1}^0 A^{n-1}B(t) - C_{n-1}^1 A^{n-2}B'(t) + \ldots + (-1)^{n+1} C_{n-1}^{n-1} A^0 B^{(n-1)}(t)).$$

Тогда система (3) локально нуль-управляема на отрезке $[0, \tau]$.

Сформулируем следующие утверждения, необходимые для доказательства теоремы.

Лемма 1. *Рассмотрим систему*

$$\dot{x} = Ax + B(t)u. \tag{4}$$

Система (4) полностью управляема на $[0, \tau]$, если на отрезке $[0, \tau]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен n, где

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \ldots,$$
$$C_{n-1}^0 A^{n-1}B(t) - C_{n-1}^1 A^{n-2}B'(t) + \ldots + (-1)^{n+1} C_{n-1}^{n-1} A^0 B^{(n-1)}(t)).$$

Лемма 2 (см. [4]). *Пусть система (4) полностью управляема, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — точки на осях координат. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, дифференцируемые функции $u^i(t)$, $\|u^i(t)\| < \varepsilon$ и окрестность нуля $S_\delta(0)$ такие, что $\forall e_i \in S_\delta(0)$ функции $u^i(t)$ переводят систему (4) из e_i в ноль.*

Определение 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{5}$$

Система (5) называется полностью управляемой на отрезке $[0, \tau]$, если для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдётся допустимое управление $u(t)$, переводящее систему (5) из состояния x_0 в момент времени $t = 0$ в состояние x_1 в момент времени $t = \tau$. Система (5) называется полностью нуль-управляемой при $x_1 = 0$.

Доказательство (теоремы 1). Сделав замену переменных $\tau = -t$ в системах (3) и (4), получим движение объекта в обратном времени. Тогда

$$\dot{x} = -f(x) - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u, \tag{6}$$

$$\dot{x} = -Ax - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))\, u, \tag{7}$$

где $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0)$.

Известно, что для данной системы (3) при сделанных предположениях существует $\varepsilon > 0$, такое, что при $\|u\| < \varepsilon$ все траектории системы (6) с начальным условием $x(0) = 0$ продолжаемы на $[0, 1]$.

Действительно, рассмотрим множество

$$Q_\delta = \left\{(x, u) | \|x\| < \delta, \quad \|u\| < \delta\right\}.$$

Учитывая, что $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, имеем по непрерывности на множестве Q_δ:

$$\max_{x \in Q_\delta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = M_\delta < \infty.$$

Оценим $x(t)$. Поскольку $x(t)$ является решением системы (3), то оно имеет вид:

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f(x)\mathrm{d}t + \int\limits_0^t B(t)u\mathrm{d}t.$$

Далее, используя формулу Тейлора и оценку, полученную выше, имеем:

$$\|x(t)\| \leqslant \int\limits_0^t \|f(x)\|\mathrm{d}t + \int\limits_0^t \|B(t)u\|\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_0^t M_\delta\|x\|\mathrm{d}t + \int\limits_0^t M_1\|u\|\mathrm{d}t \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^t M\|x\|\mathrm{d}t + \int\limits_0^t M\|u\|\mathrm{d}t,$$

где $M = \max\{M_\delta, M_1\}$.

Пусть $t = 1$, тогда имеем

$$\|x(t)\| \leqslant \int\limits_0^1 M\|x\|\mathrm{d}t + M\varepsilon.$$

По лемме Гроноулла при соответствующем выборе ε получаем

$$\|x(t)\| \leqslant M\varepsilon e^{\int_0^1 M\mathrm{d}t} \leqslant M\varepsilon e^M < \delta.$$

Таким образом, решения $x(t, 0, 0, u)$ системы (6) определены на отрезке $[0, 1]$ для допустимых управлений u: $\|u\| < \varepsilon$.

По условию теоремы 1 получаем, что лемма 1 выполнена и система (7) полностью управляема на отрезке $[0, \tau]$. Тогда, по лемме 2 для системы (7) существуют $\varepsilon > 0$

и $u^i(t)$, $\|u^i(t)\| < \varepsilon$, переводящие систему из нуля на e_i, $\|e_i\| < \delta(\varepsilon)$, принадлежащие осям координат. Кроме того, $u^i(t)$ можно выбрать дифференцируемыми.

Рассмотрим управление $u(t,\xi) = \xi_1 u^1(t) + \ldots + \xi_n u^n(t)$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = \max\limits_i |\xi_i| \leqslant 1$. Тогда $\|u\| < \varepsilon$, так как $\|u^i(t)\| < \varepsilon$. Подставим управление $u(t,\xi)$ в систему (6). Получим систему

$$\dot{x} = -f(x) - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u(t,\xi), \tag{8}$$

с начальным условием $x(0) = 0$, решение которой имеет вид $x(t,\xi) = x(t,0,0,u(t,\xi))$. Заметим, что $u(t,0) = 0$ и $x(t,0) = 0$ и полученное решение $x(t,\xi)$ определено на $[0,1]$.

Покажем, что образы $x(1,\xi)$ покрывают некоторую окрестность начала координат при $\|\xi\| \leqslant 1$, т.е. $x(1,\xi) = x_0$ для любой точки $x_0 \in S_\delta(0)$. Для уравнения $x(1,\xi) = x_0$ воспользуемся теоремой о неявной функции.

Рассмотрим матрицу $Z(t,\xi) = \partial x(t,\xi)/\partial\xi$. Покажем, что матрица $Z(1,\xi)$ является невырожденной.

Из теории дифференциальных уравнений, имеем

$$\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial t} = -f(x(t,\xi)) - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u(t,\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial\xi} = -\left.\frac{\partial f(x(t,\xi))}{\partial x}\right|_0 \cdot \frac{\partial x}{\partial\xi} - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial\xi},$$

т.е.

$$\dot{Z} = -AZ - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial\xi},$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = (u^1,\ldots,u^n)$.

Пусть $Z(t,\xi)$ — матрица, столбцами которой являются $z_1,\ldots,z_n$, тогда

$$\dot{z}_j = -Az_j - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))\,u^j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Элементы $z_j(1) = e_j$ из свойств управления u^j, и e_j линейно независимы по условию. Тогда $\det Z(1,\xi) \neq 0$. Итак, по теореме о неявной функции имеем, что если $\|\xi\| \leqslant 1$, то концы траектории системы (6) покрывают некоторую окрестность нуля. Таким образом, система (3) является локально нуль-управляемой на $[0,\tau]$, что и доказывает теорему. □

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 объект, описываемый системой (3), локально нуль-управляем на $[0,\tau]$. Если множество M_0 содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение,тогда при выполнении условий теоремы 1 и в силу локальной управляемости системы (3) объект попадает из множества M_0 в нуль. Используя отображение $q : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, осуществим переход в пространство $\mathcal{Y}$ и приступим к решению второй задачи.

3. Управляемость из точки $y(\tau)$ на множество M_1 в пространстве $\mathcal{Y}$

Пусть в пространстве $\mathcal{Y}$ движение объекта описывается следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}(t) = g(t,y(t),v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in \mathcal{Y}, \quad t \in [\tau,T]. \tag{9}$$

Обозначим через $\Omega(\mathbb{R}^m)$ совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть задано множество $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], \mathbb{R}^m)$, для которых $v(t) \in V$ при п.в. $t \in [\tau, T]$. Решениями системы (9) при $t \in [\tau, T]$ являются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[\tau, T]$ системе (9). Пусть функция $g(t, y, v)$ такова, что решение задачи Коши для системы (9) существует и единственно.

Используя отображение q, мы получили точку $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau)$, которая является начальной точкой при движении объекта в пространстве $\mathcal{Y}$. Также в $\mathcal{Y}$ задано конечное множество $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$, такое, что $q(x(\tau)) \notin M_1$.

В фазовом пространстве $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ в точке y для нелинейной системы (9) рассмотрим множество $g(t, y, V)$, которое состоит из всех векторов $g(t, y, v)$, где v принадлежит множеству V. Если $y(t)$ является некоторой траекторией системы (9), соответствующей допустимому управлению $v(t)$, то при почти всех $t \in [\tau, T]$ выполнено включение

$$\dot{y}(t) \in g(t, y(t), V). \tag{10}$$

Таким образом, получаем дифференциальное включение

$$\dot{y} \in g(t, y, V). \tag{11}$$

Под решением дифференциального включения (11) понимается абсолютно непрерывная функция $y(t)$, определённая на интервале $[\tau, T]$, удовлетворяющая включению (11) при почти всех $t \in [\tau, T]$.

Итак, при довольно общих предположениях система (9) эквивалентна дифференциальному включению (11), т.е. для любого решения $y(\cdot)$ включения (11) будет существовать допустимое управление $v(\cdot)$, такое, что функция $y(\cdot)$ будет являться траекторией системы (9) с этим управлением $v(\cdot)$.

Далее с учётом всех сделанных замечаний вместо нелинейной системы дифференциальных уравнений (9) будем рассматривать следующее дифференциальное включение (11). Введём обозначение $g(t, y, V) = G(t, y)$. Теперь в фазовом пространстве $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ движение объекта будет описываться дифференциальным включением

$$\dot{y} \in G(t, y), \quad t \in [\tau, T], \tag{12}$$

где $G(t, y)$ — многозначное отображение.

Через $K(T)$ обозначим множество достижимости для нелинейной системы (9) из точки $y(\tau)$ в момент времени T. Предположим, что многозначное отображение $G(t, y)$ является вогнутым по y на множестве достижимости $K(T)$ и $K(T)$ компактно. Используя результаты, полученные в [2], из вогнутости отображения $G(t, y)$ по y на множестве достижимости $K(T)$ следует выпуклость множества достижимости $K(T)$. Тогда для управляемости нелинейной системы (9) достаточно, чтобы пересечение множества достижимости и конечного множества было непусто, т.е. $K(T) \cap M_1 \neq \varnothing$. Также, используя свойства опорных функций, данное условие управляемости можно преобразовать к виду $c(K(T), \psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$ (см. [3]).

Таким образом, условия управляемости для поставленной задачи из множества M_0 пространства $\mathcal{X}$ в множество M_1 пространства $\mathcal{Y}$ для систем (1) и (2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены все сделанные предположения и на отрезке времени* $[0, \tau]$ *существует такая точка* t^*, *в которой ранг матрицы* $L(t)$ *равен* n, *где*

$$L(t) = \Big(B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \ldots,$$
$$\ldots, C^0_{n-1}A^{n-1}B(t) - C^1_{n-1}A^{n-2}B'(t) + \ldots + (-1)^{n+1}C^{n-1}_{n-1}A^0B^{(n-1)}(t)\Big).$$

Тогда для управляемости объекта, движение которого описывается системами (1) и (2), на отрезке времени $[0, T]$ достаточно выполнения следующего соотношения $c(K(T), \psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$.

Пример 1. Рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенный выше подход к исследованию вопроса управляемости объекта, движение которого задаётся двумя дифференциальными системами на последовательных интервалах времени в разных фазовых пространствах.

Даны два фазовых пространства $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ и $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$. Движение объекта в первом пространстве описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2 + x_2 + (\cos t + t \sin t)u_1, \\ \dot{x}_2(t) = x_2^2 + x_1 + (2\cos t)u_2, \end{cases} \tag{13}$$

$t \in [0, 1]$, $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^2 | u(\cdot) \in L_\infty[0, 1]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$, $0 \in \mathrm{int}\Omega$.

Также в пространстве $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ задано отображение $q : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, такое, что $q(0, 0) = (0, 0, 0)$.

Движение объекта в пространстве $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2, \\ \dot{y}_2(t) = y_3 + v_2, \\ \dot{y}_3(t) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

$t \in [1, 5]$, $V = \{v \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 0, |v_2| \leqslant 1, v_3 = 0\}$.

В пространстве $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$ задано конечное множество $M_1 = \{y \in \mathbb{R}^3 : (y_1 - 6)^2 + (y_2 - 4)^2 \leqslant 4, y_3 = 0\}$.

Задача: исследовать, является ли объект, описываемый системами (13) и (14), управляемым из точки 0 пространства $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ на множество M_1 пространства $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$.

Решение. Возьмём в качестве точки t^* точку $t = \pi/4$. Тогда ранг матрицы

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

равен двум и по теореме 1 система (13) является локально нуль-управляемой на отрезке $[0, 1]$.

Теперь, используя отображение $q(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$, такое, что $q(0, 0) = (0, 0, 0)$, перейдём в пространство $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$. Начальным множеством при движении объекта в пространстве $\mathcal{Y}$ будет точка $y_0 = (0, 0, 0)$.

Множество достижимости $K(t)$ для системы (14) — это множество, ограниченное двумя параболами $(y_2 + 4)^2 \leqslant 4y_1 + 32$ и $(y_2 - 4)^2 \leqslant -4y_1 + 32$. Пересечение данного множества достижимости и конечного множества M_1 непусто, следовательно, система (14) является управляемой из точки y_0 на множество M_1 на отрезке времени $[1, 5]$.

Таким образом, получаем, что объект, описываемый системами (13) и (14), является управляемым из точки 0 пространства $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ на множество M_1 пространства $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$ на отрезке времени $[1, 5]$.

Литература

1. *Тарасов Е. В.* Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. — М., 1963.
2. *Максимова И. С., Розова В. Н.* Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства // Вестник ТГУ. Серия: Естественные и технические науки. — 2011. — Т. 3. — С. 742–747.
3. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория). — М.: Высшая школа, 2001.
4. *Ли Э. В., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.

UDC 517.977
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-331-339

Local Controllability in the Problem with Phase Space Change

I. S. Maksimova, V. N. Rozova

Department of Nonlinear Analysis and Optimization
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university)
6, Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

This work researches the problem of controllability with phase space change. Nowadays the interest to the controllability problems with variable structure is on the rise due to the continuous widening of their practical application space. The tasks of this sort are appearing in physics, biology as well as in economics. The problem of transfer of object from the constrain set of one space to the constrain set of different space through the null point at the given lengths of time is examined. The spaces may be of the different dimensionality. The transfer is possible both from the space of higher dimensionality to the space of lower dimensionality and vice versa. The movement of the object is described by two nonlinear systems of differential equations, while the control action of the first system has a special form, due to some physical applications. The transfer of the object from one space to another is given by certain mapping. For the problem in which the nonlinear system in the initial space is locally null-controlled and the right part of differential inclusion in the second space is the concave mapping the sufficient controllability conditions were achieved. The problem is researched using the controllability theory apparatus, convex analysis and multiple-valued mapping theory. Taking into the account the practical value of the given problem the results achieved are of both theoretical and practical significance.

Key words and phrases: controllability, local controllability, phase space change, set of attainability, multiple-valued mapping, function of support

References

1. E. V. Tarasov, Optimal Flight Modes of Aircraft, M., 1963, in Russian.
2. I. S. Maksimova, V. N. Rozova, The Sufficient Conditions for Controllability in the Problem with Phase Space Change, Tambov University Reports, Series: Natural and Technical Sciences 3 (2011) 742–747, in Russian.
3. V. I. Blagodatskikh, Introduction to Optimal Control, Vysshaya Shkola, M., 2001, in Russian.
4. E. V. Li, L. Marcus, Foundations of Optimal Control Theory, Nauka, M., 1972, in Russian.

© Максимова И. С., Розова В. Н., 2017

Для цитирования:
Максимова И. С., Розова В. Н. Локальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 331–339. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-331-339.

For citation:
Maksimova I. S., Rozova V. N. Local Controllability in the Problem with Phase Space Change, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 331–339. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-331-339. In Russian.

Сведения об авторах:
Максимова Ирина Сергеевна — старший преподаватель кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: maksimova_is@rudn.university)
Розова Валентина Николаевна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: rozova_vn@rudn.university)

Information about the authors:
Maksimova I. S. — senior lecturer of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: maksimova_is@rudn.university)
Rosova V. N. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: rozova_vn@rudn.university)