УДК 519.6

Об устойчивом продолжении потенциального поля с приближённо заданной поверхности

Д. Е. Ланеев

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Рассматривается задача продолжения потенциального поля с поверхности, заданной приближённо, в область, представляющую собой цилиндр прямоугольного сечения. Устойчивое решение задачи продолжения строится на основе устойчивого построения нормали к поверхности с использованием метода регуляризации Тихонова в модификации В. А. Морозова.

Ключевые слова: продолжение потенциального поля, приближённо заданная поверхность, устойчивое решение, метод регуляризации.

1. Введение

В [1] построен устойчивый метод и обоснованы алгоритмы численного решения задачи продолжения потенциального поля в чётно-периодической модели, основанный на результатах работ [2]. Метод, развитый в этих работах, состоит в устойчивом решении задачи Коши для уравнения Лапласа с данными на поверхности произвольного вида. В [3] построено устойчивое решение задачи Коши с данными на поверхности, заданной приближённо. Этот метод основан на решении задачи устойчивого построения нормали как задачи вычисления значений неограниченного оператора [4]. В данной работе, на основе результатов работы [3], строится устойчивое продолжение потенциального поля с поверхности, заданной приближённо. Полученные здесь результаты могут быть использованы для обработки данных в геофизике, в частности, гравиразведке, для выявления плотностных аномалий в толще земной коры.

2. Постановка задачи

Пусть в цилиндре

$$D^{\infty} = \big\{(x, y, z) : \quad 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ -\infty < z < \infty\big\}$$

имеются источники потенциального поля плотности ρ с компактным носителем в области $z > H > 0$ в цилиндре D^{∞}. Рассмотрим чётно-периодическую модель [5] потенциального поля:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{E}(M) = 0, \quad M \in D^{\infty},\\
&\operatorname{div}\mathbf{E}(M) = -4\pi\rho(M),\\
&(\mathbf{n}, \mathbf{E})\big|_{x=0,l_x} = 0, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{E})\big|_{y=0,l_y} = 0,\\
&\mathbf{E} \to E^{\infty}\mathbf{k} \text{ при } z \to \pm\infty.
\end{aligned} \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 10 января 2008 г.
Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №06-01-00530).

В рамках модели (1) будем считать, что функция плотности источников ρ неизвестна, но известно поле $\mathbf{E}$ на произвольной достаточно гладкой поверхности S

$$S = \{(x, y, z): \quad 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ z = F(x, y)\}, \quad F \in C^2(\varPi(0)),$$

$$\varPi(z) = \{(x, y, z): 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ z = \text{const}\}. \tag{2}$$

Таким образом, в рамках модели (1) мы получаем задачу продолжения поля [5]

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\mathbf{E}(M) = 0, & M \in D(F, H) = \{(x, y, z): 0 < x < l_x, \\ \operatorname{div}\mathbf{E}(M) = 0, & 0 < y < l_y,\ F(x, y) < z < H,\ H > 0\}, \\ \mathbf{E}|_S = \mathbf{E}^0, & S = \{(x, y, z): 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ z = F(x, y)\}, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{E})|_{x=0,l_x} = 0, & (\mathbf{n}, \mathbf{E})|_{y=0,l_y} = 0, \quad F \in C^2(\varPi(0)). \end{array} \tag{3}$$

В [5] показано, что векторная задача (3) может быть сведена к смешанной краевой задаче для составляющей E_z

$$\begin{array}{ll} \varDelta E_z(M) = 0, & M \in D(F, H), \\ E_z|_S = E_z^0, & \\ \left.\dfrac{\partial E_z}{\partial n}\right|_S = \dfrac{1}{n_1}\left(\dfrac{\partial E_x^0}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y^0}{\partial y}\right), & \mathbf{n}_1 = (F'_x, F'_y, -1), \\ \left.\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{x=0,l_x} = 0, & \dfrac{\partial E_z}{\partial y}|_{y=0,l_y} = 0, \end{array} \tag{4}$$

где

$$D(H, F) = \{(x, y, z): 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H\}.$$

Функции E_x^0, E_y^0, E_z^0 считаем непрерывно-дифференцируемыми на поверхности S. Задача (4) некорректно поставлена [5] по условиям Коши на поверхности S. В [1] приведён метод построения регуляризованного решения задачи (4), устойчивого по отношению к погрешностям в функции $\mathbf{E}^0$. Поверхность S при этом предполагалась заданной точно.

Пользуясь результатами работ [1, 6], построим решение задачи (4) в виде

$$E_z(M) = v_z(M) - \varPhi_z(M), \quad M \in D(F, H), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \varPhi_z(M) = \int\limits_{\varPi(0)} \Big[& \left(E_x^0(x_P, y_P) + E_z^0(x_P, y_P)F'_x(x_P, y_P)\right) \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_P}(M, P)\right|_{P\in S} + \\ & + \Big(E_y^0(x_P, y_P) + E_z^0(x_P, y_P)F'_y(x_P, y_P)\Big) \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_P}(M, P)\right|_{P\in S} + \\ & + \Big(E_x^0(x_P, y_P)F'_x(x_P, y_P) + E_y^0(x_P, y_P)F'_y(x_P, y_P) - \\ & - E_z^0(x_P, y_P)\Big) \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z_P}(M, P)\right|_{P\in S}\Big] \mathrm{d}x_P \mathrm{d}y_P, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{l_x l_y}\theta(z_P - z_M)(z_M - z_P) +$$

$$+\frac{2}{\pi l_x l_y}\sum_{\substack{n,m=0,\\ nm\neq 0}}^{\infty}\epsilon_n\epsilon_m\frac{e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}|z_M-z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}}\times$$

$$\times\cos\frac{\pi n x_M}{l_x}\cos\frac{\pi m y_M}{l_y}\cos\frac{\pi n x_P}{l_x}\cos\frac{\pi m y_P}{l_y},\quad \epsilon_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0,5, & n\neq 0,\end{cases} \tag{7}$$

$$v_z(M)=\sum_{\substack{n,m=0,\\ nm\neq 0}}^{\infty}\epsilon_n\epsilon_m\tilde{\Phi}_{z,nm}(a)e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(z_M-a)}\cos\frac{\pi n x_M}{l_x}\cos\frac{\pi m y_M}{l_y},$$

$$M\in D(-\infty,H),\quad a=\min_{(x,y)}F(x,y), \tag{8}$$

$$\tilde{\Phi}_{z,nm}(a)=\frac{4}{l_x l_y}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\Phi_z(x,y,a)\cos\frac{\pi n x}{l_x}\cos\frac{\pi m y}{l_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Как следует из формул (6)–(9), решение задачи (4) строится на базе функции Φ_z вида (6), для вычисления которой согласно (6) необходимо вычисление компонент вектора нормали $\mathbf{n}_1$ к поверхности S:

$$\mathbf{n}_1=\left\{F_x^{'},F_y^{'},-1\right\}=\mathbf{i}F_x^{'}+\mathbf{j}F_y^{'}-\mathbf{k}. \tag{10}$$

Если функции поле $\mathbf{E}^0$ задано с погрешностью, то функция Φ_z вида (6) вычисляется также с погрешностью, и устойчивость решения достигается применением метода регуляризации А. Н. Тихонова [7]. Если поверхность S задана с погрешностью, то вычисление интеграла (6) связано с необходимостью устойчивого вычисления нормали к поверхности, что также представляет собой некорректно поставленную задачу как задача дифференцирования функции, заданной приближённо.

3. Приближённо заданная поверхность

Если поверхность S задана приближённо, то это в нашем случае означает, что функция F известна с некоторой погрешностью, задача вычисления нормали к поверхности — это задача вычисления градиента функции, заданной приближённо, которая некорректно поставлена. Для получения её устойчивого решения воспользуемся постановкой [4, 8], то есть рассмотрим задачу вычисления градиента как задачу восстановления значений неограниченного оператора.

Пусть вместо точной функции F задана функция F^μ такая, что

$$\|F^\mu-F\|_{L_2(\Pi(0))}\leqslant\mu. \tag{11}$$

Вектор-функция $\mathbf{n}_1$ представляет собой «пространственный» градиент функции $F(x,y)-z$, то есть

$$\mathbf{n}_1=\mathrm{grad}\,(F(x,y)-z)=\nabla_{xy}F-\mathbf{k}.$$

В качестве приближения к функции $\nabla_{xy}F$ рассмотрим «плоский» градиент ∇_{xy} от экстремали функционала [9]

$$N^\beta[W]=\Big\|W-F^\mu\Big\|^2_{L_2(\Pi(0))}+\beta\Big\|\nabla W\Big\|^2_{L_2(\Pi(0))}. \tag{12}$$

Будем считать, что поверхность S удовлетворяет условию:

$$F|_{x=0,l_x}=F|_{y=0,l_y}=0.$$

Это условие, в частности, имеет место в случае, когда S можно рассматривать как возмущение основной плоскости $z = 0$. Тогда экстремаль функционала (12) удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\begin{gathered} -\beta \Delta W + W = F^{\mu}, \\ W|_{x=0,l_x} = 0, \quad W|_{y=0,l_y} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Решая задачу (13) методом Фурье, получим [3]:

$$W^{\mu}_{\beta}(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}^{\mu}_{nm}}{1+\beta\left[\left(\frac{\pi n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_y}\right)^2\right]} \sin\frac{\pi n x}{l_x} \sin\frac{\pi m y}{l_y}. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что ряд (14) сходится равномерно на $\Pi(0)$ при любом $\beta > 0$.

Обозначим

$$W^{\mu} = W^{\mu}_{\beta}, \quad \beta = \frac{\mu}{\|\Delta F\|}. \tag{15}$$

В качестве приближённого значения градиента функции F^{μ} будем рассматривать вектор-функцию

$$\nabla_{xy} W^{\mu}(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}^{\mu}_{nm}}{1+\beta\left[\left(\frac{\pi n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_y}\right)^2\right]} \times \\ \times \left(\mathbf{i}\frac{\pi n}{l_x}\cos\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y} + \mathbf{j}\frac{\pi m}{l_y}\cos\frac{\pi m y}{l_y}\sin\frac{\pi n x}{l_x}\right). \tag{16}$$

Ряд (16) также равномерно сходится на $\Pi(0)$.

Пусть F^{-} — нечётнопериодическое продолжение функции F с периодом $2l_x$ по переменной x и с периодом $2l_y$ по переменной y, т. е.

$$\begin{gathered} F^{-}(-x,y) = -F^{-}(x,y), \quad F^{-}(x,-y) = -F^{-}(x,y), \quad F^{-}(-x,-y) = F^{-}(x,y), \\ F^{-}(x+2l_x n, y+2l_y m) = F^{-}(x,y) = F(x,y), \quad (x,y) \in \Pi(0). \end{gathered}$$

Имеет место следующая теорема [3]:

Теорема 1. *Пусть* $F^{-} \in C^2(R^2)$, $\beta = \mu/\|\Delta F\| > 0$. *Тогда*

$$\left\| \nabla_{xy} W^{\mu} - \nabla_{xy} F \right\|_{L_2(\Pi(0))} \leqslant \sqrt{\|\Delta F\|} \cdot \sqrt{\mu}. \tag{17}$$

В качестве приближений к F'_x и F'_y мы будем рассматривать соответственно $(W^{\mu})'_x$ и $(W^{\mu})'_y$.

4. Задача продолжения с приближёнными данными

Пусть теперь функции $\mathbf{E}^0$ задана приближённо, а именно: пусть задана функция $\mathbf{E}^{0,\delta}$ такая, что

$$\left\| \mathbf{E}^{0\delta} - \mathbf{E}^0 \right\|_{L_2(\Pi(0))} \leqslant \delta. \tag{18}$$

Тогда функция Φ_z вида (6) при точно заданной поверхности S может быть вычислена с некоторой погрешностью как приближённая функция:

$$\varPhi_z^{\delta}(M) = \int\limits_{\varPi(0)} \Bigg[\Big(E_x^{0\delta}(x_P, y_P) + E_z^{0\delta}(x_P, y_P) F_x'(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial x_P}(M, P) \Big|_{P \in S} +$$
$$+ \Big(E_y^{0\delta}(x_P, y_P) + E_z^{0\delta}(x_P, y_P) F_y'(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial y_P}(M, P) \Big|_{P \in S} +$$
$$+ \Big(E_x^{0\delta}(x_P, y_P) F_x'(x_P, y_P) + E_y^{0\delta}(x_P, y_P) F_y'(x_P, y_P) -$$
$$- E_z^{0\delta}(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial z_P}(M, P) \Big|_{P \in S} \Bigg] \mathrm{d}x_P \mathrm{d}y_P. \quad (19)$$

При приближённом задании поверхности S, определяемом условием (11), функция $\varPhi_z^{\delta}$ может быть вычислена в свою очередь приближённо как $\varPhi_z^{\delta\mu}$ по формуле (19) с заменой F_x' и F_y' на соответственно $(W^{\mu})_x'$ и $(W^{\mu})_y'$, а поверхность S заменяем на поверхность S^{μ}, которая задаётся уравнением $z = W^{\mu}(x, y)$:

$$\varPhi_z^{\delta\mu}(M) = \int\limits_{\varPi(0)} \Bigg[\Big(E_x^{0\delta}(x_P, y_P) + E_z^{0\delta}(x_P, y_P) W_x^{\mu}(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial x_P}(M, P) +$$
$$+ \Big(E_y^{0\delta}(x_P, y_P) + E_z^{0\delta}(x_P, y_P) W_y^{\mu}(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial y_P}(M, P) +$$
$$+ \Big(E_x^{0\delta}(x_P, y_P) W_x^{\mu}(x_P, y_P) + E_y^{0\delta}(x_P, y_P) W_y^{\mu}(x_P, y_P) -$$
$$- E_z^{0\delta}(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial z_P}(M, P) \Bigg]_{P \in S^{\mu}} \mathrm{d}x_P \mathrm{d}y_P. \quad (20)$$

Для формирования решения по формулам (6)–(9) необходимо вычисление коэффициентов Фурье (9). При приближённых данных и при приближённом задании поверхности, то есть при приближённом вычислении функции (6) речь может идти лишь о приближённом вычислении коэффициентов Фурье. Оценим разность

$$\Big| \varPhi_z^{\delta,\mu}(M) - \varPhi_z(M) \Big| \leqslant \Big| \varPhi_z^{\delta,\mu}(M) - \varPhi_z^{\delta}(M) \Big| + \Big| \varPhi_z^{\delta}(M) - \varPhi_z(M) \Big|, \quad M \in \varPi(a), \quad (21)$$

где функции $\varPhi_z^{\delta\mu}$, $\varPhi_z^{\delta}$, $\varPhi_z$ — функции вида (20), (19), (6) соответственно. Оценим первую разность в (21),

$$\Big| \varPhi_z^{\delta,\mu}(M) - \varPhi_z^{\delta}(M) \Big| = \Big| \varPhi_z^{\delta,\mu}(M) - \varPhi_{z,1}^{\delta\mu}(M) \Big| + \Big| \varPhi_{z,1}^{\delta,\mu}(M) - \varPhi_z^{\delta}(M) \Big|, \quad (22)$$

вводя вспомогательную функцию

$$\varPhi_{z,1}^{\delta\mu}(M) = \int\limits_{\varPi(0)} \Bigg[\Big(E_x^{0\delta}(x_P, y_P) + E_z^{0\delta}(x_P, y_P) F_x'(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial x_P}(M, P) +$$
$$+ \Big(E_y^{0\delta}(x_P, y_P) + E_z^{0\delta}(x_P, y_P) F_y'(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial y_P}(M, P) +$$
$$+ \Big(E_x^{0\delta}(x_P, y_P) F_x'(x_P, y_P) + E_y^{0\delta}(x_P, y_P) F_y'(x_P, y_P) -$$
$$- E_z^{0\delta}(x_P, y_P) \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial z_P}(M, P) \Bigg]_{P \in S^{\mu}} \mathrm{d}x_P \mathrm{d}y_P, \quad (23)$$

отличающуюся от (20) заменой $(W^{\mu})_x'$ и $(W^{\mu})_y'$ на соответственно F_x' и F_y'. Оценим первую разность в (22)

$$
\begin{gathered}
\left|\Phi_z^{\delta,\mu}(M)-\Phi_{z,1}^{\delta\mu}(M)\right| = \\
= \left| \int\limits_{\Pi(0)} \left[E_z^{0\delta}(x_P,y_P)\Big(F'_x(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_x\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial x_P}(M,P)+\right.\right. \\
+E_z^{0\delta}(x_P,y_P)\left(F'_y(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_y\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_P}(M,P)+ \\
+\left(E_x^{0\delta}(x_P,y_P)\left(F'_x(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_x\right)+\right. \\
\left.\left.\left.+E_y^{0\delta}(x_P,y_P)\left(F'_y(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_y\right)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z_P}(M,P)\right]_{P\in S^\mu}\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P\right|. \qquad (24)
\end{gathered}
$$

Оценивая производные φ их максимумами, получим

$$
\begin{gathered}
\left|\Phi_z^{\delta,\mu}(M)-\Phi_{z,1}^{\delta\mu}(M)\right| \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{\Pi(0)} \left|E_z^{0\delta}(x_P,y_P)\right|\left|F'_x(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_x\right| \max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_P}(M,P)\right|+ \\
+\int\limits_{\Pi(0)} \left|E_z^{0\delta}(x_P,y_P)\right|\left|F'_y(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_y\right| \max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_P}(M,P)\right|+ \\
+\int\limits_{\Pi(0)}\left(\left|E_x^{0\delta}(x_P,y_P)\right|\left|F'_x(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_x\right|+\right. \\
\left.+\left|E_y^{0\delta}(x_P,y_P)\right|\left|F'_y(x_P,y_P)-\left(W^\mu(x_P,y_P)\right)'_y\right|\right)\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z_P}(M,P)\right|\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P.
\end{gathered}
$$

Учитывая очевидные оценки модулей координат градиента функции φ его полным модулем

$$
\begin{aligned}
\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_P}(M,P)\right| &\leqslant \max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\nabla_P\varphi(M,P)\right|, \\
\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_P}(M,P)\right| &\leqslant \max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\nabla_P\varphi(M,P)\right|, \\
\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z_P}(M,P)\right| &\leqslant \max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}\left|\nabla_P\varphi(M,P)\right|,
\end{aligned}
$$

вынесем константу за знак интеграла:

$$
\begin{gathered}
\left|\Phi_z^{\delta,\mu}(M)-\Phi_{z,1}^{\delta\mu}(M)\right| \leqslant \max_{\substack{M\in\Pi(a)\\P\in S}}|\nabla_P\varphi(M,P)| \int\limits_{\Pi(0)}\left[\left|E_z^{0\delta}\right|\left|F'{}_x-(W^\mu)'_x\right|+\right. \\
\left.+\left|E_z^{0\delta}\right|\left|F'_y-(W^\mu)'_y\right|+\left|E_x^{0\delta}\right|\left|F'_x-(W^\mu)'_x\right|+\left|E_y^{0\delta}\right|\left|F'_y-(W^\mu)'_y\right|\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{gathered}
$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к каждой разности, а также оценку теоремы, получим:

$$\Big|\varPhi_z^{\delta,\mu}(M)-\varPhi_{z,1}^{\delta\mu}(M)\Big| \leqslant \max_{\substack{M\in\varPi(a)\\ P\in S}} |\nabla_P\varphi(M,P)| \Big[\Big\|E_z^{0\delta}\Big\|\cdot\|F'{}_x-(W^\mu)'_x\|+$$

$$+\Big\|E_z^{0\delta}\Big\|\cdot\Big\|F'_y-(W^\mu)'_y\Big\|+\Big\|E_x^{0\delta}\Big\|\cdot\|F'_x-(W^\mu)'_x\|+\Big\|E_y^{0\delta}\Big\|\cdot\Big\|F'_y-(W^\mu)'_y\Big\|\Big]\leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{M\in\varPi(a)\\ P\in S}} |\nabla_P\varphi(M,P)|\,4\,\Big\|\mathbf{E}^{0\delta}\Big\|_{L_2(\varPi(0))}\|\nabla_{xy}W^\mu-\nabla_{xy}F\|_{L_2(\varPi(0))}\leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{M\in\varPi(a)\\ P\in S}} |\nabla_P\varphi(M,P)|\,4\Big(\|\,\mathbf{E}^0\,\|_{L_2(\varPi(0))}+\delta\Big)\sqrt{\|\varDelta F\|}\cdot\sqrt{\mu}\leqslant C_1\sqrt{\mu}. \quad (25)$$

Так как нас интересует поведение решения задачи (4) при $\delta\to 0$, то можно считать, что $\delta\leqslant\delta_0$, и, таким образом, можно считать величину $\big(\|\,\mathbf{E}^0\,\|+\delta\big)$ ограниченной.

Оценим вторую разность в (22)

$$\Big|\varPhi_{z,1}^{\delta,\mu}(M)-\varPhi_z^{\delta}(M)\Big|\leqslant\int\limits_{\varPi(0)}\Bigg[\Big(E_x^{0\delta}(x_P,y_P)+$$

$$+E_z^{0\delta}(x_P,y_P)F'_x(x_P,y_P)\Big)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_P}(M,P)\Big|_{P\in S^\mu}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_P}(M,P)\Big|_{P\in S}\right)+$$

$$+\Big(E_y^{0\delta}(x_P,y_P)+E_z^{0\delta}(x_P,y_P)F'_y(x_P,y_P)\Big)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_P}(M,P)\Big|_{P\in S^\mu}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_P}(M,P)\Big|_{P\in S}\right)+$$

$$+\Big(E_x^{0\delta}(x_P,y_P)F'_x(x_P,y_P)+E_y^{0\delta}(x_P,y_P)F'_y(x_P,y_P)-E_z^{0\delta}(x_P,y_P)\Big)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_P}(M,P)\Big|_{P\in S^\mu}-\frac{\partial\varphi}{\partial z_P}(M,P)\Big|_{P\in S}\right)\Bigg]\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P. \quad (26)$$

Применяя к разностям производных функции φ формулу Лагранжа, получим

$$\Big|\varPhi_{z,1}^{\delta,\mu}(M)-\varPhi_z^{\delta}(M)\Big|\leqslant C_2\,\|W^\mu-F\|\leqslant C_2\big(\,\|W^\mu-F^\mu\|+\|F^\mu-F\|\,\big)\leqslant C_3\mu. \quad (27)$$

Собирая оценки и считая $\mu\leqslant\mu_0$, получаем оценку первой разности в (21)

$$\Big|\varPhi^{\delta,\mu}(M)-\varPhi^{\delta}(M)\Big|\leqslant C_1\sqrt{\mu}+C_3\mu\leqslant C_1\sqrt{\mu}(1+C_3\sqrt{\mu})\leqslant C_5\sqrt{\mu},\quad M\in\varPi(a). \quad (28)$$

Оценку второй разности в (21) получаем так же, как в [5]:

$$\Big|\varPhi^{\delta}(M)-\varPhi(M)\Big|=\Bigg|\int\limits_{\varPi(0)}\Bigg[\Big(\Big(E_x^{0\delta}(x_P,y_P)-E_x^{0}(x_P,y_P)\Big)+$$

$$+\Big(E_z^{0\delta}(x_P,y_P)-E_z^{0}(x_P,y_P)\Big)F'_x(x_P,y_P)\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial x_P}(M,P)+$$

$$+\Big(\Big(E_y^{0\delta}(x_P,y_P)-E_y^{0}(x_P,y_P)\Big)+\Big(E_z^{0\delta}(x_P,y_P)-E_z^{0}(x_P,y_P)\Big)F'_y(x_P,y_P)\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial y_P}(M,P)+$$

$$+\Big(\Big(E_x^{0\delta}(x_P,y_P)-E_x^{0}(x_P,y_P)\Big)F'_x(x_P,y_P)+\Big(E_y^{0\delta}(x_P,y_P)-E_y^{0}(x_P,y_P)\Big)F'_y(x_P,y_P)-$$

$$-\Big(E_z^{0\delta}(x_P,y_P)-E_z^{0}(x_P,y_P)\Big)\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial z_P}(M,P)\Bigg]_{P\in S}\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P\Bigg|. \quad (29)$$

Оценивая, как и в предыдущих случаях, производные функции φ и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left|\varPhi^{\delta}(M)-\varPhi(M)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{M\in\varPi(a)\\ P\in S}} |\nabla_P\varphi(M,P)| \Bigg(\| E_x^{0\delta}-E_x^0\| \frac{\sqrt{l_xl_y}}{2} + \| E_z^{0\delta}-E_z^0\| \, \| F_x'\| +$$
$$+ \| E_y^{0\delta}-E_y^0\| \frac{\sqrt{l_xl_y}}{24} + \| E_z^{0\delta}-E_z^0\| \, \| F_y'\| + \| E_x^{0\delta}-E_x^0\| \, \| F'_x\| +$$
$$+ \| E_y^{0\delta}-E_y^0\| \, \| F_y'\| - \| E_z^{0\delta}-E_z^0\| \frac{\sqrt{l_xl_y}}{2} \Bigg) \leqslant C_4\delta, \;\; M\in\varPi(a). \quad (30)$$

Из (28) и (30) для оценки (21) получаем:

$$\max_{M\in\varPi(a)} \left|\varPhi^{\delta,\mu}(M)-\varPhi(M)\right| \leqslant C_5\sqrt{\mu}+C_4\delta = \varDelta(\mu,\delta) \xrightarrow[\substack{\mu\to 0\\ \delta\to 0}]{} 0. \quad (31)$$

Таким образом, функция $\varPhi_z$ известна с некоторой погрешностью $\varDelta$, имеющей структуру (31). В соответствии со схемой [5] устойчивое приближённое решение задачи (4) строится на основе экстремали функционала Тихонова [5, 7], и может быть получено в виде

$$E_{z,\alpha}^{\delta,\mu}(M) = v_{z,\alpha}^{\delta,\mu}(M) - \varPhi_z^{\delta,\mu}(M), \quad M\in D(H,F), \quad (32)$$

где $\varPhi_z^{\delta,\mu}$ — функция вида (20), а $v_{z,\alpha}^{\mu,\delta}$ имеет вид:

$$v_{z,\alpha}^{\mu,\delta}(M) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \epsilon_n\epsilon_m \frac{(\tilde{\varPhi}_z^{\mu,\delta})_{nm}(a) e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(z_M-a)}}{1+\alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)}} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (33)$$

Здесь $(\tilde{\varPhi}_z^{\mu,\delta})_{nm}(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\varPhi_z^{\mu,\delta}(M)|_{M\in\varPi(a)}$:

$$(\tilde{\varPhi}_z^{\mu,\delta})_{nm}(a) = \frac{4}{l_xl_y}\int_0^{l_x}\mathrm{d}x\int_0^{l_y}\mathrm{d}y\;\varPhi_z^{\delta,\mu}(x,y,a)\cos\frac{\pi n x}{l_x}\cos\frac{\pi m y}{l_y},$$

а α — параметр регуляризации. В соответствии с обозначениями, введёнными выше, величина a выбирается так, чтобы

$$a < \min_{(x,y)\in\varPi(0)} F(x,y).$$

Теорема 2. *Пусть решение задачи (4) существует в области $D(H,F)$, $\alpha = \alpha(\varDelta)$, $\alpha(\varDelta)\to 0$, $\varDelta/\sqrt{\alpha(\varDelta)}\to 0$ при $\varDelta\to 0$. Тогда функция $u_{\alpha(\varDelta)}$ вида (32), где согласно (31) $\varDelta=\varDelta(\mu,\delta)=C_5\sqrt{\mu}+C_4\delta$, равномерно сходится к точному решению задачи (4) при $\delta\to 0$, $\mu\to 0$ в области $D(H-\varepsilon,F+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ — некоторое фиксированное сколь угодно малое число.*

Теорема 2 доказывается так же, как теорема в [5].

5. Заключение

Формулы (32)–(33) дают решение задачи продолжения «вертикальной» составляющей поля E_z с приближённо заданной поверхности. Составляющие поля E_x и E_y могут быть получены преобразованием Гильберта компоненты E_z [8]. Дискретный вариант формул (32)–(33) может быть получен аналогично [1].

Литература

1. *Ланеев Д. Е.* Об устойчивом численном решении задачи продолжения потенциального поля в четно-периодической модели // Вестник РУДН. Серия «Физико-математические науки». — № 1. — 2006. — С. 5–12.
2. *Ланеев Е. Б.* Устойчивое решение одной некорректно поставленной краевой задачи для потенциального поля // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — № 1. — 2000. — С. 105–112.
3. *Ланеев Е. Б., Муратов М. Н.* Об устойчивом решении одной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа с приближенно заданной границей // Вестник РУДН. Серия «Математика». — № 9(1). — 2002. — С. 102–111.
4. *Морозов В. А.* Об одном устойчивом методе вычисления неограниченных операторов // ДАН СССР. — Т. 185, № 2. — 1969. — С. 267–270.
5. *Ланеев Е. Б.* О некоторых постановках задачи продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия «Физика». — № 8(1). — 2000. — С. 21–28.
6. *Ланеев Е. Б.* Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа с краевыми условиями второго рода // Вестник РУДН. Серия «Прикладная и компьютерная математика». — № 1. — 2003. — С. 110–119.
7. *Ланеев Е. Б.* О задаче Коши для уравнения Лапласа в неодносвязной области // Статистическая и квантовая физика и ее приложения. — Изд-во УДН, 1986. — С. 49–56.
8. *Ланеев Е. Б.* Двумерный аналог преобразования Гильберта в задаче продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — № 1. — 2001. — С. 110–119.
9. *Ланеев Е. Б., Васудеван Б.* Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — № 1. — 1999. — С. 128–133.

UDC 519.6

On Stable Continuation of Potential Field with the Approximately Defined Boundary

D. E. Laneev

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

The problem of the potential field continuation we consider in a case of an approximately defined boundary. We have obtained the stability of an approximate solution with respect to boundary error and to field data error.