УДК 517.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-113-122

О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка. Часть 2. Интегрирование в квадратурах

М. Д. Малых[*][†]

[*] *Факультет наук о материалах*
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991
[†] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Метод М.Н. Лагутинского (1871–1915) позволяет искать рациональные интегралы и многочлены Дарбу заданного дифференциального кольца и поэтому может быть использован при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений в символьном виде. В настоящей статье представлена реализация метода Лагутинского, выполненная в свободной системой компьютерной алгебры Sage, и дан обзор её возможностей по интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде.

Вторая часть статьи посвящена интегрированию в квадратурах заданного дифференциального уравнения вида $p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$, где $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$. Теорема М. Зингера сводит задачу об интегрировании дифференциального уравнения в квадратурах к отысканию интегрирующего множителя вида $\mu = \exp\left(\int u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y\right)$, где $u, v \in \mathbb{Q}[x, y]$, отыскание функции v можно свести к отысканию многочлена Дарбу для вспомогательного дифференцирования кольца $\mathbb{Q}[x, y, v]$. Метод Лагутинского позволяет для заданного дифференцирования найти все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит некоторой заданной величины N и поэтому позволяет находит интегрирующие множители, в показателях которых стоят рациональные функции, порядок которых не превосходит N. Этот приём протестирован на примерах из задачника А.Ф. Филиппова.

Ключевые слова: метод Лагутинского, интегрирование в квадратурах, sage, sagemath

Введение

В первой части настоящей статьи был дан обзор основных понятий метода М.Н. Лагутинского [2–10] и представлен пакет Lagutinski [11] под Sage [1]. Во второй части дан отчёт об использовании метода Лагутинского для интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде и тестировании названного пакета этого пакета на уравнениях, взятых из задачника А. Ф. Филиппова [12].

1. Многочлены Дарбу

Определение 1. Многочленом Дарбу, или частным интегралом дифференцирования D, называют такой многочлен f, производная которого Df делится на f нацело.

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2016 г.
Исследование выполнено в рамках соглашения № 02.a03.21.0008 от 24.04.2016 г. между Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским университетом дружбы народов. Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00556.
Автор признателен проф. Л.А. Севастьянову (РУДН), взявшему на себя труд прочитать статью в рукописи и сделавшему ряд важных замечаний. Приведённые в статье рисунки и вычисление были выполнены при помощи `Sage Mathematics Software` [1].

Если многочлен Дарбу разлагается на множители, то его сомножители тоже являются многочленами Дарбу [13].

Задача 1 (об отыскании многочлена Дарбу). Для заданной тройки R, D, B отыскать все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит заданного числа N

Теорема 1 (М. Н. Лагутинского, 1911). *Если порядок многочлена Дарбу не превосходит N, то определитель Δ_N или равен нулю или делится на этот многочлен Дарбу нацело.*

Если Δ_N равен нулю тождественно, то в силу теоремы Лагутинского дифференцирование допускает рациональный интеграл, а следовательно, и бесконечное число многочленов Дарбу.

При небольших порядках можно прямо вычислить определитель и разложить его на множители.

Пример 1. Все линейные относительно x и y многочлены Дарбу дифференцирования

$$D = y(x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2+x+2)\frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ являются линейными множителями определителя Δ_3.

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x+2)*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: load("lagutinski.sage")
None
sage: lagutinski_det(R,D,B,3).factor()
  (x + 1) * (x^2 + y^2 + 4*x + 4)
```

Поэтому имеется лишь единственный кандидат на эту роль — многочлен $x+1$. Непосредственной подстановкой можно проверить, что в данном случае получился многочлен Дарбу:

```
sage: D(x+1).factor()
y * (x + 1)
```

При больших N и операция вычисления определителя, и факторизация являются затратными. При необходимости факторизацию многочленов большого порядка можно сократить, приняв во внимание следующее наблюдение: если уравнение (1) имеет многочлен Дарбу f, порядок которого не превосходит N, то все многочлены $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \dots$ делятся на f нацело. Поэтому можно сначала вычислить наибольший общий делитель Δ_N, Δ_{N+1}, а затем среди его простых сомножителей отыскать многочлены Дарбу.

Пример 2. Отыщем все многочлены Дарбу до 4-го порядка относительно x, y дифференцирования

$$D = 3(x^2-4)\frac{\partial}{\partial x} + (3+xy-y^2)\frac{\partial}{\partial y},$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$.

```
sage: D=lambda phi: 3*(x^2-4)*diff(phi,x) +(3+x*y-y^2)*diff(phi,y)
sage: gcd(lagutinski_det(R,D,B,5*3),lagutinski_det(R,D,B,5*3+1)).factor()
  (x - 2)^22 * (x + 2)^22 * (y^4 - 4*x*y - 6*y^2 - 3) *
  (2*x*y^3 + y^4 + x^2 + 2*x*y + 6*y^2 - 3)
```

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что каждый из четырёх получившихся сомножителя, является многочленом Дарбу, см. [13, 14].

2. Интегрирование в квадратурах

2.1. Интегрируемость в квадратурах

Символьное интегрирование остаётся в рамках классической парадигмы интегрирования в квадратурах, восходящей ещё к Лейбницу и до сих пор доминирующей в элементарных курсах дифференциальных уравнений. Формализация этой парадигмы, восходящая к работам Лиувилля [15] и Д. Д. Мордухай-Болтовского [16–18], нуждалась во введении понятия элементарных функций, список которых обычно считают предметом договора [19]. Избавить теорию от упоминая упоминания об элементных функций можно при помощи P-интегралов Вольтерра.

Определение 2. Если дифференциальная 1-форма

$$u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$$

является точной, то выражения

$$\lim \sum (u_n \Delta x + v_n \Delta y) = \int u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$$

и

$$\lim \prod (1 + u_n \Delta x + v_n \Delta y) = e^{\int u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y}$$

являются функциями переменных x, y, которые обозначаются далее как

$$\mathrm{S}(u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(1 + u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y)$$

соответственно.

P-интеграл является столь же естественным обобщением произведения, как обычный S-интеграл — обобщением сложения, экспонента — трансцендентная функция, связывающая эти два интеграла.

Определение 3. Будем говорить, что зависимость z от переменных x, y можно выразить при помощи квадратур, если z можно представить как алгебраическую функцию переменных x, y и вспомогательных функций $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ переменных x, y, каждая из которых выражается при помощи квадратуры из предыдущих:

$$\alpha_i = \mathrm{S}\left(f_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})\mathrm{d}x + g_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})\mathrm{d}y\right)$$

или

$$\alpha_i = \mathrm{P}\left(1 + f_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})\mathrm{d}x + g_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})\mathrm{d}y\right),$$

где f_i, g_i — алгебраические функции своих аргументов.

Пример 3. Функция x^y представима при помощи квадратур, поскольку

$$x^y = \exp(y \ln x) = \exp \int \left(\frac{y\mathrm{d}x}{x} + \ln x\mathrm{d}y \right) = \mathrm{P}\left[1 + \frac{y\mathrm{d}x}{x} + \mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \cdot \mathrm{d}y\right].$$

Определение 4. Будем говорить, что дифференциальное уравнение

$$p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y], \tag{1}$$

интегрируется при помощи n квадратур, если оно имеет однопараметрическое семейство интегральных кривых, заданных уравнением

$$F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, x, y, C) = 0,$$

левая часть которого является алгебраический функцией x, y и квадратур $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Задача 2 (об интегрировании в квадратурах). Выяснить, интегрируется ли заданное уравнение (1) в квадратурах; в случае утвердительного ответа выписать эти квадратуры.

Теорема 2. *Если дифференциальное уравнение* (1) *интегрируется при помощи конечного числа квадратур, то оно допускает интегрирующий множитель среди P-интегралов вида*

$$\mu = \mathrm{P}(1 + u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) = e^{\int u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y}, \tag{2}$$

где $u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$ *— точная дифференциальная форма, коэффициенты* u *и* v *принадлежат полю* $\mathbb{Q}(x, y)$.

Эта теорема может быть доказана элементарными средствами времён Лиувилля и представляет собой вариацию на тему теоремы об интегрирующем множителе, доказанной М. Зингером [20]; сама возможность элементарного доказательства теоремы Зингера была отмечена в [21].

Теорема 3. *Дифференциальное уравнение* (1) *интегрируется при помощи конечного числа квадратур, в том и только в том случае, когда дифференцирование*

$$D_v = q^2 \frac{\partial}{\partial x} - pq \frac{\partial}{\partial y} + \left(vq^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{q} + q^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} \tag{3}$$

кольца $\mathbb{Q}[x, y, v]$ *допускает многочлен Дарбу* F*, линейный относительно* v*. Зная один такой многочлен, можно найти* u *и* v *из СЛАУ*

$$\begin{cases} pv - qu + \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ F(x, y, v) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

и вычислить интегрирующий множитель по формуле (2).

Теорема 3 сводит исследование интегрируемости дифференциального уравнения в квадратурах к задаче об отыскании многочленов Дарбу.

Задача 3 (об отыскании многочлена Дарбу). Для заданной тройки R, D, B отыскать все неприводимые многочлены Дарбу.

Эта задача, однако, отличается от решённой выше задачи 1 тем, что в ней не задана граница для порядка. В настоящее время не известны алгоритмы решения этой задачи даже для случая $R = \mathbb{Q}[x, y]$ [13].

Метод Лагутинского позволяет легко отыскивать все многочлены Дарбу, являющиеся линейными комбинациями первых N из набора B мономов

$$1, x, y, v, xv, yv, \dots,$$

линейных по v. Функция `lagutinski_uv(R,p,q,N)` из пакета Lagutinski отыскивает все такие многочлены и, если такие многочлены нашлись при заданном N, возвращает u и v.

Пример 4. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + \frac{x}{y}$$

или

$$(x + y^2)\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = 0.$$

Имеем
```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,(x+y^2),-y,2)
[[-2, 0]]
```
Отсюда
$$\mu = \exp \int -2\mathrm{d}x = e^{-2x};$$
и ответ даётся квадратурой
$$\int e^{-2x}\left[(x+y^2)\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y\right] = C.$$

2.2. Интегрирование тестовых задач

Задавшись на удачу числом N, попытаемся проинтегрировать уравнения № 301-331 из задачника А.Ф. Филиппова. Среди этих уравнений 20 имеют вид (1), 18 из 20 уравнений интегрируются при $N = 4 \div 5$.

Замечание 1. Все упомянутые задачи интегрируются в элементарных функциях и поэтому в теории должны просто решаться по алгоритму Преля–Зингера [13]. Этот алгоритм и некоторые его обобщения реализованы в пакете Lsolver [22, 23] под Maple, обсуждение его возможностей выходит за рамки настоящей статьи.

Пример 5. Уравнение № 308 интегрируется при $N = 5$
$$x^2y' = y(x+y).$$
```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,-y*(x+y),x^2,5)
  [[(-1)/x, (-2)/y]]
```
$$\mu = \exp - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{2\mathrm{d}y}{y} = e^{-\ln\left(xy^2\right)} = \frac{1}{xy^2}$$
и ответ даётся квадратурой
$$\int \frac{-y(x+y)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y}{xy^2} = C,$$
которая в данном случае берётся в элементарных функциях.

Оба оставшихся номера интегрируются при большем N и приметны тем, что определители Лагутинского 13-го порядка для них обращаются в ноль, поэтому имеется бесконечно много многочленов Дарбу, а следовательно и вариантов для v.

Пример 6. Уравнение № 327
$$\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2.$$

В этом примере определители считаются очень быстро и ответ получается при $N = 12$.
```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,2*x-y,2*y+x,12)
  [[(-y)/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2)], [(2*x - 3*y)/(2*x^2 + 2*y^2),
  (3*x + 2*y)/(2*x^2 + 2*y^2)]]
```

2.3. Практическое определение порядка

Проделанный вычислительный эксперимент подсказывает, что для интегрирования заданного дифференциального уравнения как правило достаточно взять очень небольшое $N = 4 \div 5$. Если заранее не известно, что уравнение интегрируется в квадратурах, то возникает вопрос о том, стоит ли тратить ресурсы на повышение N. Для задачи Дебона был указан быстрый практический способ подбора N — вычисление определителя Лагутинского Δ_N в случайной точке. Та же идея может быть использована и при подборе N при отыскании линейных по v многочленов Дарбу.

Численные эксперименты указывают на то, что в общем случае последовательность определителей Лагутинского $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \dots$ не имеет общего делителя, зависящего от v. В особом же случае, когда имеется многочлен Дарбу N-го порядка, все эти определители делятся на него нацело в силу теоремы 1. Если взять две случайные точки (x_0, y_0, v_0) и (x_0, y_0, v_1) и вычислить значения $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}$ в этих двух точках, то разложения на множители

$$\gcd(\Delta_N(x_0, y_0, v_0), \Delta_{N+1}(x_0, y_0, v_0), \dots), \quad \gcd(\Delta_N(x_0, y_0, v_1), \Delta_{N+1}(x_0, y_0, v_1), \dots)$$

в общем случае совпадают, в особом же случае появятся различные множители. Функция `lagutinski_uv_random(R,p,q,N)` возвращает разложение такой пары чисел. Трудность идентификации особого случая состоит в том, что степени чисел 2, 3 и 5, которые появляются при факторизации, могут меняться и в общем случае.

Пример 7. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(x + 1)y\mathrm{d}x - (x - xy - y^2 + x^2)\mathrm{d}y = 0,$$

которое имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{e^{x/y}}{(x + y)^2} = e^{\frac{x}{y} - 2\ln(x+y)} = e^{\int \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{x+y}},$$

найденный в [22] из тех соображений, что $x + y$ — многочлен Дарбу. Для нашего подхода уравнение очень трудное, поскольку v является многочленом, содержащим третьи степени x и y, то есть $N \simeq 20$. При $N = 13$ первое испытание даёт

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),13)
  [2^270 * 3^5 * 5^77 * 11^20 * 139^13 * 479^72, 2^271 * 3^5 * 5^77 *
  11^19 * 139^13 * 479^72]
```

Хорошо видно, что оба числа являются произведениями одних и тех же простых чисел, в данном случае 2, 3, 5, 11, 139 и 479. Второе испытание при том же N даёт

```
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),13)
[2^251 * 3^452 * 5^3 * 7^72 * 41^19, 2^256 * 3^452 * 5^3 * 7^72 * 41^19]
```

Опять оба числа являются произведениями одних и тех же простых чисел. То же явление наблюдается вплоть до $N = 17$:

```
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),17)
  [2^237 * 3^51 * 5^292 * 7^163 * 31^129, 2^237 * 3^49 * 5^292 * 7^163 *
  11 * 31^129]
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),17)
  [2^424 * 3^17 * 5^260 * 11^129 * 23^21 * 31^129, 2^424 * 3^30 *
  5^260 * 11^129 * 23^21 * 31^129]
```

Ситуация меняется при $N = 18$:

```
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),18)
  [2^556 * 3^270 * 5 * 7^76 * 109^146 * 39023, 2^540 * 3^270 * 7^76 *
  109^146 * 331 * 8821]
```

Эти числа не являются произведениями одних и тех же простых чисел, первое имеет множитель 39023, а второе — $331 \cdot 8821$. Повторное испытание приводит к другим числам, но сохраняет само явление:

```
sage: lagutinski_uv_random(R,(x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2),18)
  [2^403 * 3^14 * 43^23 * 47^38 * 5003^145 * 195359, 2^407 * 3^12 *
  43^23 * 47^38 * 5003^145 * 35863]
```

Поэтому вероятно Δ_{17} и Δ_{18} имеют общий множитель, зависящий от v. Это означает, что многочлен Дарбу имеет смысл искать при $N = 18$.

Было бы крайне желательно выяснить геометрический смысл числа N и заменить задачу 2 на задачу с заданным N.

2.4. Применение теории интегрирующего множителя к решению задачи Дебона

В тех случаях, когда решение задачи Дебона требует вычисления определителей слишком большого порядка, вычисление интегрирующего множителя часто не представляет никакого труда.

Пример 8. Рассмотрим уравнение

$$(5x^4 + y)y\mathrm{d}x + (3x^4 + 2y)x\mathrm{d}y = 0.$$

Выясним, допускает ли это уравнение интегральные кривые порядка 9 или меньше:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ,2)
sage: D=lambda phi: (3*x^4+2*y)*x*diff(phi,x) -(5*x^4+y)*y*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,55)==0
False
```

Раз определитель не равен нулю тождественно, то такие интегральные кривые не допускаются. Попытаемся выяснить, интегрируется ли это уравнение в квадратурах:

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R,(5*x^4+y)*y,(3*x^4+2*y)*x,6)
  [[10/7/x, 20/(7*y)]]
```

Отсюда

$$\ln \mu = \frac{10}{7} \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{2\mathrm{d}y}{y} = \frac{10}{7} \ln\bigl(xy^2\bigr)$$

и поэтому

$$\mu = x^{10/7} y^{20/7}.$$

Следовательно, уравнение интегральных кривых даётся квадратурой

$$\int (5x^4 + y)x^{10/7}y^{20/7+1}\mathrm{d}x + (3x^4 + 2y)x^{10/7+1}y^{20/7}\mathrm{d}y = C.$$

Эта квадратура берётся в радикалах. Теоретически рационализация должна привести к рациональному интегралу, однако выполнить её на практике весьма непросто.

Заключение

Метод Лагутинского и основанные на нем алгоритмы дают возможность решать многие типы дифференциальных уравнений в алгебраических функциях и в квадратурах. Среди этих алгоритмов встречаются и вычислительно лёгкие, и вычислительно трудные. К числу лёгких, например, относится алгоритм, который позволяет выяснить, являются ли интегральные кривые заданного дифференциального уравнения алгебраическими кривыми заданного порядка. Все эти алгоритмы можно с успехом применять в системах символьных вычислений.

Литература

1. *Stein W. A. et al.*, 2015. — Sage Mathematics Software (Version 6.7). — The Sage Development Team. — `http://www.sagemath.org`.
2. *Лагутинский М. Н.* Приложение полярных операций к интегрировананию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1911. — Т. 12. — С. 111–243.
3. *Лагутинский М. Н.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальньных алгебраических уравнений // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1912. — Т. 13. — С. 200–224.
4. *Christopher C., Libre J., Vitório Pereira J.* Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields // Pacific J. Math. — 2007. — Vol. 229, No 1. — P. 63–117.
5. *Chéze G.* Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time // Journal of Complexity. — 2011. — Vol. 27, No 2. — Pp. 246–262.
6. *Малых М. Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2016. — Т. 5, № 24. — С. 327–336.
7. *Malykh M. D.* On M.N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations // International Conference "Polynomial Computer Algebra'2016". — 2016. — Pp. 57–58.
8. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений // Компьютерная алгебра. Материалы международной конференции. — 2016. — С. 25–29.
9. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка в конечном виде // Пятая международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование». Сборник докладов. — 2016. — С. 81–82.
10. *Добровольский В. А., Стрельцын Ж., Локоть Н. В.* Михаил Николаевич Лагутинский (1871–1915) // Историко-математические исследования. — 2001. — Т. 6. — С. 111–127.
11. *Malykh M. D.*, 2016. — Lagutinski.sage, ver. 1.5. — RUDN University. — `http://malykhmd.neocities.org`.
12. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: R&C, 2000.
13. *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. — М.-Ижевск: R & C, 2006.
14. *Zoladek H.* Algebraic Invariant Curves for the Liénard Equation // Trans. Am. Math. Soc. — 1998. — Vol. 350. — Pp. 1681–1701.
15. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. — Москва: ИЛ, 1949. — Т. 1.
16. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка, статья I // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1907. — Т. 10. — С. 34–64.
17. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка, статья II // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1907. — Т. 10. — С. 231–270.
18. *Prelle M. J., Singer M. F.* Elementary First Integrals of Differential Equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 279. — P. 215–229.
19. *Borwein J. M., Crandall R. E.* Closed Forms: What They Are and Why We Care // Notices of the AMS. — 2013. — Vol. 60. — Pp. 50–65.

20. *Singer M. F.* Liouvillian First Integrals of Differential Equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 333. — P. 673–688.
21. *Junzhi Lei.* Nonlinear Differential Galois Theory. — Arxiv:0608492v2. — 2011.
22. Determining Liouvillian First Integrals for Dynamical Systems in the Plane / J. Avellar, L. G. S. Duarte, S. E. S. Duarte, L. A. C. P. da Mota // Computer Physics Communications. — 2007. — Vol. 177. — P. 584–596.
23. *Avellar J., Duarte L., Duarte S., da Mota L.* Lsolver (Version 2.0). — 2013. — `http://cpc.cs.qub.ac.uk`.

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-113-122

On Application of M. N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 2

M. D. Malykh[*†]

[*] *Faculty of Materials Sciences*
Lomonosov Moscow State University
GSP-1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation
[†] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

The method of M. N. Lagutinski (1871–1915) allows to find rational integrals and Darboux polynomials for given differential ring and thus can be used for integration of ordinary differential equations in symbolic form. A realization of Lagutinski method was made under free open-source mathematics software system Sage and will be presented in this article with application for symbolic integration of 1st order differential equations.

The second part is devoted to integration of given differential equation $p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$ with $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ in quadratures. According to the theorem of M. Singer the problem of integration in quadratures is equivalent to the finding of integrating factor of the form $\mu = \exp\left(\int u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y\right)$ where $u, v \in \mathbb{Q}[x, y]$. The function v can be found as a root of Darboux polynomial for some auxiliary differentiation of the ring $\mathbb{Q}[x, y, v]$. By Lagutinski method we can find all Darboux polynomials for given differentiation of polynomial ring if degrees of required polynomials are less than given boundary N and thus we can find integration factor of the form stated above. The theory and its realization in Sage are tested on numerous examples from standard for Russia text-book by A. F. Filippov.

Key words and phrases: Lagutinski method, integration in quadratures, sage, sagemath

References

1. W. A. Stein, et al., Sage Mathematics Software (Version 6.7), The Sage Development Team (2015).
URL `http://www.sagemath.org`
2. M. N. Lagutinski, The Application of Polar Operations to Integration of the Ordinary Differential Equations in Finite Terms, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 12 (1911) 111–243, in Russian.
3. M. N. Lagutinski, On Some Polynoms and Their Aplication for Algebraic Integration of Ordinary Differential Algebraic Equations, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 13 (1912) 200–224, in Russian.
4. C. Christopher, J. Llibre, J. Vitório Pereira, Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields, Pacific J. Math. 229 (1) (2007) 63–117.
5. G. Chéze, Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time, Journal of Complexity 27 (2) (2011) 246–262.

6. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinsky's Method for Computation of Rational Integrals of Ordinary Differential Equations Systems, Vestnik of NRNU MEPhi 5 (24) (2016) 327–336, in Russian.
7. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations, in: International Conference "Polynomial Computer Algebra'2016", 2016, pp. 57–58, in Russian.
8. M. D. Malykh, On Integration of Ordinary Differential Equations, in: Computer algebra. Materials of international conference, 2016, pp. 25–29, in Russian.
9. M. D. Malykh, On Integration of 1st Order Differential Equations in a Finite Terms, 2016, pp. 81–82, in Russian.
10. V. A. Dobrovol'skij, J.-M. Strelcyn, N. V. Lokot', Mihail Nikolaevich Lagutinskij (1871–1915), Istoriko-matematicheskie issledovanija 6 (2001) 111–127, in Russian.
11. M. D. Malykh, Lagutinski.sage, ver. 1.5., RUDN University (2016). URL `http://malykhmd.neocities.org`
12. A. F. Filippov, Text-Book on Differential Equations, R&C, Izhevsk, 2000, in Russian.
13. A. Goriely, Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems, World Scientific Publ., 2001.
14. H. Zoladek, Algebraic Invariant Curves for the Liénard Equation, Trans. Am. Math. Soc. 350 (1998) 1681–1701.
15. G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1944.
16. D. Mordukhai-Boltovski, Researches on the Integration in Finite Terms of Differential Equations of the First Order-I, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 10 (1907) 34–64, in Russian.
17. D. Mordukhai-Boltovski, Researches on the Integration in Finite Terms of Differential Equations of the First Order-II, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 10 (1907) 231–270, in Russian.
18. M. J. Prelle, M. F. Singer, Elementary First Integrals of Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983) 215–229.
19. J. M. Borwein, R. E. Crandall, Closed Forms: What They Are and Why We Care, Notices of the AMS 60 (2013) 50–65.
20. M. F. Singer, Liouvillian First Integrals of Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992) 673–688.
21. Junzhi Lei, Nonlinear Differential Galois Theory, Arxiv:0608492v2 (2011).
22. J. Avellar, L. G. S. Duarte, S. E. S. Duarte, L. A. C. P. da Mota, Determining Liouvillian First Integrals for Dynamical Systems in the Plane, Computer Physics Communications 177 (2007) 584–596.
23. J. Avellar, L. Duarte, S. Duarte, L. da Mota, Lsolver (version 2.0). (2013). URL `http://cpc.cs.qub.ac.uk`