УДК 539.123,539.12.01

Волновые функции нейтрино и вероятности переходов при трёхнейтринных переходах (осцилляциях) в вакууме

Х. М. Бештоев

Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, г. Дубна, Московская обл., Россия, 141980

В связи с обнаружением переходов межу нейтрино различных типов весьма актуальной стала задача получения выражений, описывающих смешивания и осцилляции нейтрино (т. е. моделирование таких процессов). Данная работа посвящена рассмотрению трёхнейтринных смешиваний и осцилляций в общем случае. Вычислены выражения для волновых функций в трёх случаях: с CP нарушением ($\delta \neq 0$), без CP нарушения ($\delta = 0$) и в случае, когда прямые $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ переходы отсутствуют — $\beta(\theta_{13}) = 0$. Также получены выражения для вероятностей нейтринных переходов (осцилляций) для случая, когда CP нарушение отсутствует, и в случае, когда прямые $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ переходы отсутствуют. Показано, что требование положительной определённости вероятности переходов $P_{\nu_e \to \nu_e}(t)$ при $\nu_e \leftrightarrow \nu_e$ осцилляциях строго выполняется, если $\Delta m^2_{13} = \Delta m^2_{12} + \Delta m^2_{23}$.

Ключевые слова: нейтрино, смешивания, осцилляции, волновые функции, вероятности переходов, вакуумные переходы.

1. Введение

Предположение о том, что, по аналогии с $K^o, \bar{K}^o$ осцилляциями, могут существовать нейтрино–антинейтринные осцилляции ($\nu \to \bar{\nu}$), было выдвинуто Б. М. Понтекорво в 1957 г. [1, 2]. Впоследствии З. Маки и другими [3], а также Б. М. Понтекорво [4], была выдвинута идея, что могут быть смешивания и осцилляции нейтрино различных ароматов (т. е. $\nu_e \to \nu_\mu$ переходы).

В настоящее время нейтринные переходы уже обнаружены, и поэтому во всех крупнейших лабораториях мира проводятся эксперименты по изучению смешивания и осцилляций нейтрино. Эта проблема стала весьма актуальной и появилась необходимость в получении общих выражений, описывающих такие переходы (т. е. моделирование таких процессов).

В общем случае здесь могут быть две схемы (типа) смешивания (осцилляций) нейтрино: схема массовых смешиваний и схема зарядовых смешиваний, как это имеет место в модели векторной доминантности или в стандартной модели электрослабых взаимодействий при смешивании векторных бозонов [5, 6].

В стандартной теории нейтринных осцилляций [7–10] предполагается, что физически наблюдаемые нейтринные состояния ν_e, ν_μ, ν_τ не имеют определённой массы, и что они сразу рождаются как смеси ν_1, ν_2, ν_3 нейтринных состояний. ν_1, ν_2, ν_3 являются собственными состояниями гамильтониана слабых взаимодействий с нарушением закона сохранения лептонных чисел. Расчёты, однако, показали, что ν_e, ν_μ, ν_τ имеют массы и ширины переходов [5, 6]. В этом случае смешивания нейтрино определяются массовой матрицей, и параметры смешивания выражаются через элементы массовой матрицы.

В схеме зарядовых смешиваний параметры осцилляций выражаются через константы связи (заряды) слабых взаимодействий и массы нейтрино [5, 6].

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2007 г.

В обоих случаях матрица смешивания нейтрино [5–10]

$$V = \begin{pmatrix} c_\beta c_\theta & c_\beta s_\theta & s_\beta \exp(-i\delta) \\ -s_\gamma s_\beta \exp(i\delta) c_\theta - c_\gamma s_\theta & -s_\gamma s_\beta \exp(i\delta) s_\theta + c_\gamma c_\theta & s_\gamma c_\beta \\ -c_\gamma s_\beta \exp(i\delta) c_\theta + s_\gamma s_\theta & -c_\gamma s_\beta \exp(i\delta) s_\theta - s_\gamma c_\theta & c_\gamma c_\beta \end{pmatrix},$$

может быть записана в удобной форме, предложенной Майаной [11] (в некоторых работах используется другое обозначение для параметров смешивания, а именно — $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$, и тогда $\theta = \theta_{12}, \beta = \theta_{13}, \gamma = \theta_{23}$):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\gamma & s_\gamma \\ 0 & -s_\gamma & c_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \exp(-i\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta \exp(i\delta) & 0 & c_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} c_{e\mu} = \cos\theta, \quad s_{e\mu} = \sin\theta, \quad c_{e\mu}^2 + s_{e\mu}^2 = 1; \\ c_{e\tau} = \cos\beta, \quad s_{e\tau} = \sin\beta, \quad c_{e\tau}^2 + s_{e\tau}^2 = 1; \\ c_{\mu\tau} = \cos\gamma, \quad s_{\mu\tau} = \sin\gamma, \quad c_{\mu\tau}^2 + s_{\mu\tau}^2 = 1; \\ \exp(i\delta) = \cos\delta + i\sin\delta. \end{gathered} \tag{2}$$

Эта параметризация удобна тем, что мы можем придать смысл параметрам смешивания: θ — параметр (угол) смешивания ν_e, ν_μ нейтрино, β — параметр (угол) смешивания ν_e, ν_τ нейтрино, γ — параметр (угол) смешивания ν_μ, ν_τ нейтрино, а параметр δ — параметр CP нарушения [7–10].

Предполагается [5–10], что унитарная матрица V описывает нарушение лептонных чисел, в результате чего первоначальные ν_e, ν_μ, ν_τ нейтрино превращаются в суперпозиции ν_1, ν_2, ν_3, и через эти промежуточные состояния ν_e, ν_μ, ν_τ нейтрино переходят друг в друга.

Теперь мы перейдём к рассмотрению общих выражений для волновых функций нейтрино и далее — к конкретному расчёту волновых функций $\Psi_{\nu_e}, \Psi_{\nu_\mu}, \Psi_{\nu_\tau}$ нейтрино и вероятностей переходов (осцилляций) этих нейтрино.

2. Общие выражения для волновых функций и вероятностей при трёхнейтринных переходах (осцилляциях) в вакууме в зависимости от времени

Используя выше рассмотренную матрицу V, мы можем связать волновые функции физических нейтринных состояний $\Psi_{\nu_e}, \Psi_{\nu_\mu}, \Psi_{\nu_\tau}$ с волновыми функциями промежуточных нейтринных состоянии $\Psi_{\nu_1}, \Psi_{\nu_2}, \Psi_{\nu_3}$ и записать это в следующем покомпонентном виде [7–10]:

$$\Psi_{\nu_l} = \sum_{k=1}^{3} V^*_{\nu_l \nu_k} \Psi_{\nu_k},$$

$$\Psi_{\nu_k} = \sum_{k=1}^{3} V_{\nu_k \nu_l} \Psi_{\nu_l}, \quad l = e, \mu, \tau, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где Ψ_{ν_k} — волновая функция нейтрино с импульсом p и массой m_k.

Мы предполагаем, что смешивания (осцилляции) нейтрино являются виртуальными, если массы нейтрино различаются, и реальными, если массы нейтрино равны. Если мы предположим, что эти переходы являются реальными, как это постулируется в стандартной теории. Тогда необходимо принять, что выражение (3) базируется на предположении, что разности масс ν_k нейтрино являются такими малыми, что в слабых взаимодействиях формируются когерентные нейтринные состояния. Необходимо отметить, что, как показывают расчёты, эти когерентные состояния являются нестабильными и распадаются, т. е. физические нейтринные состояния $\Psi_{\nu_e}, \Psi_{\nu_\mu}, \Psi_{\nu_\tau}$ являются нестабильными.

Если нейтрино находятся в вакууме, то волновое уравнение для них имеет следующий вид:

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_{\nu_k}(t) = E_k\Psi_{\nu_k}(t),$$

и мы можем отфакторизовать временную часть

$$\Psi_{\nu_k}(t) = \mathrm{e}^{-iE_k t}\Psi_{\nu_k}(0), \quad k = 1,2,3, \tag{4}$$

тогда

$$\Psi_{\nu_l(t)} = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{e}^{-iE_k t} V^*_{\nu_l \nu_k}\Psi_{\nu_k}(0). \tag{5}$$

Используя унитарность матрицы V в выражении (3), мы можем переписать выражение (5) в следующем виде:

$$\Psi_{\nu_l}(t) = \sum_{l'=e,\mu,\tau}\sum_{k=1}^{3} V_{\nu_{l'}\nu_k}\mathrm{e}^{-iE_k t}V^*_{\nu_l\nu_k}\Psi_{\nu_{l'}(0)}, \tag{6}$$

и, вводя обозначение $b_{\nu_l\nu_{l'}}(t)$

$$b_{\nu_l\nu_{l'}}(t) = \sum_{k=1}^{3} V_{\nu_{l'}\nu_k}\mathrm{e}^{-iE_k t}V^*_{\nu_l\nu_k}, \tag{7}$$

мы получаем

$$\Psi_{\nu_l}(t) = \sum_{l'=e,\mu,\tau} b_{\nu_l\nu_{l'}}(t)\Psi_{\nu_{l'}}(0), \tag{8}$$

где $b_{\nu_l\nu_{l'}}(t)$ — амплитуда перехода $\Psi_{\nu_l} \to \Psi_{\nu_{l'}}$. При этом вероятность перехода $\Psi_{\nu_l} \to \Psi_{\nu_{l'}}$ равна:

$$P_{\nu_l\nu_{l'}}(t) =\mid \sum_{k=1}^{3} V_{\nu'_l\nu_k}\mathrm{e}^{-iE_k t}V^*_{\nu_l\nu_k} \mid^2 . \tag{9}$$

Очевидно, что

$$\sum_{l'=e,\mu,\tau} P_{\nu_{l'}\nu_l}(t) = 1. \tag{10}$$

Теперь перейдём к расчёту волновых функции при $\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau \to \nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$ переходах в вакууме.

2.1. Выражения для волновых функций при $\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau \to \nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$ переходах (осцилляциях) нейтрино в вакууме с CP нарушением

Выражения для волновых функций и вероятностей при $\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau \to \nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$ переходах (осцилляциях) нейтрино в вакууме с CP нарушением имеют следующий вид:

1) для случая $\nu_e \to \nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$ переходов:

$$\begin{aligned}\Psi_{\nu_e\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = \big[&\cos^2(\beta)\cos^2(\theta)\exp(-iE_1 t) + \cos^2(\beta)\sin^2(\theta)\times\\ &\times\exp(-iE_2 t) + \sin^2(\beta)\exp(-iE_3 t)\big]\Psi_{\nu_e}(0) +\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
+\big[\cos(\beta)\cos(\theta)\exp(-iE_1t)\big(-\cos(\gamma)\sin(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\sin(\gamma)\cos(\theta)\big)+\\
+\cos(\beta)\sin(\theta)\exp(-iE_2t)\big(\cos(\gamma)\cos(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\sin(\gamma)\sin(\theta)\big)+\\
+\sin(\beta)\exp(-i\delta)\exp(-iE_3t)\sin(\gamma)\cos(\beta)\big]\mathit{\Psi}_{\nu_\mu}(0)+\\
+\big[\cos(\beta)\cos(\theta)\exp(-iE_1t)\big(\sin(\gamma)\sin(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\cos(\gamma)\cos(\theta)\big)+\\
+\cos(\beta)\sin(\theta)\exp(-iE_2t)\big(-\sin(\gamma)\cos(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\cos(\gamma)\sin(\theta)\big)+\\
+\sin(\beta)\exp(-i\delta)\exp(-iE_3t)\cos(\gamma)\cos(\beta)\big]\mathit{\Psi}_{\nu_\tau}(0); \quad (11)
\end{gathered}
$$

2) для случая $\nu_\mu \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ переходов:

$$
\begin{gathered}
\mathit{\Psi}_{\nu_\mu\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t)=[(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\cos(\theta)-\\
-\cos(\gamma)\sin(\theta))\exp(-iE_1t)\cos(\beta)\cos(\theta)+\\
+(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\sin(\theta)+\\
+\cos(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2t)\cos(\beta)\sin(\theta)+\\
+\sin(\gamma)\cos(\beta)\exp(-iE_3t)\sin(\beta)\exp(i\delta)]\mathit{\Psi}_{\nu_e}(0)+\\
+[(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\cos(\theta)-\\
-\cos(\gamma)\sin(\theta))\exp(-iE_1t)(-\cos(\gamma)\sin(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\sin(\gamma)\cos(\theta))+\\
+(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\sin(\theta)+\\
+\cos(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2t)(\cos(\gamma)\cos(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\sin(\gamma)\sin(\theta))+\\
+\sin^2(\gamma)\cos^2(\beta)\exp(-iE_3t)]\mathit{\Psi}_{\nu_\mu}(0)+\\
+[(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\cos(\theta)-\\
-\cos(\gamma)\sin(\theta))\exp(-iE_1t)(\sin(\gamma)\sin(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\cos(\gamma)\cos(\theta))+\\
+(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\sin(\theta)+\\
+\cos(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2t)(-\sin(\gamma)\cos(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\cos(\gamma)\sin(\theta))+\\
+\sin(\gamma)\cos^2(\beta)\exp(-iE_3t)\cos(\gamma)]\mathit{\Psi}_{\nu_\tau}(0); \quad (12)
\end{gathered}
$$

3) для случая $\nu_\tau \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ переходов:

$$
\begin{gathered}
\mathit{\Psi}_{\nu_\tau\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t)=[(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\cos(\theta)+\sin(\gamma)\sin(\theta))\times\\
\times\exp(-iE_1t)\cos(\beta)\cos(\theta)+(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\sin(\theta)-\\
-\sin(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2t)\cos(\beta)\sin(\theta)+\\
+\cos(\gamma)\cos(\beta)\exp(-iE_3t)\sin(\beta)\exp(i\delta)]\mathit{\Psi}_{\nu_e}(0)+\\
+[(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\cos(\theta)+\\
+\sin(\gamma)\sin(\theta))\exp(-iE_1t)(-\cos(\gamma)\sin(\theta)-\\
-\sin(\beta)\exp(-i\delta)\sin(\gamma)\cos(\theta))+\\
+(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\sin(\theta)-
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \sin(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2t)(\cos(\gamma)\cos(\theta) - \\
&- \sin(\beta)\exp(-i\delta)\sin(\gamma)\sin(\theta)) + \\
&+ \sin(\gamma)\cos^2(\beta)\exp(-iE_3t)\cos(\gamma)]\Psi_{\nu_\mu}(0) + \\
&+ [(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\cos(\theta) + \\
&+ \sin(\gamma)\sin(\theta))\exp(-iE_1t)(\sin(\gamma)\sin(\theta) - \\
&- \sin(\beta)\exp(-i\delta)\cos(\gamma)\cos(\theta)) + \\
&+ (-\cos(\gamma)\sin(\beta)\exp(i\delta)\sin(\theta) - \\
&- \sin(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2t)(-\sin(\gamma)\cos(\theta) - \\
&- \sin(\beta)\exp(-i\delta)\cos(\gamma)\sin(\theta)) + \\
&+ \cos^2(\gamma)\cos^2(\beta)\exp(-iE_3t)]\Psi_{\nu_\tau}(0). \quad (13)
\end{aligned}
$$

Теперь перейдём к рассмотрению случая, когда CP нарушение отсутствует.

2.2. Выражения для волновых функций и вероятностей при $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ переходах (осцилляциях) нейтрино в вакууме без CP нарушения

Если мы не будем учитывать CP нарушение, тогда выражения для амплитуд переходов нейтрино в вакууме имеют следующий вид:

1. Если первоначальное нейтрино есть ν_e нейтрино и имеют место переходы $\nu_e \to \nu_e$, $\nu_e \to \nu_\mu$, $\nu_e \to \nu_\tau$, то тогда волновая функция этого нейтрино имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\Psi_{\nu_e \to \nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = &[\cos^2(\beta)\cos^2(\theta)\exp(-iE_1t) + \\
&+ \cos^2(\beta)\sin^2(\theta)\exp(-iE_2t) + \sin^2(\beta)\exp(-iE_3t)]\Psi_{\nu_e}(0) + \\
&+ [\cos(\beta)\cos(\theta)\exp(-iE_1t)(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \\
&- \cos(\gamma)\sin(\theta)) + \cos(\beta)\sin(\theta)\exp(-iE_2t)(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) + \\
&+ \cos(\gamma)\cos(\theta)) + \sin(\beta)\exp(-iE_3t)\sin(\gamma)\cos(\beta)]\Psi_{\nu_\mu}(0) + \\
&+ [\cos(\beta)\cos(\theta)\exp(-iE_1t)(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)) + \\
&+ \cos(\beta)\sin(\theta)\exp(-iE_2t)(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)) + \\
&+ \sin(\beta)\exp(-iE_3t)\cos(\gamma)\cos(\beta)]\Psi_{\nu_\tau}(0). \quad (14)
\end{aligned}
$$

Выражение (14) можно переписать в следующем виде:

$$\Psi_{\nu_e \to \nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = b_{\nu_e\nu_e}\Psi_{\nu_e}(0) + b_{\nu_e\nu_\mu}\Psi_{\nu_\mu}(0) + b_{\nu_e\nu_\tau}\Psi_{\nu_\tau}(0), \quad (14')$$

где $b_{\ldots}$ есть коэффициенты перед волновыми функциями $\Psi_{\nu_e}(0), \Psi_{\nu_\mu}(0)$, $\Psi_{\nu_\tau}(0)$ нейтрино.

1.1. Вероятность $\nu_e \to \nu_e$ нейтринных переходов, полученная из выражения (14), определяется следующей формулой:

$$
\begin{aligned}
P_{\nu_e \to \nu_e}(t) = 1 &- \cos^4(\beta)\sin^2(2\theta)\sin^2(-t(E_1 - E_2)/2) - \\
&\cos^2(\theta)\sin^2(2\beta)\sin^2(-t(E_1 - E_3)/2) - \\
&- \sin^2(\theta)\sin^2(2\beta)\sin^2(-t(E_2 - E_3)/2). \quad (15)
\end{aligned}
$$

1.2. Вероятность $\nu_e \to \nu_\mu$ нейтринных переходов, полученная из выражения (14), определяется следующей формулой:

$$P_{\nu_e\to\nu_\mu}(t) = 4\cos^2(\beta)\cos(\theta)\sin(\theta)[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+\cos(\gamma)\cos(\theta)]\times$$
$$\times[\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)+\cos(\gamma)\sin(\theta)]\sin^2(-t(E_1-E_2)/2)-$$
$$-4\cos^2(\beta)\sin(\beta)\cos(\theta)\sin(\gamma)[\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)+\cos(\gamma)\sin(\theta)]\times$$
$$\times\sin^2(-t(E_1-E_3)/2)-4\cos^2(\beta)\sin(\beta)\sin(\theta)\sin(\gamma)[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+$$
$$+\cos(\gamma)\cos(\theta)]\sin^2(-t(E_2-E_3)/2). \quad (16)$$

1.3. Вероятность $\nu_e \to \nu_\tau$ нейтринных переходов, полученная из выражения (14), определяется следующей формулой:

$$P_{\nu_e\to\nu_\tau}(t) = 4\cos^2(\beta)\cos(\theta)\sin(\theta)[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)+$$
$$+\sin(\gamma)\sin(\theta)][\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+\sin(\gamma)\cos(\theta)]\sin^2(-t(E_1-E_2)/2)-$$
$$-4\cos^2(\beta)\cos(\theta)\sin(\beta)\cos(\gamma)[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)+\sin(\gamma)\sin(\theta)]\times$$
$$\times\sin^2(-t(E_1-E_3)/2)+4\cos^2(\beta)\sin(\theta)\sin(\beta)\cos(\gamma)[\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+$$
$$+\sin(\gamma)\cos(\theta)]\sin^2(-t(E_2-E_3)/2). \quad (17)$$

Проверка подтвердила, что $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)+P_{\nu_e\to\nu_\mu}(t)+P_{\nu_e\to\nu_\tau}(t)=1$.

2. Для случая $\nu_\mu \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ переходов мы получаем

$$\Psi_{\nu_\mu\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = [\cos(\beta)\cos(\theta)\exp(-iE_1t)\times$$
$$\times(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)-\cos(\gamma)\sin(\theta))+$$
$$+\cos(\beta)\sin(\theta)\exp(-iE_2t)(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+\cos(\gamma)\cos(\theta))+$$
$$+\sin(\beta)\exp(-iE_3t)\sin(\gamma)\cos(\beta)]\Psi_{\nu_e}(0)+$$
$$+[(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)-\cos(\gamma)\sin(\theta))^2\exp(-iE_1t)+$$
$$+(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+\cos(\gamma)\cos(\theta))^2\exp(-iE_2t)+$$
$$+\sin^2(\gamma)\cos^2(\beta)\exp(-iE_3t)]\Psi_{\nu_\mu}(0)+$$
$$+[(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)-\cos(\gamma)\sin(\theta))\exp(-iE_1t)\times$$
$$\times(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)+\sin(\gamma)\sin(\theta))+$$
$$+(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+\cos(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2t)\times$$
$$\times(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)-\sin(\gamma)\cos(\theta))+\sin(\gamma)\cos^2(\beta)\times$$
$$\times\exp(-iE_3t)\cos(\gamma)]\Psi_{\nu_\tau}(0). \quad (18)$$

Выражение (18) можно переписать в следующем виде:

$$\Psi_{\nu_\mu\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = b_{\nu_\mu\nu_e}\Psi_{\nu_e}(0)+b_{\nu_\mu\nu_\mu}\Psi_{\nu_\mu}(0)+b_{\nu_\mu\nu_\tau}\Psi_{\nu_\tau}(0), \quad (18')$$

где $b_{\dots}$ есть коэффициенты перед волновыми функциями $\Psi_{\nu_e}(0), \Psi_{\nu_\mu}(0), \Psi_{\nu_\tau}(0)$ нейтрино.

2.1. Вероятность $\nu_\mu \to \nu_\mu$ нейтринных переходов, полученная из выражения (18), определяется следующей формулой:

$$P_{\nu_\mu\to\nu_\mu}(t) = 1-4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)-\cos(\gamma)\sin(\theta)]^2\times$$
$$\times[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta)+\cos(\gamma)\cos(\theta)]^2\times$$
$$\times\sin^2(-t(E_1-E_2)/2)-$$
$$-4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta)-\cos(\gamma)\sin(\theta)]^2\sin^2(\gamma)\cos^2(\beta)\times$$

$$\times \sin^2\bigl(-t(E_1 - E_3)/2\bigr) -$$
$$- 4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) + \cos(\gamma)\cos(\theta)]^2 \sin^2(\gamma)\cos^2(\beta) \times$$
$$\times \sin^2\bigl(-t(E_2 - E_3)/2\bigr). \quad (19)$$

2.2. Вероятность $\nu_\mu \to \nu_e$ нейтринных переходов, полученная из выражения (18), определяется следующей формулой:

$$P_{\nu_\mu \to \nu_e}(t) = -4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \cos(\gamma)\sin(\theta)]\cos^2(\beta)\cos(\theta) \times$$
$$\times [-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) + \cos(\gamma)\cos(\theta)]\sin(\theta)\sin^2\bigl(-t(E_1 - E_2)/2\bigr) -$$
$$- 4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \cos(\gamma)\sin(\theta)]\cos^2(\beta) \times$$
$$\times \cos(\theta)\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin^2\bigl(-t(E_1 - E_3)/2\bigr) -$$
$$- 4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) + \cos(\gamma)\cos(\theta)]\cos^2(\beta)\sin(\theta)\sin(\gamma)\sin(\beta) \times$$
$$\times \sin^2\bigl(-t(E_2 - E_3)/2\bigr). \quad (20)$$

2.3. Вероятность $\nu_\mu \to \nu_\tau$ нейтринных переходов, полученная из выражения (18), определяется следующей формулой:

$$P_{\nu_\mu \to \nu_\tau}(t) = -4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \cos(\gamma)\sin(\theta)] \times$$
$$\times [-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)][-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) +$$
$$+ \cos(\gamma)\cos(\theta)][-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)]\sin^2\bigl(-t(E_1 - E_2)/2\bigr) -$$
$$- 4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \cos(\gamma)\sin(\theta)] \times$$
$$\times [-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)]\sin(\gamma)\cos^2(\beta)\cos(\gamma) \times$$
$$\times \sin^2(-t(E_1 - E_3)/2) -$$
$$- 4[-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) + \cos(\gamma)\cos(\theta)] \times$$
$$\times [-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)]\sin(\gamma)\cos^2(\beta)\cos(\gamma) \times$$
$$\times \sin^2\bigl(-t(E_2 - E_3)/2\bigr). \quad (21)$$

Проверка подтвердила, что $P_{\nu_\mu \to \nu_e}(t) + P_{\nu_\mu \to \nu_\mu}(t) + P_{\nu_\mu \to \nu_\tau}(t) = 1$.

3. Для случая $\nu_\tau \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ переходов мы получаем

$$\Psi_{\nu_\tau \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}(t) = [\cos(\beta)\cos(\theta)\exp(-iE_1 t) \times$$
$$\times (-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)) + \cos(\beta)\sin(\theta)\exp(-iE_2 t) \times$$
$$\times (-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)) +$$
$$+ \sin(\beta)\exp(-iE_3 t)\cos(\gamma)\cos(\beta)]\Psi_{\nu_e}(0) +$$
$$+ [(-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \cos(\gamma)\sin(\theta))\exp(-iE_1 t) \times$$
$$\times (-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)) + (-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) +$$
$$+ \cos(\gamma)\cos(\theta))\exp(-iE_2 t)(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)) +$$
$$+ \sin(\gamma)\cos^2(\beta)\exp(-iE_3 t)\cos(\gamma)]\Psi_{\nu_\mu}(0) +$$
$$+ [(-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta))^2\exp(-iE_1 t) +$$
$$+ (-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta))^2\exp(-iE_2 t) +$$
$$+ \cos^2(\gamma)\cos^2(\beta)\exp(-iE_3 t)]\Psi_{\nu_\tau}(0). \quad (22)$$

Выражение (22) можно переписать в следующем виде:

$$\Psi_{\nu_\tau \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}(t) = b_{\nu_\tau \nu_e}\Psi_{\nu_e}(0) + b_{\nu_\tau \nu_\mu}\Psi_{\nu_\mu}(0) + b_{\nu_\tau \nu_\tau}\Psi_{\nu_\tau}(0), \quad (22')$$

где $b_{\dots}$ — некоторые коэффициенты перед волновыми функциями $\Psi_{\nu_e}(0), \Psi_{\nu_\mu}(0)$, $\Psi_{\nu_\tau}(0)$ нейтрино.

3.1. Вероятность $\nu_\tau \to \nu_\tau$ нейтринных переходов, полученная из выражения (22), определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned}P_{\nu_\tau\to\nu_\tau}(t) = 1 - 4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)]^2 \times \\ \times [-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)]^2 \sin^2\big(-t(E_1 - E_2)/2\big) - \\ - 4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)]^2 \cos^2(\gamma)\cos^2(\beta) \times \\ \times \sin^2\big(-t(E_1 - E_3)/2\big) - \\ - 4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)]^2 \cos^2(\gamma)\cos^2(\beta) \times \\ \times \sin^2\big(-t(E_2 - E_3)/2\big).\end{aligned} \quad (23)$$

3.2. Вероятность $\nu_\tau \to \nu_e$ нейтринных переходов, полученная из выражения (22), определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned}P_{\nu_\tau\to\nu_e}(t) = -4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)] \times \\ \times \cos^2(\beta)\cos(\theta)[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)]\sin(\theta) \times \\ \times \sin^2\big(-t(E_1 - E_2)/2\big) - \\ - 4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)]\cos^2(\beta)\cos(\theta) \times \\ \times \cos(\gamma)\sin(\beta)\sin^2\big(-t(E_1 - E_3)/2\big) - \\ - 4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)]\cos^2(\beta)\sin(\theta)\cos(\gamma)\sin(\beta) \times \\ \times \sin^2\big(-t(E_2 - E_3)/2\big).\end{aligned} \quad (24)$$

3.3. Вероятность $\nu_\tau \to \nu_\mu$ нейтринных переходов, полученная из выражения (22), определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned}P_{\nu_\tau\to\nu_\mu}(t) = -4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)] \times \\ \times [-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \cos(\gamma)\sin(\theta)] \times \\ \times [-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)] \times \\ \times [-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) + \cos(\gamma)\cos(\theta)]\sin^2\big(-t(E_1 - E_2)/2\big) - \\ - 4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) + \sin(\gamma)\sin(\theta)] \times \\ \times [-\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\theta) - \cos(\gamma)\sin(\theta)]\cos(\gamma)\cos^2(\beta)\sin(\gamma) \times \\ \times \sin^2\big(-t(E_1 - E_3)/2\big) - \\ - 4[-\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) - \sin(\gamma)\cos(\theta)] \times \\ \times [-\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\theta) + \cos(\gamma)\cos(\theta)] \times \times \cos(\gamma)\cos^2(\beta)\sin(\gamma)\sin^2\big(-t(E_2 - E_3)/2\big).\end{aligned} \quad (25)$$

Проверка подтвердила, что $P_{\nu_\tau\to\nu_e}(t) + P_{\nu_\tau\to\nu_\mu}(t) + P_{\nu_\tau\to\nu_\tau}(t) = 1$.

Выражения (14′), (18′), (22′) для трёхнейтринных волновых функций можно переписать в следующем компактном виде:

$$\begin{pmatrix}\Psi_{\nu_e\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t)\\ \Psi_{\nu_\mu\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t)\\ \Psi_{\nu_\tau\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\nu_e\nu_e} & b_{\nu_e\nu_\mu} & b_{\nu_e\nu_\tau}\\ b_{\nu_\mu\nu_e} & b_{\nu_\mu\nu_\mu} & b_{\nu_\mu\nu_\tau}\\ b_{\nu_\tau\nu_e} & b_{\nu_\tau\nu_\mu} & b_{\nu_\tau\nu_\tau}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\Psi_{\nu_e}(0)\\ \Psi_{\nu_\mu}(0)\\ \Psi_{\nu_\tau}(0)\end{pmatrix}. \quad (26)$$

Мы можем также ввести матрицу $V_{prob}(t)$ для вероятностей переходов (осцилляций), зависящую от времени, и записать её в следующем компактном виде:

$$V_{prob}(t) = \begin{pmatrix} P_{\nu_e\to\nu_e}(t) & P_{\nu_e\to\nu_\mu}(t) & P_{\nu_e\to\nu_\tau}(t) \\ P_{\nu_\mu\to\nu_e}(t) & P_{\nu_\mu\to\nu_\mu}(t) & P_{\nu_\mu\to\nu_\tau}(t) \\ P_{\nu_\tau\to\nu_e}(t) & P_{\nu_\tau\to\nu_\mu}(t) & P_{\nu_\tau\to\nu_\tau}(t) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Теперь перейдём к рассмотрению волновых функций и вероятностей переходов при отсутствии $\nu_e \to \nu_\tau$ переходов.

2.3. Выражения для волновых функций и вероятностей $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \to \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ переходов (осцилляций) в вакууме при отсутствии прямых $\nu_e \to \nu_\tau$ переходов $(\beta(\theta_{13}) = 0)$

Если первоначальные нейтрино являются ν_e нейтрино и отсутствуют прямые переходы между ν_e и ν_τ нейтрино, т. е. такие переходы запрещены, тогда после $\nu_e \to \nu_\mu$ переходов возможны только переходы $\nu_e \to \nu_e$, $\nu_e \to \nu_\mu$ и $\nu_\mu \to \nu_\tau$. Волновая функция для этих переходов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathit{\Psi}_{\nu_e\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = [\cos^2(\theta)\exp(-iE_1t) + \sin^2(\theta)\exp(-iE_2t)]\mathit{\Psi}_{\nu_e}(0) + \\ + [-\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\gamma)\exp(-iE_1t) + \cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\gamma)\exp(-iE_1t)]\mathit{\Psi}_{\nu_\mu}(0) + \\ + \cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\gamma)[\exp(-iE_1) - \exp(-iE_2)]\mathit{\Psi}_{\nu_\tau}(0). \end{aligned} \tag{28}$$

Вероятности таких нейтринных переходов (осцилляций) описываются следующими выражениями (в действительности, после $\nu_e \to \nu_\mu$ переходов должны быть переходы между $\nu_\mu \to \nu_\tau$ нейтрино):
для $\nu_e \to \nu_e$:

$$P(\nu_e \to \nu_e, t) = 1 - \sin^2(2\theta)[\cos^2(2\gamma) + \sin^2(2\gamma)]\sin^2(L/L_{12}); \tag{29}$$

для $\nu_e \to \nu_\mu$:

$$P(\nu_e \to \nu_\mu, t) = \sin^2(2\theta)\cos^2(2\gamma)\sin^2(L/L_{12}); \tag{30}$$

для $\nu_e \to \nu_\tau$:

$$P(\nu_e \to \nu_\tau, t) = \sin^2(2\theta)\sin^2(2\gamma)\sin^2(L/L_{12}), \tag{31}$$

где

$$L_{ik}(m) = 1,27\frac{E_{\nu_e}(MeV)}{|m_i^2 - m_k^2|(eV^2)} \quad L = ct, \tag{32}$$

E_{ν_e} — энергия первичного нейтрино и $E_k = \sqrt{m_k^2 + p_{\nu_e}^2} \simeq p_{\nu_e} + \frac{m_k^2}{p_{\nu_e}}$, $i, k = 1 \div 3$.

Если первичное нейтрино является ν_μ нейтрино и нет перехода между ν_e и ν_τ нейтрино, тогда

$$\begin{aligned} \mathit{\Psi}_{\nu_\mu\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = [-\cos(\theta)\exp(-itE_1)\cos(\gamma)\sin(\theta) + \\ + \sin(\theta)\exp(-itE_2)\cos(\gamma)\cos(\theta)]\mathit{\Psi}_{\nu_e}(0) + [\cos^2(\gamma)\sin^2(\theta)\exp(-itE_1) + \\ + \cos^2(\gamma)\cos^2(\theta)\exp(-itE_2) + \sin^2(\gamma)\exp(-itE_3)]\mathit{\Psi}_{\nu_\mu}(0) + \\ + [-\cos(\gamma)\sin^2(\theta)\exp(-itE_1)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)\cos^2(\theta)\exp(-itE_2)\sin(\gamma) + \\ + \sin(\gamma)\exp(-itE_3)\cos(\gamma)]\mathit{\Psi}_{\nu_\tau}(0). \end{aligned} \tag{33}$$

Если первичное нейтрино является ν_τ нейтрино, и нет перехода между ν_e и ν_τ нейтрино, тогда

$$\mathit{\Psi}_{\nu_\tau\to\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}(t) = [\cos(\theta)\exp(-itE_1)\sin(\gamma)\sin(\theta) -$$

$$
\begin{gathered}
-\sin(\theta)\exp(-itE_2)\sin(\gamma)\cos(\theta)]\Psi_{\nu_e}(0)+\\
+[-\cos(\gamma)\sin^2(\theta)\exp(-itE_1)\sin(\gamma)-\\
-\cos(\gamma)\cos^2(\theta)\exp(-itE_2)\sin(\gamma)+\sin(\gamma)\exp(-itE_3)\cos(\gamma)]\Psi_{\nu_\mu}(0)+\\
+[\sin^2(\gamma)\sin^2(\theta)\exp(-itE_1)+\\
+\sin^2(\gamma)\cos^2(\theta)\exp(-itE_2)+\cos^2(\gamma)\exp(-itE_3)]\Psi_{\nu_\tau}(0). \quad (34)
\end{gathered}
$$

3. Проверка положительной определённости вероятности $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ перехода ν_e в ν_e

Проводилась проверка положительной определённости выражения (15), которое определяет вероятность $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ перехода ν_e в ν_e в зависимости от времени t. Это выражение зависит от пяти параметров θ, β, Δm^2_{12}, Δm^2_{23}, Δm^2_{13} (в действительности, от четырёх параметров, так как должно выполняться условие $\Delta m^2_{13}=\Delta m^2_{12}+\Delta m^2_{23}$) (значение энергии E будем считать фиксированным). Эту задачу можно было выполнить, находя минимумы функции (15) по этим параметрам и вычисляя её значения в этих минимумах. Было решено упростить эту задачу, так как в экспериментах уже определены значения для некоторых параметров.

Оценка значения угла смешивания θ и квадрата разности масс была проведена в эксперименте KamLAND [12–14], и было получено

$$\sin^2(2\theta_{\nu_e\nu_\mu})\cong 1,0,\quad \theta\cong\frac{\pi}{4},\quad \Delta m^2_{12}=6,9\cdot10^{-5}eV^2, \qquad (35)$$

или

$$\sin^2(2\theta_{\nu_e\nu_\mu})\cong 0,83,\quad \theta=32^\circ,\quad \Delta m^2_{12}=8,3\cdot10^{-5}eV^2.$$

Значения угла смешивания γ для $\nu_\mu\to\nu_\tau$ переходов и разности квадрата масс Δm^2_{23}, полученные на установке Super-Kamiokande [15, 16] из данных по атмосферным нейтрино, имеют вид:

$$\sin^2(2\gamma_{\nu_\mu\nu_\tau})\cong 1,\quad \gamma\cong\frac{\pi}{4}\quad \Delta m^2_{23}=2,1\div2,5\cdot10^{-3}eV^2. \qquad (36)$$

Теперь, если использовать эти полученные параметры и подставить их в (15), то остаётся только один неизвестный параметр β. Задача упрощается, и надо искать экстремум этой функции только по одному этому параметру. Однако нас интересует другая проблема: надо найти значения параметра (угла смешивания) β, начиная с которого значение выражения (15) становится положительно определённой величиной, и тогда можно интерпретировать (15) как вероятность. Для этой цели мы выполнили графическое моделирование выражения (15), подставив в него следующие значения $\theta=32,45^\circ$, Δm^2_{12} [12–14], Δm^2_{23} из выражения (35), (36) [15,16] для случая, когда $\Delta m^2_{13}=10^{-5}eV^2$, $5,7\cdot10^{-5}eV^2$, $8,3\cdot10^{-4}eV^2$ (для проверки, насколько это влияет) для различных значений $\beta=10^\circ\div45^\circ$ при фиксированной энергии $\bar{E}_{\nu_e}=7\,MeV$, которая есть средняя энергия по спектру солнечных нейтрино. Было установлено, что $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ становится положительно определённым при значениях β меньших $15^\circ\div17^\circ$ ($P_{\nu_e\to\nu_e}(t)\simeq0$ при некоторых значениях t). Если β больше, чем $15^\circ\div17^\circ$, тогда $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ становится отрицательной величиной при некоторых значениях t. Такая же проверка была проведена для случая, когда $\Delta m^2_{13}=\Delta m^2_{12}+\Delta m^2_{23}$ для разных значений β. Было получено, что в этом случае вероятность $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ перехода $\nu_e\leftrightarrow\nu_e$ является положительно определённой при всех значениях β. В качестве примера рассмотрим рис. 1, 2 и 3, где приведены значения $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ при $\theta=32,45^\circ$ и $\beta=25^\circ,35^\circ,45^\circ$. Из этих рисунков мы видим, что выражение $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ является положительно определённой величиной при всех значениях β (более полное изучение этого вопроса дано в работе [17]).

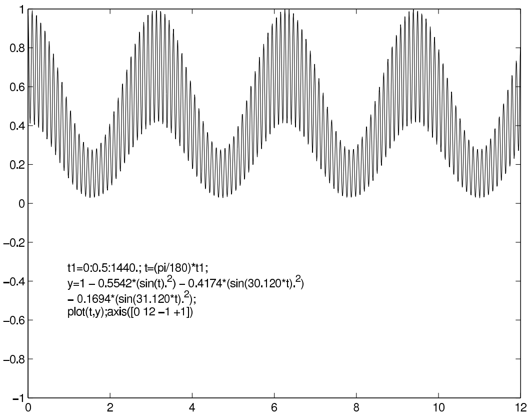

Рис. 1. $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ при $\theta = 32,45°$, $\beta = 25°$

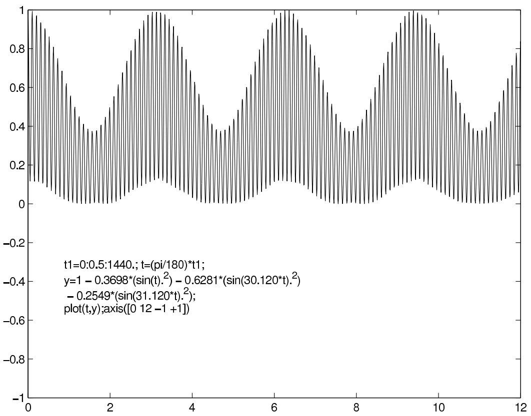

Рис. 2. $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ при $\theta = 32,45°$, $\beta = 35°$

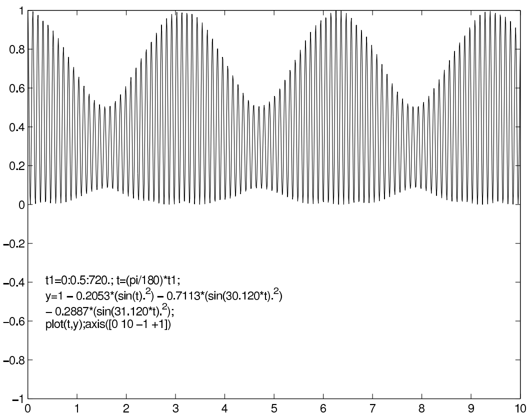

Рис. 3. $P_{\nu_e\to\nu_e}(t)$ при $\theta = 32,45°$, $\beta = 45°$

4. Заключение

В настоящее время во всех крупнейших лабораториях мира проводятся эксперименты по изучению смешивания и осцилляций нейтрино [12–16, 18]. Поэтому весьма актуальным является получение общих выражений, описывающих такие процессы (т. е. моделирование таких процессов).

Данная работа посвящена изучению трехнейтринных смешиваний и осцилляций. Были получены выражения для волновых функций в трёх случаях: с CP нарушением ($\delta \neq 0$), без CP нарушения ($\delta = 0$) и в случае, когда прямые $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ переходы отсутствуют — $\beta(\theta_{13}) = 0$ (в некоторых работах указывается на такую возможность). Были получены выражения для вероятностей нейтринных переходов (осцилляций) для случая, когда CP нарушение не имеет места, и в случае, когда прямые $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ переходы отсутствуют. Все эти выражения должны использоваться для анализа экспериментальных данных, получаемых по изучению смешивания и осцилляций нейтрино. Поэтому они представляют большой интерес.

Показано, что требование положительной определённости вероятности переходов $P_{\nu_e \to \nu_e}(t)$ при $\nu_e \leftrightarrow \nu_e$ осцилляциях строго выполняется, если $\Delta m^2_{13} = \Delta m^2_{12} + \Delta m^2_{23}$.

Все аналитические вычисления были выполнены с использованием программы Maple, а графическое моделирование — с использованием программы Matlab.

Литература

1. *Понтекорво Б. М.* Мезоний и антимезоний // ЖЭТФ. — Т. 33. — 1957. — С. 549.
2. *Понтекорво Б. М.* Обратные β-процессы и несохранение лептонного заряда // ЖЭТФ. — Т. 34. — 1958. — С. 247.
3. *Maki Z. et al.* Remarks on the Unified Model of Elementary Particles // Prog.Theor. Phys. — Vol. 28. — 1962. — P. 870.
4. *Понтекорво Б. М.* Нейтринные опыты и вопрос о сохранении лептонного заряда // ЖЭТФ. — Т. 53. — 1967. — С. 1717.
5. *Beshtoev K. M.* Schemes of Neutrino Mixings (Oscillations) and Their Mixing Matrices // JINR Communication E2-2004-58. — Dubna: 2004. — hep-ph/0406124.
6. *Beshtoev K. M.* Neutrino Oscillations in the Scheme of Charge (couple constant) Mixings // JINR Communication E2-2005-163. — Dubna: 2005. — hep-ph/0506248.
7. *Bilenky S. M., Pontecorvo B. M.* Massive Neutrinos and Neutrino Oscillations // Phys. Rep. C41. — 1978. — P. 225.
8. *Boehm F., Vogel P.* Physics of Massive Neutrinos. — Cambridge Univ. Press, 1987. — Pp. 27, 121.
9. *Bilenky S. M., Petcov S. P.* Lepton Mixings and Neutrino Oscillations // Revs. of Mod. Phys. — Vol. 59. — 1977. — P. 631.
10. *Gribov V., Pontecorvo B. M.* Neutrino Astronomy and Lepton Charge // Phys. Lett. B. — Vol. 28. — 1969. — P. 493.
11. *Maiani L.* About Quark Mixings // Proc. Intern. Symp. on Lepton–Photon Interaction. — Hamburg: DESY, 1977. — P. 867.
12. *Eguchi K. et al.* First Results from KamLAND // Phys. Rev. Let. — Vol. 90. — 2003. — P. 21802.
13. *Mitsui T.* First Results from KamLAND // 28-th Intern. Cosmic Ray Conf., Japan, 1. — 2003. — P. 1221.
14. *Gtatta G.* New Results from KamLAND // Report on the XXIst Inter. Conf. on Neutrino Physics and Astrophysics. — Paris, France: 2004.
15. *Habig A.* Atmospheric Neutrino Oscillations in SK-1 // Proceedings of Inter. Cosmic Ray Conf., Japan, 1. — 2003. — P. 1255.
16. *Kearns E.* Atmospheric Neutrino Results from Super-K // Super-Kamiokande Collaboration, Report on Intern. Conf. Neutrino 2004. — Paris: 2004.
17. *Beshtoev K. M.* Examination of Unitarity Condition at Three Neutrino Oscillations in Vacuum // JINR Communication E2-2007-112. — Dubna: 2007. — hep-ph/0707.4427v.1.
18. Proceedings of the XXIst Inter. Conf. on Neutrino Physics and Astrophysics. — Paris, France: 2004.

UDC 539.123,539.12.01

Neutrino Wave Functions and Transition Probabilities at Three Neutrino Transitions (Oscillations) in Vacuum

Kh. M. Beshtoev

Joint Institute for Nuclear Research
Joliot Curie str., 6, Dubna, Moscow region, Russia, 141980

Three neutrino vacuum transitions and oscillations in the general case were considered and expressions for neutrino wave functions in three cases: with CP violation, without CP violation and the case when direct $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ transitions are absent,i.e., at $\beta(\theta_{13}) = 0$ (some works indicate on this possibility) were obtained. There were also computed transition probabilities for the case of CP conservation and for absence of direct $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ transitions, i.e. $\beta(\theta_{13}) = 0$. It was shown that the probability $P_{\nu_e \to \nu_e}(t)$ at $\nu_e \leftrightarrow \nu_e$ neutrino transitions is definitely positive value if $\Delta m^2_{13} = \Delta m^2_{12} + \Delta m^2_{23}$.