УДК 519.123.142

О возможных типах майорановских частиц

О. С. Космачёв, А. А. Гусев

Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская обл., Россия, 141980

Найдены уравнения для двух типов лептонов, которые являются синглетами, т. е. частицами, не имеющими античастиц. Каждое синглетное уравнение формируется на основе только одного (из четырёх возможных) компонента связности группы Лоренца. Поэтому данные уравнения не инвариантны относительно любого из дискретных преобразований таких, как пространственное отражение, обращение времени и их произведения. Это свойство синглетных состояний является наиболее существенным отличием по сравнению с другими лептонами. Взаимодействия с участием синглетов могут оказаться выделенными для понимания нарушения P- и T-инвариантности на микроскопическом уровне.

Ключевые слова: нейтрино, неприводимые представления конечных групп, майорановские частицы.

1. Введение

Термин «майорановское нейтрино» не сходит со страниц современных статей, посвящённых нейтринологии. Тем не менее полной определённости в вопросе о том, что такое майорановское нейтрино, не имеется. Данный вопрос является малой частью более общей нерешённой проблемы — как теоретически описывать лептоны, чтобы удовлетворить всему комплексу нынешних экспериментальных сведений о них.

Пионерская, поисковая работа Майораны [1] поставила проблему описания нейтральных частиц, но не исчерпала её. Кроме того, как следует из текста статьи, в ней поставлены две различные задачи без должного разграничения между ними — описание нейтральных частиц и описание нейтральных частиц, не имеющих античастиц, или тождественных своим античастицам. При этом все построения ограничиваются частицами со спином 1/2. Переход от уравнения Дирака [2] к описанию нейтральных частиц осуществляется методом, который выглядит как искусный, но частный приём. Действительно, устранить различие в поведении частицы и античастиц при наличии электромагнитного поля можно, если операторная часть уравнения Дирака представляет собой чисто действительное выражение. Добиться этого каким-либо не особенным преобразованием подобия над всеми γ-матрицами невозможно. Поэтому лишнюю мнимую единицу в уравнении Дирака Майорана ввёл в одну из γ-матриц. Такой подход является простым, но не самым общим. Он ограничивает поиск нейтральных частиц даже для спина 1/2.

Можно показать [3], что приём Майораны равносилен замене определяющих соотношений Дирака

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

на такие, что

$$\gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, \quad \gamma_s^2 = 1, \quad (s, t = 1, 2, 3),$$
$$\gamma_s\gamma_4 + \gamma_4\gamma_s = 0, \quad \gamma_4^2 = -1.$$

Статья поступила в редакцию 15 июня 2006 г.

При этом уравнение, полученное на основе таким образом построенной группы γ-матриц, описывает массивный электрически нейтральный дублет (частица–античастица). Переход к представлению вторичного квантования не может изменить положения. Ничего, кроме дублета массивных нейтрино, полученное уравнение не описывает, на какие бы части оно не разделялось. Поэтому надежды автора на то, что «... нет никаких оснований предполагать наличие антинейтрона или антинейтрино» носят характер декларации, догадки, но не теоремы. Во всяком случае в рамках предложенного уравнения. Поэтому цитируемая работа не может считаться завершённой в смысле поиска ответа на вопрос о возможных типах нейтральных синглетных частиц со спином $1/2$. Решению названной задачи посвящена данная статья.

Предложенный ранее [3–6] и развиваемый в данной работе подход можно назвать кинематическим в том смысле, что он характеризуется точным выполнением общих математических требований и физической интерпретацией, которая следует из надёжно установленных положений. Таковым, в частности, является уравнение Дирака как основа для описания лептонного дублета электрон–позитрон. То же можно сказать о коммутационных соотношениях для линейных представлений группы Лоренца [7]. Они позволяют однозначно интерпретировать операторы трёхмерных поворотов и бустов.

Информативность и содержательность проведённого анализа возросли после того, как были найдены новые типы коммутационных соотношений для представлений группы Лоренца и установлена их физическая интерпретация. Дополнительные нестандартные представления группы Лоренца связаны с расширением и охватом всех представлений за счёт дискретных симметрий типа обращения времени, пространственной инверсии и их произведения в инфинитезимальной форме. Важным для практических приложений является то, что были получены в явном виде группы, на которых реализуются как известное (стандартное, т. е. однородное, собственное, ортохронное) неприводимое представление группы Лоренца, так и вновь найденные. Именно они оказались структурными составляющими для лептонных уравнений.

2. Структурные составляющие лептонных уравнений

На основе анализа группы γ-матриц Дирака [5] (далее группа Дирака, обозначаемая как $D_\gamma(II)$) было установлено, что она содержит две инвариантных подгруппы 16-го порядка d_γ и b_γ. На первой из них реализуется стандартное неприводимое представление группы Лоренца [7]. Элементы алгебры, определённой на этой группе, удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\
[a_1, b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\
[a_1, b_2] = 2b_3, & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\
[a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\
[a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. &
\end{array} \tag{1}$$

На второй подгруппе b_γ реализуется неприводимое представление, которое было названо T-сопряжённым по отношению к стандартному. Коммутационные соотношения (КС) при этом имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&[a_1, a_2] = 2a_3, && [a_2, a_3] = 2a_1, && [a_3, a_1] = 2a_2,\\
&[b'_1, b'_2] = 2a_3, && [b'_2, b'_3] = 2a_1, && [b'_3, b'_1] = 2a_2,\\
&[a_1, b'_1] = 0, && [a_2, b'_2] = 0, && [a_3, b'_3] = 0,\\
&[a_1, b'_2] = 2b'_3, && [a_1, b'_3] = -2b'_2, &&\\
&[a_2, b'_3] = 2b'_1, && [a_2, b'_1] = -2b'_3, &&\\
&[a_3, b'_1] = 2b'_2, && [a_3, b'_2] = -2b'_1. &&
\end{aligned} \tag{2}
$$

Нетрудно проверить, что переход от (1) к (2) равносилен замене

$$b_k \to b'_k = ib_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

При этом происходит переход одной группы в другую $d_\gamma \to b_\gamma$.

Последующий анализ подгруппы $d_\gamma = d_\gamma[a_1, a_2, c]$ (здесь (a_1, a_2, c) — генераторы подгруппы) позволил установить её двойственность [6]. Выяснилось, что подгруппа d_γ содержит две неизоморфные подгруппы $Q_2[a_1, a_2]$ и $q_2[a_1, a'_2]$. Здесь (a_1, a_2) и (a_1, a'_2) — генераторы этих подгрупп и $a'_2 = a_2c$, $a'_3 = a_1a_2c$. $Q_2[a_1, a_2]$ — хорошо известная группа кватернионов. КС алгебры кватернионов совпадают с КС для инфинитезимальных операторов группы трёхмерных вращений [4].

Элементы алгебры, построенной на $q_2[a_1, a'_2]$, удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_1, a'_2] = 2a'_3, \quad [a'_2, a'_3] = -2a_1, \quad [a'_3, a_1] = 2a'_2. \tag{4}$$

Они практически совпадают с таковыми для группы трёхмерных вращений (см. первую строку (1) или (2)). Отличие — лишь в знаке второго коммутатора.

Всем упомянутым здесь и далее конечным группам сопоставляется их циклическая структура (ЦС), т. е. сумма всех элементов группы, записанная в мультипликативной форме [4]. Двойственность d_γ означает, что её ЦС может быть записана с помощью двух разных наборов генераторов

$$d_\gamma = Q_2[a_1, a_2][e + c] = q_2[a_1, a'_2][e + c]. \tag{5}$$

При новом выборе генераторов (a_1, a'_2, c) получается другой тип коммутационных соотношений, который мы будем связывать с подгруппой f_γ:

$$
\begin{aligned}
&[a_1, a'_2] = 2a'_3, && [a'_2, a'_3] = -2a_1, && [a'_3, a_1] = 2a'_2,\\
&[b'_1, b'_2] = -2a'_3, && [b'_2, b'_3] = 2a_1, && [b'_3, b'_1] = -2a'_2,\\
&[a_1, b'_1] = 0, && [a'_2, b'_2] = 0, && [a'_3, b'_3] = 0,\\
&[a_1, b'_2] = 2b'_3, && [a_1, b'_3] = -2b'_2, &&\\
&[a'_2, b'_3] = -2b'_1, && [a'_2, b'_1] = -2b'_3, &&\\
&[a'_3, b'_1] = 2b'_2, && [a'_3, b'_2] = 2b'_1. &&
\end{aligned} \tag{6}
$$

При этом группы f_γ и d_γ изоморфны.

Таким образом выяснилось, что с группой Дирака связаны две неизоморфные подгруппы и три типа КС, если учесть двойственность d_γ. Представление типа (6) было названо P-сопряжённым по отношению к d_γ, так как различие возникает уже в первой строке КС (6), т. е. на уровне подгруппы трёхмерных вращений. При этом в данном случае все отклонения от стандарта (1) являются следствиями изменений в первой строке. Переход от группы d_γ к f_γ и к КС типа (6) равносилен замене $a_2 \to ia'_2$, и как следствие получаем:

$$a_3 \to ia'_3; \quad b_1 \to b''_1, \quad b_2 \to ib''_2, \quad b_3 \to ib''_3. \tag{7}$$

Аналогично было установлено, что группа γ-матриц уравнения для дублета массивных нейтральных лептонов (далее обозначается $D_\gamma(I)$) также содержит две инвариантных подгруппы d_γ и c_γ. Все три подгруппы $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$ не изоморфны друг другу. Коммутационные соотношения на основе c_γ имеют вид [3]:

$$\begin{array}{lll} [a_1, a_2'] = 2a_3', & [a_2', a_3'] = -2a_1, & [a_3', a_1] = 2a_2', \\ [b_1'', b_2''] = 2a_3', & [b_2'', b_3''] = -2a_1, & [b_3'', b_1''] = 2a_2', \\ [a_1, b_1''] = 0, & [a_2', b_2''] = 0, & [a_3', b_3''] = 0, \\ [a_1, b_2''] = 2b_3'', & [a_1, b_3''] = -2b_2'', & \\ [a_2', b_3''] = -2b_1'', & [a_2', b_1''] = -2b_3'', & \\ [a_3', b_1''] = 2b_2'', & [a_3', b_2''] = 2b_1''. & \end{array}$$

Можно убедиться, что подобно соотношениям (3) и (7) переход от КС (1) к (8) равносилен такому преобразованию операторов

$$a_2 = ia_2', \quad a_3 = ia_3', \quad b_1 = -b_1', \quad b_2 = -ib_2', \quad b_3 = -ib_3'. \tag{8}$$

Если преобразование перехода от (1) к (2) обозначить как $\langle T \rangle$, то можно получить такие равенства

$$b_\gamma = \langle T \rangle d_\gamma, \quad d_\gamma = \langle T^{-1} \rangle b_\gamma, \tag{9}$$

где $\langle T^{-1} \rangle$ соответствует преобразованиям $b_1' = ib_1$, $b_2' = ib_2$, $b_3' = ib_3$.

Для перехода от (1) к (6) введём обозначение $\langle P \rangle$, тогда

$$f_\gamma = \langle P \rangle d_\gamma, \quad d_\gamma = \langle P^{-1} \rangle f_\gamma. \tag{10}$$

Здесь $\langle P^{-1} \rangle$ соответствует преобразованию $a_2' = ia_2$, следствием которого являются преобразования $a_3' = ia_3$, $b_2' = ib_2$, $b_3' = ib_3$.

Введём обозначение для совместного последовательного действия двух указанных преобразований $\langle P \rangle \langle T \rangle \equiv \langle PT \rangle$ и $\langle T \rangle \langle P \rangle \equiv \langle TP \rangle$. Тогда совместная операция даёт

$$\langle TP \rangle d_\gamma = \langle PT \rangle d_\gamma = c_\gamma. \tag{11}$$

Можно показать, что все четыре возможных преобразования $\langle T \rangle, \langle P \rangle, \langle TP \rangle = \langle PT \rangle$ образуют замкнутую систему преобразований в пространстве четырёх типов КС или в пространстве четырёх групп с учётом изоморфизма d_γ и f_γ. Исходя из результатов (3), (8) и (9), можно записать следующий ряд равенств:

$$\langle T \rangle d_\gamma = b_\gamma, \quad \langle P \rangle d_\gamma = f_\gamma, \quad \langle PT \rangle d_\gamma = c_\gamma, \tag{12}$$

$$\langle T^{-1} \rangle b_\gamma = d_\gamma, \quad \langle P \rangle b_\gamma = c_\gamma, \quad \langle T^{-1} P \rangle b_\gamma = f_\gamma, \tag{13}$$

$$\langle T^{-1} \rangle c_\gamma = f_\gamma, \quad \langle P^{-1} \rangle c_\gamma = b_\gamma, \quad \langle T^{-1} P^{-1} \rangle c_\gamma = d_\gamma, \tag{14}$$

$$\langle T \rangle f_\gamma = c_\gamma, \quad \langle P^{-1} \rangle f_\gamma = d_\gamma, \quad \langle P^{-1} T \rangle f_\gamma = b_\gamma. \tag{15}$$

В работе [6] был рассмотрен ещё один вариант уравнения типа Дирака (далее $D_\gamma(III)$), который служит основой для описания квартета безмассовых нейтрино. Структура группы γ-матриц, связанной с ним, заметно отличается от структуры двух предыдущих. При одинаковых порядках всех трёх групп, равных 32, центр группы $D_\gamma(III)$ содержит восемь элементов. Поэтому число сопряжённых классов становится равным 20 (вместо 17 в случае $D_\gamma(II)$ и $D_\gamma(I)$). Однозначным следствием такого положения является наличие неприводимых представлений размерности два вместо НП размерности четыре в случае $D_\gamma(II)$ и $D_\gamma(I)$. Это означает, что решения соответствующего уравнения будут представлять собой двухкомпонентные спиноры.

Кроме того, выяснилось, что в составе $D_\gamma(III)$ содержатся все четыре подгруппы $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$. Если формулировать определяющие соотношения для γ-матриц в духе Дирака [2], т. е. когда γ_1, γ_2, γ_3 имеют смысл инфинитезимальных операторов бустов, то получаем такие равенства:

$$\begin{gathered} \gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, \quad \gamma_s^2 = 1 \quad (s, t = 1, 2, 3), \\ \gamma_s\gamma_4 - \gamma_4\gamma_s = 0, \quad \gamma_4^2 = 1. \end{gathered} \tag{16}$$

Очевидное и принципиальное отличие от условия Дирака заключается в том, что γ_4 коммутирует со всеми остальными генераторами. Можно убедиться, что в группе не имеется четвёртого генератора, который антикоммутирует с первыми тремя.

Для последующего анализа воспользуемся известной теоремой о трёх типах матричных групп [8]. Согласно теореме, если $\mathit{\Gamma} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_\rho\}$ является неприводимой матричной группой, то

$$\mathbf{In} = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{\rho} \chi(\gamma_i^2) = \begin{cases} \;\;1, \\ -1, \\ \;\;0. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь ρ — порядок группы, $\chi(\gamma_i^2)$ — след квадрата i-й матрицы из данной матричной группы.

Согласно теореме, если группа относится к первому типу ($\mathbf{In} = 1$), то она эквивалентна группе вещественных матриц. В таком случае она эквивалентна также группе ортогональных матриц. Если группа относится ко второму типу ($\mathbf{In} = -1$), то она эквивалентна своей комплексно-сопряжённой группе (так, что существует матрица S такая, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$), но не вещественной группе. Здесь $*$ — символ комплексного сопряжения. Третий тип ($\mathbf{In} = 0$) характеризуется тем, что группа не эквивалентна комплексно-сопряжённой, то есть не существует матрицы S такой, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$.

Подчеркнём, что инвариантная величина не зависит от конкретного выбора представления для γ-матриц и определятся только соотношением между числом элементов четвёртого и второго порядков в группе D_γ, т. е. является некоторой структурной характеристикой группы. Далее эта численная характеристика неприводимой матричной группы будет называться структурным инвариантом.

Так, для уравнения Дирака $\mathbf{In}[D_\gamma(II)] = -1$, для дублета массивных нейтрино $\mathbf{In}[D_\gamma(I)] = 1$, а для квартета безмассовых нейтрино $\mathbf{In}[D_\gamma(III)] = 0$.

Все три упомянутые выше группы порождаются четырьмя генераторами и содержат в качестве подструктур d_γ, b_γ, c_γ, f_γ, которые являются максимальными инвариантными подгруппами. Более того, других подгрупп 16-го порядка в составе лептонных уравнений не имеется. В свою очередь, каждая из этих подгрупп порождается тремя антикоммутирующими генераторами. Это связано с тем, что для построения каждого из компонентов связности группы Лоренца необходимо и достаточно трёх антикоммутирующих генераторов.

Необходимость четвёртого генератора для формулировки волнового уравнения вытекает из весьма общих соображений. Исходным требованием в данном случае является, с одной стороны, квантово-механическое условие существования положительно определённой плотности вероятности и уравнение непрерывности для тока вероятности, в котором присутствуют четыре оператора — $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$.

С другой стороны, эти же четыре оператора присутствуют в линейном по этим операторам уравнении Дирака. И только из совместного выполнения как уравнения непрерывности, так и релятивистского волнового уравнения вытекают все свойства группы γ-матриц. Поэтому для записи релятивистского волнового уравнения в ковариантной форме необходимы четыре генератора, порождающие соответствующую группу γ-матриц. В свете этого утверждения открываются дополнительные возможности удовлетворить общим требованиям типа (16) и (17) при условии наличия тех же самых подструктур $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$ в составе группы. Две такие возможности со структурными инвариантами $\mathbf{In}[D_\gamma(IV)] = -1$ и $\mathbf{In}[D_\gamma(V)] = 1$ являются основным предметом настоящего сообщения.

3. Группы синглетов

Отказ от антикоммутации четвёртого генератора и его коммутация с тремя первыми открывают два новых варианта получения волновых уравнений. Они отличаются от квартетного (16) значениями структурных инвариантов.

Один из них, обозначаемый далее $D_\gamma(IV)$, задаётся такими определяющими соотношениями

$$\begin{gathered} \gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = -2\delta_{st} \quad (s,t = 1,2,3), \\ \gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 = 0, \quad \gamma_4^2 = 1. \end{gathered} \tag{18}$$

Вычисления дают при этом $\mathbf{In}[D_\gamma(IV)] = -1$.

При другом выборе определяющих соотношений

$$\begin{gathered} \gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 0, \quad s \neq t \quad (s,t = 1,2,3) \\ \gamma_3^2 = \gamma_2^2 = 1, \quad \gamma_1^2 = -1, \\ \gamma_4\gamma_s - \gamma_s\gamma_4 = 0, \quad \gamma_4^2 = 1 \end{gathered} \tag{19}$$

получаем группу, обозначаемую далее $D_\gamma(V)$, и величину структурного инварианта $\mathbf{In}[D_\gamma(V)] = 1$.

Обе группы, как и три предыдущие [3, 5, 6], имеют порядок 32 и, подобно квартетному состоянию, имеют 20 сопряжённых классов, центр группы состоит из восьми элементов второго порядка. Следовательно синглетные состояния описываются двухкомпонентными спинорами. Из условия редукции уравнений на основе (18) и (19) к уравнению Клейна–Гордона получаем значение массы, $m = 0$, в обоих случаях.

Основная особенность обеих групп заключается в том, что каждая из них содержит подгруппы одного типа: группа $D_\gamma(IV)$ содержит только подгруппы b_γ, а группа $D_\gamma(V)$ только подгруппы c_γ. Здесь имеются в виду подгруппы 16-го порядка, т. е. подгруппы, которые представляют тот или иной компонент связности группы Лоренца. Уравнения, связанные с новыми группами, не содержат $\langle T\rangle$-сопряжённых составляющих, а частицы не имеют античастиц. Таким образом мы получаем синглетные состояния.

4. Некоторые свойства синглетных состояний

Из соотношений (18), (19) совместно с требованием редукции к уравнению Клейна–Гордона следуют волновые уравнения. Для $D_\gamma(IV)$ волновое уравнение принимает вид:

$$(ip_4\gamma_4 - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{20}$$

где $p_4 = -i\partial/\partial t$, $p_s = -i\partial/\partial x_s$, $s = 1, 2, 3$. Здесь и далее $\hbar = c = 1$.

Волновое уравнение $D_\gamma(V)$ для конкретного выбора γ-матриц (19) принимает вид:

$$(p_4\gamma_4 - ip_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{21}$$

при тех же обозначениях, что и в уравнении (20). Аналогичные равенства можно записать для других вариантов, когда, согласно (19), или $\gamma_2^2 = -1$, или $\gamma_3^2 = -1$.

Из коммутационных соотношений (8) и определяющих соотношений (19) следует неравнозначность трёх пространственных направлений для подгруппы c_γ в группе синглетов типа $D_\gamma(V)$. Это есть следствие неоднотипности операторов a_1, a_2, a_3. Оператор a_1 имеет порядок четыре ($a_1^4 = I$), в то время как операторы a_2, a_3 имеют порядок два ($a_2^2 = a_3^2 = I$). Спиновое квантовое число в данном случае принимает действительное значение $1/2$ только вдоль направления a_1. Собственные значения операторов a_2 и a_3 являются мнимыми. Это означает, что спин имеет направление либо вдоль, либо против импульса, связанного с направлением a_1. Здесь положение во многом аналогично дублету массивных нейтрино [3].

Необходимо отметить, что на первый взгляд в уравнении (21) имеется выделенность одной из пространственных осей. Действительно, выражение $ip_1\gamma_1$ содержит множитель i, тогда как два других аналогичных выражения его не содержат. Но на самом деле с помощью элементов этой же самой группы можно совершить поворот вокруг одной из пространственных осей, и тогда множитель i будет стоять при γ_2 или при γ_3. Таким образом, никаких ограничений на направление импульса не имеется, но всегда при этом спин ориентирован по импульсу. В таком смысле можно говорить, что ковариантность формулировки в целом выполняется, так как все необходимые для этого предпосылки имеются, но в скрытой форме. Это можно воспринимать как неполноту стандартного представления группы Лоренца (1) для адекватного описания всего многообразия свойств лептонов.

Можно показать, что комплексное сопряжение является преобразованием автоморфизма для каждой из упомянутых групп γ-матриц. В силу такого свойства вопрос о положительной определённости квадратичной формы плотности вероятности, как справедливо отмечал Паули [9], является простым следствием линейности уравнения и многокомпонентности Ψ. Формулировка уравнения непрерывности для тока вероятности также не претерпевает принципиальных изменений.

Прямым вычислением можно показать, что во всех случаях, когда $m = 0$, оператор γ_4 (β в обозначениях Паули) становится кратным единице. Этот оператор умножается на $\partial/\partial t$ в ковариантной формулировке как волнового уравнения, так и уравнения непрерывности. Поэтому волновое уравнение в виде, предложенном Паули [9, с. 252]

$$\partial\Psi(\mathbf{x},t)/\partial t + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \partial\Psi(\mathbf{x},t)/\partial x_k = 0, \tag{22}$$

остаётся справедливым при условии замены σ_k на $(b_\gamma)_k$ в случае $D_\gamma(IV)$ и на $(c_\gamma)_k$ в случае $D_\gamma(V)$. Здесь σ_k — матрицы Паули, $k = 1, 2, 3$, а $(b_\gamma)_k$ и $(c_\gamma)_k$ — матричное представление групп b_γ и c_γ. Однако исключение при этом γ_4 из рассмотрения, согласно (18) и (19), приводит к отказу от волнового уравнения.

Матрицы $(b_\gamma)_k$ и $(c_\gamma)_k$, которые играют роль эквивалентов матриц σ_k, для конкретного выбора уравнений (20) и (21) имеют вид:

$$(b_\gamma)_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad (b_\gamma)_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad (b_\gamma)_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$(c_\gamma)_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad (c_\gamma)_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (c_\gamma)_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Подстановка в уравнения (20) и (21) решений в виде плоских волн, т. е. переход к p-представлению для стационарных решений, показывает, что решения существуют при положительных и отрицательных значениях энергии $E = \pm\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$. Отличие от уравнения Дирака [2] и варианта массивного дублета нейтрино [3] заключается в том, что в дублетных состояниях имеет место двукратное вырождение обоих значений энергии.

Из определяющих соотношений (18) и (19) следует, что связанные с ними группы имеют четыре неэквивалентных неприводимых представления размерности два. Каждому из них, согласно теореме Бернсайда, сопутствует по одному эквивалентному неприводимому представлению. Можно показать, что эквивалентные представления отличаются одно от другого только пространственным поворотом.

Четыре неэквивалентных представления отличаются обратными знаками элементов центра со следами, не равными нулю. В результате появляются четыре типа решений, отличающихся двумя знаками энергий и двумя значениями проекций спинов. Это прямое следствие того, что группы $D_\gamma(IV)$ и $D_\gamma(V)$ порождаются четырьмя генераторами и имеют порядок 32. В этом отношении синглетные уравнения вполне аналогичны дублетным.

Как уже отмечалось, каждая из групп $D_\gamma(IV)$ и $D_\gamma(V)$ имеет в своей структуре максимальную инвариантную подгруппу одного сорта — b_γ и c_γ соответственно. Различие свойств подгрупп ведёт к различию спиновых характеристик синглетов. Из коммутационных соотношений (2) для подгруппы b_γ очевидно, что все три пространственных направления эквивалентны для синглетов типа $D_\gamma(IV)$. Следовательно, ось квантования спина может быть направлена вдоль любого из них, так же, как у электрона или позитрона. Учитывая, что подгруппа b_γ связана с d_γ T-преобразованием (см. первое равенство из (12)), данный тип состояния далее будет называться T-синглетом.

Учитывая, что подгруппа c_γ связана с пространственно несимметричной подгруппой $q_2[a_1, a_2]$, данный тип состояния далее будет называться P-синглетом.

Сравнение групповой структуры синглетных уравнений, наглядной при её графическом отображении [6], со структурой трёх других лептонных уравнений показывает её выделенность. Любое из рассмотренных ранее лептонных уравнений [3, 6] обладает той или иной инвариантностью относительно дискретных преобразований $\langle T\rangle$, $\langle P\rangle$, $\langle PT\rangle$. Согласно равенствам (12)–(15), синглетные уравнения не инвариантны относительно любого из дискретных преобразований. Любое взаимодействие (гравитационное не рассматривается) меняет их трансформационные свойства, а значит и квантовые числа, характеризующие каждый из синглетов. Поэтому, если синглетные состояния реализуются в природе как самостоятельные объекты, то взаимодействия с их участием могут играть выделенную роль в поисках необратимости во времени или асимметрии «вещество-антивещество» на микроскопическом уровне.

5. Заключение

Найденные два лептонных уравнения вместе с теми, которые получены ранее, позволяют утверждать, что разработан алгоритм построения волновых уравнений для стабильных лептонов. В основе каждого лептонного уравнения лежит соответствующая группа γ-матриц. Эти группы формируются из подструктур, на которых реализуются четыре типа неприводимых представлений (или четыре компонента связности) группы Лоренца с первым весовым числом равным $1/2$. Различия между четырьмя типами представлений связаны с P-, T- и (PT)-инверсиями в пространстве, в котором действует соответствующее неприводимое представление. Каждая из пяти групп γ-матриц порождаются четырьмя генераторами. Три из них антикоммутируют и тем самым обеспечивают лоренц-инвариантность. Четвёртый генератор при этом может либо антикоммутировать, либо коммутировать с тремя первыми. Каждая из групп имеет порядок 32 и имеет 16 одномерных неприводимых представлений. Кроме того, каждая группа имеет представления либо четвёртого, либо второго порядка, что соответствует решениям уравнений либо в виде биспиноров, либо спиноров.

Различными, нетождественными, лептонные состояния являются в силу различного структурного состава каждой группы γ-матриц, т. е. в силу различных комбинаций четырёх типов подгрупп, связанных с четырьмя типами неприводимых представлений группы Лоренца — d_γ, b_γ, c_γ, f_γ.

Структурный состав групп для каждого типа уравнений выглядит так:

1) уравнение Дирака — $D_\gamma(II)$: d_γ, b_γ, f_γ;
2) уравнение для дублета нейтрино — $D_\gamma(I)$: d_γ, c_γ, f_γ;
3) уравнение для квартета нейтрино — $D_\gamma(III)$: d_γ, b_γ, c_γ, f_γ;
4) уравнение для T-синглета — $D_\gamma(IV)$: b_γ;
5) уравнение для P-синглета — $D_\gamma(V)$: c_γ.

В целом все перечисленные уравнения необходимо отнести к числу лептонных. Уравнение Дирака является таковым по определению, а уравнения для квартета и двух синглетов также относятся к лептонному типу как в силу структурного сходства, так и потому, что массы этих состояний равны нулю. Что касается массивного нейтринного дублета, то здесь наблюдается максимальная степень сходства с уравнением Дирака. Более того, можно показать, что одно уравнение переходит в другое под действием операторов дискретных преобразований.

Предложенная расчётная схема позволяет классифицировать стабильные лептоны, связывая с каждым из них соответствующее уравнение. Уравнение Дирака сыграло при этом ключевую роль, но положение его в схеме ничем не выделено. Анализ его показал необходимость и преимущества перехода от апелляции к лоренц-инвариантности вообще к конкретным неприводимым представлениям из бесконечного ряда представлений группы Лоренца с учётом четырёх компонентов связности. Такая детализация позволила сформулировать единый подход для построения указанного выше ряда лептонных уравнений. Важно отметить, что указанные выводы получены вне связи с предположениями, отличными от тех, из которых следует уравнение Дирака.

Литература

1. *Majorana E.* Teoria simmetrica dell' ellettrone e del positrone // Il Nuovo Cimento. — Vol. 14. — 1937. — P. 171.
2. *Dirac P. A. M.* The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. A. — Vol. 117. — 1928. — P. 610.
3. *Космачёв О. С.* Ковариантная формулировка волнового уравнения для дублета массивных нейтральных лептонов. — Препринт ОИЯИ, Р4-2003-127, Дубна. — 2003.
4. *Космачёв О. С.* Физическая интерпретация некоторых групповых алгебр // Письма в ЭЧАЯ. — Т. 1, № 5. — 2004. — С. 50–57.
5. *Космачёв О. С.* Об инвариантах уравнений типа Дирака. — Препринт ОИЯИ, Р2-2002-217, Дубна. — 2002.
6. *Космачёв О. С.* Волновое уравнение для квартета нейтрино // Письма в ЭЧАЯ. — Т. 1, № 5. — 2004. — С. 58–65.
7. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. — М.: ФМ, 1958. — 88 с.
8. *Lomont J. S.* Applications of Finite Groups. — New York, London: Academic Press, 1959. — 51 p.
9. *Паули В.* Общие принципы волновой механики. — М.: ГТТИ, 1947. — 251 с.

UDC 519.123.142

On Possible Types of Majorana's Particles

O. S. Kosmachev, A. A. Gusev

Joint Institute for Nuclear Research
Joliot Curie str., 6, Dubna, Moscow reg., Russia, 141980

Equations for two types of leptons are obtained. These leptons are singlets, i.e. they have not antiparticles. Either of the singlet equations is formed on the base of only one connected component (out of four possible) of the Lorentz group. Therefore these equations are non invariant under any discrete transformation such as space reflection, time reversal and their product. These properties are the most essential difference with respect to another leptons. Interactions with the singlet participation may be singled out for understanding a violation of the P- and T-invariance on a microscopic level.