

УДК 530.1

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-283-294

## Об эволюции сходящегося волнового пакета перевёрнутого квантового осциллятора, вынуждаемого однородным гармоническим полем

В. В. Чистяков

*Научно-исследовательский университет информационных технологий,  
механики и оптики*

*Кронверкский просп., д. 49а, Санкт-Петербург, Россия, 197101*

Исследуется модель периодически возмущаемого однородным полем квантового одномерного перевёрнутого осциллятора с гамильтонианом  $\hat{H} = (\hat{p}^2/2m) - (m\omega^2 x^2/2) - F_0 x \sin(\Omega t + \phi)$ , широко используемая для описания поведения нестабильных молекулярных/ионных комплексов в поле лазерного излучения. Аналитически и численно при помощи Maple 17 решается нестационарное уравнение Шрёдингера (НУШ) с начальной волновой функцией (в.ф.) обобщенного Гауссовского типа, наилучшим образом удовлетворяющей оператору начальных условий (НУ). Её волновой пакет с изначально аномально большой безразмерной шириной  $\sigma_0 = \sqrt{\langle \xi^2(0) \rangle} \gg 1$  описывает сходящийся поток плотности вероятности, и на безразмерных временах  $\tau \leq 2\tau_0 = 0,25 \ln(16\sigma_0^4 + 1)$  он сначала коллапсирует в экстремально узкую область ширины порядка  $\Delta x \sim \sqrt{m\omega/\hbar}$ , а затем неограниченно расширяется по показательному закону. При этом для определённых значений фаз  $\phi$ , определяемых возмущающей частотой лазера  $\Omega$  и исходным разбросом  $\sigma_0$ , центр масс волнового пакета  $\xi_{av}(\tau) = \hat{x}(\tau)\sqrt{m\omega/\hbar}$  оставался вблизи положения равновесия в течение примерно двух «естественных периодов» осциллятора, колеблясь и дрейфуя, после чего быстро уходил к бесконечности. Фазы  $\phi$  служили точками бифуркации направления ухода центра пакета, и при  $\sigma_0 > 2^{12}$  они удовлетворяли хорошо классической формуле; поведение стабилизирующей фазы на «резонансной» частоте  $\phi(\Omega = 1, n)$ ,  $n = \log_2 \sigma_0$  хорошо описывалось перевёрнутой и смещённой формулой Ферми–Дирака из квантовой статистики.

**Ключевые слова:** перевёрнутый квантовый осциллятор, периодическое возмущение, нестационарное уравнение Шрёдингера (НУШ), волновой пакет, обобщённый гауссовский тип, коллапс, фазовый сдвиг, динамическая стабилизация, бифуркация, Maple

### 1. Введение

Перевёрнутый гармонический одномерный (1D) осциллятор является элементарной моделью неустойчивых квантовых систем — распадающихся возбужденных молекул, комплексов, экситонных состояний в полупроводнике и пр. Также отталкивающий потенциал квантовой *антиточки* на качественном уровне может быть описан в рамках модели ИНО, равно как и поведение частиц при туннелировании [1–3] и при т. н. *суперфлуоресценции* — «short time behavior in superfluorescence» — (см., например, [4, 5] и библиографию в них).

Дополненный до двух- или трехмерного «седла» негармонической притягивающей частью, он вполне может моделировать эффект *колебательного связывания*, имеющий место в молекулах галогеноводородов [6].

---

Статья поступила в редакцию 26 января 2017 г.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-08-00997 «Исследование нелинейных много-членных управляемых механических систем методами математического и компьютерного моделирования».

Автор выражает свою признательность профессору Норвежского университета науки и технологии Кааре Олауссену за проявленный интерес к проблеме и оказанные консультации.

Кроме того, модель ИНО даёт любопытные результаты и при дискретном квантово-механическом описании частиц через разностное уравнение Шрёдингера, решение которого допускает «удержание волн на потенциальном склоне» [7, 8]. Последний эффект особенно интересен в нестационарном динамическом варианте [9], и когда в гамильтониане присутствует периодическое слагаемое [10].

Именно этим и обусловлен интерес к различным нестационарным модификациям модели инвертированного квантового осциллятора, исследуемым как с чисто прикладной целью, так и руководствуясь сугубо фундаментальными интересами. Тем более что нестационарная модель в некоторых случаях допускает аналитическое интегрирование, позволяющее точно отследить эволюцию квантового состояния. И здесь по аналогии с собственно гармоническим осциллятором предпринимаются попытки ввести и для ИНО понятие обобщённого *когерентного состояния* [11], поведение системы в котором наиболее близко к классическому.

Целью настоящей работы является исследование квантового аналога явления т.н. *динамической стабилизации* неустойчивого состояния квантовой частицы в одномерном перевёрнутом квадратичном потенциале в условиях действия гармонической вынуждающей силы.

## 2. Динамическая стабилизация в классической механике

Классическим её примером является маятник Капицы, а вообще, — прямоходящий человек, с точки зрения биомеханики являющий собой перевёрнутый маятник.

Простейшая модель классического перевёрнутого осциллятора, гармонически возмущаемого на «резонансной частоте», описывается функцией Гамильтона в безразмерных координатах

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} - f_0 \sin(\tau + \varphi)q;$$

уравнения движения —

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + f_0 \sin(\tau + \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Их решение с учётом начальных условий (НУ) по координате  $q_0$  и импульсу  $p_0$ :

$$q(\tau) = 0,5(q_0 + p_0 + 0,5(\sin \phi + \cos \phi))e^\tau - 0,5f_0 \sin(\tau + \phi) + \\ + 0,5(q_0 - p_0 + 0,5(\sin \phi - \cos \phi))e^{-\tau}, \quad (2)$$

$$p(\tau) = 0,5(q_0 + p_0 + 0,5(\sin \phi + \cos \phi))e^\tau - 0,5f_0 \cos(\tau + \phi) - \\ - 0,5(q_0 - p_0 + 0,5(\sin \phi - \cos \phi))e^{-\tau}, \quad (3)$$

и оно стабилизировано при идеальном выполнении соотношения НУ и фазы:

$$q_0 + p_0 + 0,5(\sin \phi + \cos \phi) = 0. \quad (4)$$

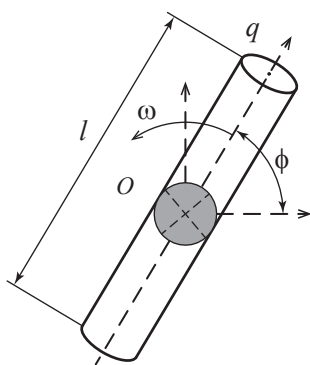
**Пример 1.** (*Олимпиада УИТМО по теоретической механике, 2015, Чистяков В. В.*)

Трубку длиной  $l$  вращают в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг её середины, где удерживается креплением маленький грузик (рис. 1). В каком положении  $\phi$  трубки необходимо освободить этот грузик, чтобы он не выпал в дальнейшем из неё?

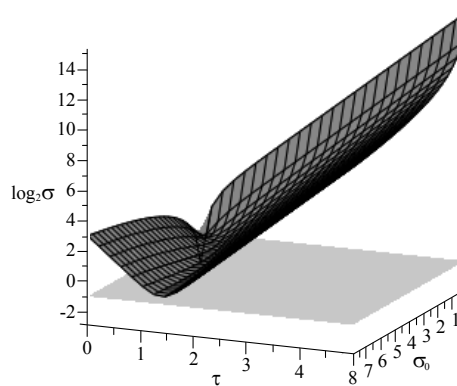
Решение динамического уравнения при начальных условиях (НУ)  $q(0) = x_0$ ,  $\dot{q}(0) = u_0$  даёт стабилизированную зависимость  $q(t) = 0,5g\omega^{-2} \sin(\omega t + \phi) + (x_0 - 0,5g\omega^{-2} \sin(\phi))e^{-\omega t}$ ,  $t > 0$  при выполнении равенства

$$u_0 + \omega x_0 = \frac{g \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\omega}, \quad x_0 \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),$$

и, в частности, при нулевых НУ  $q(0) = 0$ ,  $\dot{q}(0) = 0$  стабилизация имеет место при углах  $\phi = -0,25\pi$ ;  $0,75\pi$ .



**Рис. 1.** Механическая система с динамической стабилизацией



**Рис. 2.** Эволюция логарифма полуширины волнового пакета  $\log_2 \sigma(\tau, \sigma_0)$  при малых  $\sigma_0$ , (горизонтальная плоскость соответствует  $\sigma = 1/2$ )

При произвольной безразмерной частоте  $\Omega$  вынуждающее слагаемое в функции Гамильтона  $-f_0 \sin(\Omega\tau + \phi)q$  изменит решение (2) как

$$q = -\left(\frac{f_0}{1 + \Omega^2}\right) \sin(\Omega\tau + \phi) + \frac{1}{2} \left( q_0 + p_0 + \frac{\sin \phi + \Omega \cos \phi}{1 + \Omega^2} f_0 \right) e^\tau + \frac{1}{2} \left( q_0 - p_0 + \frac{\sin \phi - \Omega \cos \phi}{1 + \Omega^2} f_0 \right) e^{-\tau}, \quad (5)$$

и теоретическая стабилизация будет иметь место уже при идеальном соблюдении равенства

$$\begin{aligned} \sin \phi + \Omega \cos \phi &= -\frac{(1 + \Omega^2)(p_0 + q_0)}{f_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{1 + \Omega^2}(p_0 + q_0)}{f_0}\right) - \arctg \Omega. \quad (6) \end{aligned}$$

Если начальные условия лежат в фазовом пространстве на линии  $p_0 + q_0 = 0$ , то стабилизирующая начальная фаза удовлетворяет простому соотношению  $\tg \phi = -\Omega$ , при  $\Omega = 1$ , дающему  $-0,25\pi$ ;  $0,75\pi$ .

Такие НУ примечательны тем, что ограниченность решения (5), если имеет место, то она имеет место при любой вынуждающей гармонической силе, между тем как при  $p_0 + q_0 \neq 0$  аргумент арксинуса в (6) должен находиться в своих пределах.

Анализ (6) показывает, что в силу линейности системы (1) стабилизация имеет место, даже если возмущающий сигнал не гармонический, но комбинация синусоид  $F(q, t) = -q \int_D f_0(\Omega) \sin(\Omega\tau + \phi(\Omega)) d\Omega$ ,  $D \subset \mathbb{R}^+$ , с амплитудами  $f_0(\Omega)$  и фазами  $\phi(\Omega)$ , удовлетворяющими условиям

$$p_0 + q_0 + \int_D \frac{\sin \phi(\Omega) + \Omega \cos \phi(\Omega)}{1 + \Omega^2} f_0 d\Omega = 0$$

и

$$f_0(\Omega) \geq \sqrt{1 + \Omega^2} |p_0 + q_0|, \quad \forall \Omega \in D.$$

В частности, для вышеупомянутых НУ стабилизирующий возмущающий сигнал определится формулой

$$\begin{aligned} F(q, t) &= -q \int_D f_0(\Omega) \sin(\Omega\tau + \phi(\Omega)) d\omega = \\ &= -q \int_D f_0(\Omega) (\sin \Omega\tau \cos \phi(\Omega) + \cos \Omega\tau \sin \phi(\Omega)) d\omega = \\ &= -q \int_D f_0(\Omega) \cos \phi(\Omega) (\sin \Omega\tau - \Omega \cos \Omega\tau) d\omega = \\ &= -q \int_D \frac{f_0(\Omega)}{\sqrt{1 + \Omega^2}} (\sin \Omega\tau - \Omega \cos \Omega\tau) d\omega \quad (7) \end{aligned}$$

с амплитудой  $f_0(\Omega)$ , обеспечивающей равномерную сходимость интеграла в (7) на временной полуоси.

Таким образом, динамическая стабилизация перевернутого гармонического осциллятора в классической механике теоретически возможна для широкого класса вынуждающих усилий, как для определяемых по формуле (7) для нулевого уровня энергии, так и для других  $F(q, t)$  при  $E \neq 0$ .

### 3. Уравнение Шрёдингера

В рамках нерелятивистской квантовой механики волновая функция (в. ф.) одномерного перевернутого осциллятора с натуральной частотой  $\omega$  с<sup>-1</sup>, возмущаемого однородным гармоническим полем с круговой частотой  $2\pi\nu = \Omega\omega$ , амплитудой  $F_0$  и фазой  $\varphi$ , эволюционирует согласно нестационарному уравнению Шрёдингера. В безразмерных величинах —  $\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ,  $f_0 = \frac{F_0}{\omega\sqrt{\hbar m\omega}}$ ,  $\tau = \omega t$  оно имеет вид:

$$i \frac{\partial \Psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} i \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\xi^2}{2} \Psi(\xi, \tau) - f_0 \xi \sin(\Omega\tau + \varphi) \Psi(\xi, \tau). \quad (8)$$

Сдвиговая замена независимой переменной  $\rho = \xi + f_0 \sin(\Omega\tau + \varphi)$  приводит к исчезновению линейного по координате члена в потенциальной энергии. Представление в. ф.  $\Psi(\rho, \tau) = \psi_0(\rho)g(\rho, \tau)$  в новом наборе переменных  $(\rho, \tau)$ , где, в свою

очередь,

$$g(\rho, \tau) = e^{-i\left(E(\rho) + \frac{f_0^2}{4}\right)\tau + i\frac{f_0^2 \sin(2\tau + 2\varphi)}{8}} z(\rho, \tau) \quad (9)$$

с  $E(\rho) = -\frac{1}{2\psi_0(\rho)} \frac{d^2\psi_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{\rho^2}{2}$  (см. ниже), преобразует его к виду

$$\begin{aligned} i\frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{z} + \left( \frac{i}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} + \frac{dE}{d\rho} \tau \right) f_0 \Omega \cos(\Omega\tau + \varphi) + \\ + i\frac{d\psi_0(\rho)}{d\rho} \frac{1}{\psi_0} f_0 \Omega \cos(\Omega\tau + \varphi) + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \left( -i\frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) + \\ + \frac{1}{2z} \frac{\partial^2 z(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dE(\rho)}{d\rho} \right)^2 \tau^2 - \frac{i}{2} \frac{d^2 E(\rho)}{d\rho^2} \tau + \\ + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \frac{d\psi}{d\rho} \frac{1}{\psi} + \left( -i\frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) \frac{d\psi}{d\rho} \frac{1}{\psi} = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Для произвольных начальных условий решение уравнения проблематично по причине краевых условий на бесконечности, а потому необходимости ограничивать конфигурационное пространство, пусть широким, но интервалом. Или же применять иные приёмы интегрирования уравнения Шрёдингера на всей числовой оси (см., например, [12]). Однако проблема упрощается требованиями на НУ, аналогичными классическим начальным условиям.

#### 4. Начальные условия

В уравнении (10)  $\psi_0(\rho) = \psi_0(\xi + f_0 \sin \varphi)$  — в. ф. исходного состояния ИНО, которая должна в идеале быть собственной функцией для оператора начальных условий (НУ) (4):  $\hat{c} = \hat{p} + \hat{\xi} = -i\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi$ .

Однако такая в. ф., т. е.  $\psi_{\text{eig}} = C \exp\{-(-0,5i\xi^2)\}$ , не отвечает никакому физическому состоянию, а потому удовлетворить НУ можно лишь приближённо, выбрав функцию обобщённого гауссовского типа с аномально большой полушириной пакета  $\sigma_0 = \sqrt{\xi^2(0)} \gg 1$ :

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, 0) = \psi_0(\xi) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^2}{4\sigma_0^2} \right), \\ \xi = (\rho - f_0 \sin(\omega\tau + \varphi))|_{\tau=0} = \rho - f_0 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

которая описывает сходящийся к центру симметричный поток вероятности, т. е. своего рода одномерный сферический поток.

Так как для такой исходной функции величины

$$\begin{aligned} E(\rho) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right)^2 (\rho - f_0 \sin \varphi)^2 - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2\sigma_0^2} - i \right) - \frac{\rho^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E(\rho) = -\frac{\rho^2}{2} \left( \frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) + \left( \frac{1}{4\sigma_0^4} - 1 + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) \rho f_0 \sin \varphi - \\ - f_0^2 \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{8\sigma_0^4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4\sigma_0^2} + i \left( \frac{1}{2} - \frac{f_0^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_0^2} \right), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_0(\rho)}{d\rho} \frac{1}{\psi_0(\rho)} = -(\rho - f_0 \sin \varphi) \left( \frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\rho} &= -\rho \left( \frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) + \left( \frac{1}{4\sigma_0^4} - 1 + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) f_0 \sin \varphi, \\ \frac{d^2E}{d\rho^2} &= - \left( \frac{i}{\sigma_0^2} + \frac{1}{4\sigma_0^4} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

и зависящие от них коэффициенты в (9) суть многочлены степени не выше 2-х по  $\rho$ , то при начальных условиях (11) уравнение (10) можно решить через подстановку

$$z(\rho, \tau) = \exp(\alpha(\tau) + \beta(\tau)\rho + \gamma(\tau)\rho^2), \quad \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0.$$

То есть эволюционирующая волновая функция перевернутого гармонического осциллятора неизменно остаётся функцией.

## 5. Решение NSE

Приравнивание коэффициентов при степенях  $\rho$  приводит к системе трёх обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\gamma}(\tau) &= 2\gamma(\tau) \left( - \left( \frac{i}{\sigma_0^2} + \frac{1}{4\sigma_0^4} \right) \tau - i \left( \frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right) \right) + 2i\gamma^2(\tau) - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left( \frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right)^2 \tau^2 + \left( \frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) \left( \frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right) \tau, \\ \dot{\beta}(\tau) &= i\beta(\tau)(2i\tau - 1 + 2\gamma(\tau)) + (2\tau - i - 2\gamma(\tau))f_0\Omega \cos(\Omega\tau + \phi) + \\ &\quad + f_0 \sin \varphi \cdot \tau, \\ \dot{\alpha}(\tau) &= i\gamma(\tau) + \frac{i}{2} \left( \frac{i}{4\sigma_0^4} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) - f_0\Omega\beta(\tau)(\cos(\Omega\tau + \phi) + \tau \sin \phi) - \\ &\quad - if_0^2 \sin \phi \Omega \tau \cos(\Omega\tau + \phi) - \frac{i}{2} \tau^2 f_0^2 \sin^2 \phi. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Система последовательно интегрируется, и для старшего коэффициента получается выражение

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{2} + \left( \frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{i}{8\sigma_0^4} \right) \tau + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( 2i\tau - \operatorname{arctg} \left( i + \frac{1}{2\sigma_0^2} \right) \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \gamma(\tau) = \frac{1}{4\sigma_0^2} + \frac{\tau}{2\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2}{\operatorname{sh}^2 2\tau + 4\sigma_0^4 e^{-4\tau}}, \\ \operatorname{Im} \gamma(\tau) = -\frac{\tau}{8\sigma_0^4} + \frac{\operatorname{sh}^2 2\tau}{\operatorname{sh}^2 2\tau + 4\sigma_0^4 e^{-4\tau}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

С учётом квадратичного по  $\rho$  члена в комплексной «энергии»  $E(\rho)$ , присутствующей под экспонентой в (9), а также аналогичного члена в начальной в. ф. (11), получается следующий действительный множитель при  $\rho^2$ :

$$-\frac{1}{4\sigma(\tau)^2} = \cancel{\frac{1}{4\sigma_0^2}} + \cancel{\frac{\tau}{2\sigma_0^2}} - \cancel{\frac{\tau}{2\sigma_0^2}} - \frac{\sigma_0^2}{\operatorname{sh}^2 2\tau + 4\sigma_0^4 e^{-4\tau}} - \cancel{\frac{1}{4\sigma_0^2}},$$

определяющий временную зависимость для полуширины пакета

$$\sigma(\tau, \sigma_0) = \sigma_0 \sqrt{e^{-4\tau} \left(1 + \frac{1}{16\sigma_0^4}\right) - \frac{1}{8\sigma_0^4} + \frac{e^{-4\tau}}{16\sigma_0^4}}. \quad (17)$$

Зависимость (17) означает начальное убывание разброса  $\sigma(\tau)$  на временах  $\tau \leq \tau_0 = 0,125 \ln(16\sigma_0^4 + 1)$  до минимального значения

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{64\sigma_0^4}} - \frac{1}{4}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{64\sigma_0^4}, \quad \sigma_0 \gg 1, \quad (18)$$

сменяющееся ростом и восстановлением разброса при  $\tau_2 = 2\tau_0$ , а затем неограниченным и необратимым возрастанием по экспоненциальному закону (рис. 2).

Условие хотя бы какого-то сужения (компактизации) исходного волнового пакета (11) —  $\sigma_{\min} < \sigma_0$

$$-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{64\sigma_0^4}} < \sigma_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{64\sigma_0^4} < \sigma_0^4 + \frac{\sigma_0^2}{2} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow 64\sigma_0^8 + 32\sigma_0^6 - \frac{3\sigma_0^4}{16} - \frac{1}{64} > 0$$

даёт приближённо  $\sigma_0 > 0,51427360$ .

Что касается мнимой части множителя при  $\rho^2$ , определяющего внутренний поток перераспределения плотности вероятности в пакете, то с учётом тех же вкладов от начальной в. ф. и «энергии» получается

$$\mu(\tau) = -\frac{\tau}{8\sigma_0^4} + \frac{\text{sh}^2 2\tau}{4\sigma_0^4 e^{-4\tau} + \text{sh}^2 2\tau} - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{8\sigma_0^4} = \frac{\text{sh}^2 2\tau}{4\sigma_0^4 e^{-4\tau} + \text{sh}^2 2\tau} - \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Стартуя от уровня  $-\frac{1}{2}$ , множитель  $\mu(\tau)$  обращается в нуль при  $\tau_1 = 0,25 \ln(1 + 4\sigma_0^2)$ , практически сливающимся с  $\tau_0$  для  $\sigma_0 \gg 1$ , и затем быстро стремится к  $+\frac{1}{2}$ .

Это означает, что внутренний поток вероятностной плотности инвертируется и становится расходящимся от центра: происходит отражение и одновременно начинается необратимая деградация волнового пакета в сторону полной его размытости на оси.

Таким образом, независимо от вынуждаемого линейного воздействия, при начальных макроскопических своих ширинах волновой пакет коллапсирует в микроскопическую область шириной порядка элементарной длины  $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  за время порядка  $\sim \frac{\ln \sigma_0}{\omega}$ , а затем необратимо расплывается по экспоненциальному закону. Потому о стабилизации имеет смысл говорить лишь в вышеозначенном временном интервале. За его границей положение центра волнового пакета  $\xi(\tau) = \hat{x}(\tau) \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  не представляет интереса ввиду фактической деградации волны.

## 6. Влияние периодического воздействия

Решение второго уравнения в (15) даёт коэффициент при первой степени  $\rho$ :

$$\beta(\tau) = -f_0 \left( \cos \left( 2i\tau - \arctg \left( i + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \right) \right)^{-\frac{i}{2}} \times$$

$$\times \int_0^{\tau} \frac{\operatorname{tg} \left( 2i\tau' - \operatorname{arctg} \left( i + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \right)}{\left( \cos \left( 2i\tau' - \operatorname{arctg} \left( i + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \right) \right)^{-\frac{i}{2}}} (\Omega \cos (\Omega\tau' + \phi) + \sin \phi\tau') d\tau'. \quad (20)$$

Выделение в (20) действительной и мнимой частей в (20) приводит к довольно длинным и громоздким выражениям, к тому же всё равно не допускающим интегрирование в элементарных функциях. Автор использовал опции Maple 17 для работы с комплексными выражениями и получал точно такие же результаты, как и в случае решения системы уравнений (15), предварительно при помощи всё того же Maple преобразованной в систему из 6-ти уравнений относительно действительных и мнимых частей функций-коэффициентов  $\alpha(\tau)$ ,  $\beta(\tau)$  и  $\gamma(\tau)$ .

Положение центра волнового пакета определяется через выделение полного квадрата в выражении

$$-\frac{\rho^2}{4\sigma(\tau)^2} + \operatorname{Re} \beta(\tau)\rho = -\frac{(\rho - 2\sigma(\tau)^2 \operatorname{Re} \beta(\tau))^2}{4\sigma(\tau)^2} + (\sigma(\tau) \operatorname{Re} \beta(\tau))^2$$

и даёт

$$\overline{\rho(\tau)} = 2\sigma(\tau)^2 \operatorname{Re} \beta(\tau) \Rightarrow \overline{\xi(\tau)} = 2\sigma(\tau)^2 \operatorname{Re} \beta(\tau) - f_0 \sin (\Omega\tau + \varphi). \quad (21)$$

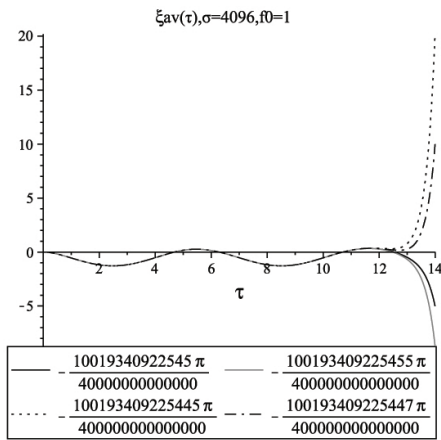
В общем случае произвольной начальной фазы  $\varphi$  периодического воздействия центр пакета удалялся значительно от центра уже в течение первого основного «периода» осциллятора, и на момент максимальной компактности находился на расстоянии от нулевого положения, на много порядков превышающем  $\sigma_{\min}$  (18).

Однако путём дихотомического поиска для различных начальных разбросов  $\sigma_0 = 2^{-3} \dots 2^{21}$  найдены фазы  $\phi$  в широком интервале частот  $\Omega = 2^{-7} \dots 2^7$ , при которых имели место (рис. 3, 4):

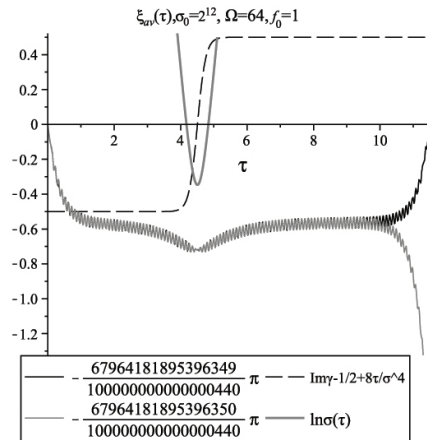
- а) негармонические колебания центра пакета около некоторой линии в течение примерно 2-х основных периодов времени, т.е.  $0 \leq \tau < 11 \dots 14 \approx 2 \cdot 2\pi$ , затем резкий уход в сторону бесконечности;
- б) бифуркации направления ухода центра пакета  $\overline{\xi(\tau)}$  в положительную либо отрицательную полуось при изменении фазы на пренебрежимо малую величину порядка  $10^{-15 \dots 20}$ ;
- в) особенность поведения  $\overline{\xi(\tau)}$  в окрестности момента разворота потока  $\tau_1$ , т.е. вблизи точки коллапса (кривые  $\ln \sigma(\tau)$  и  $\mu(\tau)$  из (19) на рис. 4).

Более детальный анализ области разворота для различных вынуждающих частот показывает быстрое изменение фазы колебаний  $\overline{\xi(\tau)}$  примерно на полупериод. Положение уровня стабилизации, вокруг которого колеблется центр пакета, при этом дополнительно удаляется от нулевого положения (рис. 5).





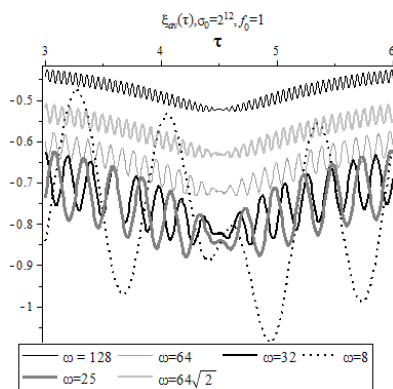
**Рис. 3.** Временная стабилизация центра пакета с  $\sigma_0 = 2^{12}$  и последующая бифуркация  $\xi(\tau)$  при натуральной частоте  $\Omega = 1$  (дроби — фазы  $\phi$ )



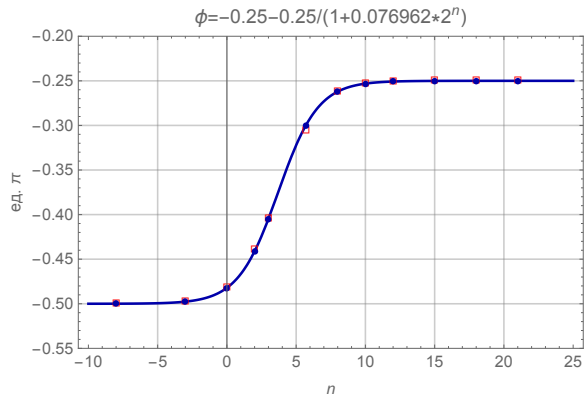
**Рис. 4.** Временная стабилизация центра пакета с  $\sigma_0 = 2^{12}$  и последующая бифуркация  $\xi(\tau)$  при натуральной частоте  $\Omega = 64$  (дроби — фазы  $\phi$ )

Асимптотическое поведение стабилизирующих фаз  $\phi(\Omega, n = \log_2 \sigma_0 \rightarrow \infty)$  вполне соответствуют классическим значениям  $\phi_{cl}(\Omega) = -\arctg \Omega$ . Что же касается зависимостей фазы  $\phi$  от  $n$ , то для ряда исследованных частот  $\Omega$  они не были даже монотонными. Для важного случая  $\Omega = 1$  кривая  $\phi(n)$  хорошо описывалась перевёрнутой зависимостью типа Ферми-Дирака (рис. 6):

$$\phi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4(1 + a2^n)}, \quad a = 0,076962 \ (0,001744), \quad adj - R^2 = 0,99965. \quad (22)$$



**Рис. 5.** Кривые  $\xi(\tau)$  при  $\tau \sim \tau_0$  для различных вынуждающих частот  $\Omega$



**Рис. 6.** Перевёрнутая «Ферми-зависимость» фазы стабилизации  $\phi$  vs  $n = \log_2(\sigma_0)$  (в ед.  $\pi$ )

## 7. Обсуждение

Хотя и высокая, но конечная точность компьютерного продукта Maple не позволила зафиксировать времена стабилизации  $\tau$ , заметно превышающие два основных периода осциллятора  $\frac{4\pi}{\omega}$  (для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения время стабилизации составляло около 4-х периодов). То есть остаётся открытым вопрос о бесконечной сепаратрисе, разделяющей траектории центра волнового пакета, уходящие в положительную и отрицательную бесконечность.

На высоких частотах  $\Omega \sim 2^7$  время стабилизации составит порядка сотни периодов вынуждающего периодического потенциала и может оказаться достаточно большим для неустойчивых квантовых микросистем, за которое то же периодическое воздействие может поменять, например, электронное состояние распадающейся молекулы, радикала и пр.

Так, если отрицательный квадратичный потенциал разделяет два стабильных положения вдоль координаты реакции  $x$ , как в потенциале Дуффинга, то, управляя фазой периодического воздействия, теоретически можно селективно менять направление реакции.

## 8. Выводы

Исследована эволюция волнового пакета обобщённого гауссовского типа у периодически возмущаемого на различных частотах инвертированного гармонического осциллятора.

Обнаружено аномальное сужение (коллапс) до одинаковой ширины, равной естественной единице длины, изначально широких вплоть до макроскопических размеров волновых пакетов, соответствующих классическим начальным условиям с нулевой энергией  $E = 0$ .

В интервале немонотонного поведения полуширины волнового пакета обнаружено явление стабилизации центра волнового пакета, за которой следовало его (центра) бифуркационное поведение.

Исследованная задача ставит разнообразные проблемы, связанные как с реализацией исходной волновой функции, так и с эволюцией негауссовских пакетов, в том числе при обобщённом стабилизирующем воздействии (6).

## Литература

1. *Serban I., Wilhelm F.* Dynamical Tunneling in Microscopic Systems // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 10. — Pp. 101–104. — <https://www.researchgate.net/publication/5913852>.
2. *Baskoutas S., Jannussistl A., Mignanig R.* Dissipative Tunneling of the Inverted Caldirola–Kanai Oscillator // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1994. — Vol. 27. — Pp. 2189–2196.
3. *Matsumoto S., Yoshimura M.* Dynamics of Barrier Penetration in Thermal Medium: Exact Result for Inverted Harmonic Oscillator // *Phys. Rev. A.* — 2000. — Vol. 59, No 6. — Pp. 2201–2238.
4. *Pedrosa L., de Lima A., de M. Carvalho A.* Gaussian Wave Packet States of Generalized Inverted Oscillator With Time-Dependent Mass and Frequency // *Can. J. of Phys.* — 2015. — Vol. 93. — Pp. 3–7.
5. *Nogami Y., Toyama F.* Nonlinear Schrödinger Soliton in a Time-Dependent Quadratic Potential // *Phys. Rev. E.* — 1994. — Vol. 49, No 5. — Pp. 4497–4501.
6. *Степанов Н. Ф., Путьшев В. И.* Квантовая механика молекул и квантовая химия: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 381 с.

7. *Захарьев Б. Н.* Дискретная и непрерывная квантовая механика, точно решаемые модели // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1992. — Т. 23, № 5. — С. 1387–1468.
8. *Muñoz C. A., Rueda-Paz J., Wolf K. B.* Discrete Repulsive Oscillator Wavefunctions // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — Vol. 42. — P. 485210.
9. *Barton G.* Quantum Mechanics of the Inverted Oscillator Potential // Annals of Physics. — 1986. — Vol. 166, No 2. — Pp. 322–363.
10. On the Stability of Periodically Time-Dependent Quantum Systems / P. Duclosi, E. Soccorsi, P. Stoviček et al. // Rev. in Math. Phys. — 2008. — Vol. 6. — Pp. 212–240.
11. *Vagrov V. G., Gitman D. M.* Coherent States of Inverse Oscillators and Related Problems // J. Phys. A : Math. Theor. — 2013. — Vol. 46. — P. 325305.
12. *Злотник И. А.* Численные методы решения обобщённого нестационарного уравнения Шрёдингера в неограниченных областях: Кандидатская диссертация / МЭИ. — 2013.

UDC 530.1

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-283-294

## On the Evolution of Converging Wave Packet of an Inverted Quantum Oscillator Driven by Homogeneous Harmonic Field

V. V. Chistyakov

*Scientific Research University of Informational Technology, Mechanics and Optics  
49A Kronverksky avenue, Saint-Petersburg, 197101, Russian Federation*

The problem investigated refers to periodically driven 1D quantum inverted harmonic oscillator (IHO) with the Hamiltonian of  $\hat{H} = (\hat{p}^2/2m) - (m\omega^2 x^2/2) - F_0 x \sin(\Omega t + \phi)$ . The model is used widely in huge quantum applications concerned unstable molecular complexes and ions under laser light affection. Non-stationary Schrödinger equation (NSE) was solved analytically and numerically by means of Maple 17 with initial wave function (w. f.) of generalized Gaussian type. This one described the converging 1D probability flux and fitted well the quantum operator of initial conditions (IC). For the IC one can observe, first, the collapse of w. f. packet into extremely narrow 1D space interval of length  $\Delta x \sim \sqrt{m\omega/\hbar}$  and, second, its spreading back up to its starting half width  $\sigma_0 = \sqrt{(\xi^2(0))}$ , and all that — at dimensionless times  $\tau \leq 2\tau_0 = 0.25 \ln(16\sigma_0^4 + 1)$ . At certain phases  $\phi$  defined by  $\Omega$  and  $\sigma_0$  the wave packet center  $\xi_{av}(\tau) = \hat{x}(\tau)\sqrt{m\omega/\hbar}$  displayed nonharmonic oscillating behavior near some slowly drifting space position within this time interval and after that leaved onto infinity while the unlimited packet spreading. And the phases themselves served as bifurcation points separating the NSE solutions with the  $\xi_{av}(\tau)$  outgoing to  $+\infty$  from those with  $-\infty$ . In “resonant” case of  $\Omega = \omega$  the values  $\phi(\Omega = 1, n)$  obeyed an inverted Fermi–Dirac formula of  $n = \log_2 \sigma_0$ ; for differing  $\Omega$ s the asymptotic of  $\phi(\Omega, n \rightarrow \infty)$  obeyed well classical law.

**Key words and phrases:** driven inverted oscillator, non-stationary Schrödinger equation (NSE), Gaussian wave packet, collapse, phase shift, stabilization, bifurcation, Maple

## References

1. I. Serban, F. Wilhelm, Dynamical Tunneling in Microscopic Systems, Phys. Rev. Lett. 10 (2007) 101–104.  
URL <https://www.researchgate.net/publication/5913852>
2. S. Baskoutas, A. Jannussistl, R. Mignani, Dissipative Tunneling of the Inverted Caldirola–Kanai Oscillator, J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994) 2189–2196.

3. S. Matsumoto, M. Yoshimura, Dynamics of Barrier Penetration in Thermal Medium: Exact Result for Inverted Harmonic Oscillator, *Phys. Rev. A* 59 (6) (2000) 2201–2238.
4. L. Pedrosa, A. de Lima, A. de M. Carvalho, Gaussian Wave Packet States of Generalized Inverted Oscillator With Time-Dependent Mass and Frequency, *Can. J. of Phys* 93 (2015) 3–7.
5. Y. Nogami, F. Toyama, Nonlinear Schrödinger Soliton in a Time-Dependent Quadratic Potential, *Phys. Rev. E* 49 (5) (1994) 4497–4501.
6. N. F. Stepanov, V. I. Pupyshev, Quantum Mechanics of Molecules and Quantum Chemistry: Textbook, MSU Publishers, Moscow, 1991, in Russian.
7. B. N. Zakhar'ev, Discrete and Continuous Quantum Mechanics Exactly Solvable Models, *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei* 23 (5) (1992) 1387–1468, in Russian.
8. C. A. Muñoz, J. Rueda-Paz, K. B. Wolf, Discrete Repulsive Oscillator Wavefunctions, *J. Phys. A: Math. Theor.* 42 (2009) 485210.
9. G. Barton, Quantum Mechanics of the Inverted Oscillator Potential, *Annals of Physics* 166 (2) (1986) 322–363.
10. P. Duclosi, E. Soccorsi, P. Stoviček, et al., On the Stability of Periodically Time-Dependent Quantum Systems, *Rev. in Math. Phys.* 6 (2008) 212–240.
11. V. G. Bagrov, D. M. Gitman, Coherent States of Inverse Oscillators and Related Problems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 46 (2013) 325305.
12. I. Zlotnik, Numerical Methods for Solving the Generalized Time-Dependent Schrödinger Equation in Unbounded Domains, Ph.D. thesis, MPEI (2013).