Математика

УДК 519.872

Стационарные характеристики обслуживания в системе $G|M|n|r$ с обобщённым обновлением

И. С. Зарядов

Кафедра теории вероятностей и математической статистики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Рассматривается система массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания, конечным накопителем и обобщённым обновлением. Найдены следующие стационарные характеристики: распределение числа заявок в системе, вероятности потери заявки за счёт переполнения накопителя и обновления, распределения времён пребывания в накопителе потерянной и обслуженной заявок и некоторые другие.

Ключевые слова: обобщённое обновление, вложенная цепь Маркова, распределение числа заявок в системе, вероятность потери заявки, распределение времён пребывания.

1. Введение. Описание системы

Рассмотрим n-линейную систему массового обслуживания (СМО) $G|M|n|r$ с конечным накопителем ёмкости r и обобщённым обновлением.

Входящий в систему поток является рекуррентным, причём время между соседними поступлениями заявок имеет произвольную функцию распределения $A(x)$. Будем предполагать, что среднее время $a = \int\limits_0^\infty x\,\mathrm{d}A(x)$ между поступлениями заявок конечно. Кроме того, там, где речь пойдёт о стационарных вероятностях по времени, будем предполагать, что время между поступлениями заявок не может принимать только значения αm, где $\alpha > 0$, а m — целое число.

Времена обслуживания заявок на приборах являются независимыми одинаково распределёнными по экспоненциальному с параметром μ закону случайными величинами. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Заявка, заставшая в момент поступления в системе n заявок на приборах и r заявок в накопителе, теряется.

Обобщённое обновление определяется следующим образом. Находящаяся на приборе заявка в момент окончания обслуживания одновременно с уходом из системы либо с вероятностью $q(l)$ «убивает» в накопителе ровно l заявок, если в нём находится более l заявок, либо с вероятностью $Q(l) = \sum\limits_{k=l}^{r} q(k)$ полностью опустошает накопитель, если в нём было не более l заявок. Вероятности $q(l)$ при $l > 0$ будем называть вероятностями обновления. Очевидно, что $Q(0) = \sum\limits_{l=0}^{r} q(l) = 1$, а $p = q(0)$ представляет собой вероятность того, что закончившая обслуживание на приборе заявка покидает систему, не выбивая заявок из накопителя. Будем считать, что заявки из накопителя выбиваются в порядке поступления в систему.

Отметим, что при $p = 1$ рассматриваемая система превращается в стандартную систему $G|M|n|r$, а при $q(r) = 1$ получаем систему с обновлением, рассматривавшуюся в [1–4].

Статья поступила в редакцию 11 января 2008 г.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №06-07-89056).

2. Стационарные вероятности состояний

Исследование данной системы проведём с помощью вложенной цепи Маркова (см., например, [5–7]), образованной числами $\nu(\tau_n+0)$ заявок в системе в моменты времени τ_n+0, где τ_n — момент поступления n-й заявки. Множество состояний вложенной цепи Маркова имеет вид $\mathcal{X}=\{1,\ldots,n+r\}$.

Выпишем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова. Для этого введём обозначения:

$\pi_m(k)$ — вероятность того, что за время x систему покинет ровно k заявок, при условии, что за это время обслужится ровно m заявок и новые заявки в систему не поступят;
$\tilde{\pi}_m(k)$ — вероятность того, что в конце временного интервала x в системе останется $n-1$ заявок, при условии, что в начальный момент было $n+k-1$ заявок, а за время x обслужится ровно m заявок и новые заявки в систему не поступят.

Для $\pi_m(k)$ и $\tilde{\pi}_m(k)$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\pi_1(k)=q(k-1), \quad k=\overline{1,r}, \tag{1}$$

$$\pi_m(k)=\sum_{i=m-1}^{k-1}\pi_{m-1}(i)\pi_1(k-i), \quad m=\overline{2,r}, \quad k=\overline{m,r}, \tag{2}$$

$$\tilde{\pi}_1(k)=Q(k-1), \quad k=\overline{1,r+1}, \tag{3}$$

$$\tilde{\pi}_m(k)=\sum_{i=m-1}^{k-1}\pi_{m-1}(i)\tilde{\pi}_1(k-i), \quad m=\overline{2,r+1}, \quad k=\overline{m,r+1}. \tag{4}$$

Далее, пусть:

$F_k(x)$ — условная вероятность того, что за время x систему покинет ровно k заявок, при условии, что в начальный момент в системе было не менее $n+k$, $k=\overline{0,r}$, заявок и за время x в систему не поступили новые заявки;
$F_{k,w}(x)$ — условная вероятность того, что за время x систему покинет $k-w$ заявок, при условии, что в начальный момент в системе было k, $k=\overline{1,n+r}$, $w=\overline{0,n-1}$, заявок и за время x в систему не поступили новые заявки;
A_k — вероятность того, что между поступлениями заявок систему покинет ровно k заявок, при условии, что в начальный момент их было не менее $n+k$, $k=\overline{0,r}$;
$A_{k,w}$ — вероятность того, что между поступлениями заявок систему покинет ровно $k-w$ заявок, при условии, что в начальный момент их было k, $k=\overline{1,n+r}$, $w=\overline{0,n-1}$.

Функции $F_k(x)$ и $F_{k,w}(x)$ представимы в виде

$$F_0(x)=\mathrm{e}^{-\mu nx}, \quad x>0,$$

$$F_k(x)=\sum_{m=1}^{k}\pi_m(k)\frac{(\mu n)^m x^m}{m!}\mathrm{e}^{-\mu nx}, \quad k=\overline{1,r}, \quad x>0,$$

$$F_{n+k,n-1}(x)=\sum_{m=1}^{k+1}\tilde{\pi}_m(k+1)\frac{(\mu n)^m x^m}{m!}\mathrm{e}^{-\mu nx}, \quad k=\overline{0,r}, \quad x>0,$$

$$F_{k,k}(x)=\mathrm{e}^{-\mu kx}, \quad k=\overline{0,n-1},$$

$$F_{k,w}(x)=\frac{k!}{w!}\sum_{m=1}^{k-w}C_{i,w}\mathrm{e}^{-(i+w)\mu x}, \quad k=\overline{1,n-1}, \quad w=\overline{0,k-1},$$

$$F_{n+k,w} = \int\limits_0^x F_{n+k,w+1}(y)\mu(w+1)\mathrm{e}^{-\mu w(x-y)}\,\mathrm{d}y, \quad k=\overline{0,r}, \quad w=\overline{0,n-2},$$

где

$$C_{0,k-1}=1, \quad C_{1,k-1}=-1,$$

$$C_{i,k} = \begin{cases} \dfrac{C_{0,w+1}}{k-w}, & i=0, \\ -\dfrac{C_{i-1,w+1}}{i}, & i=\overline{1,k-w}, \end{cases}$$

а A_k и $A_{k,w}$ определяются формулами

$$A_0 = \int\limits_0^\infty F_0(x)\,\mathrm{d}A(x) = \alpha(\mu n),$$

$$A_k = \int\limits_0^\infty F_k(x)\,\mathrm{d}A(x) = \sum_{m=1}^{k}(-1)^m\pi_m(k)\frac{(\mu n)^m}{m!}\alpha^{(m)}(\mu n), \quad k=\overline{1,r},$$

$$A_{k,k} = \int\limits_0^\infty F_{k,k}(x)\,\mathrm{d}A(x) = \alpha(k\mu),$$

$$A_{k,w} = \int\limits_0^\infty F_{k,w}(x)\,\mathrm{d}A(x) = \frac{k!}{w!}\sum_{mi1}^{k-w}C_{i,w}\alpha\big(\mu(i+w)\big), \quad k=\overline{1,n-1}, \quad w=\overline{0,k-1},$$

$$A_{n+k,w} = \int\limits_0^\infty F_{n+k,w}(x)\,\mathrm{d}A(x), \quad k=\overline{0,r}, \quad w=\overline{0,n-2},$$

где $\alpha(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}A(x)$ — преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) функции распределения $A(x)$.

Теперь мы можем записать матрицу $P=(p_{ij})_{i,j=\overline{1,n+r}}$ переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, которая имеет вид

$$P = \begin{pmatrix}
A_{1,0} & A_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{3,0} & A_{3,1} & A_{3,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
A_{n-1,0} & A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{n,0} & A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n-1} & A_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{n+1,0} & A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \dots & A_{n+1,n-1} & A_1 & A_0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
A_{n+r-1,0} & A_{n+r-1,1} & A_{n+r-1,2} & \dots & A_{n+r-1,n-1} & A_{r-1} & A_{r-2} & \dots & A_1 & A_0 \\
A_{n+r,0} & A_{n+r,1} & A_{n+r,2} & \dots & A_{n+r,n-1} & A_r & A_{r-1} & \dots & A_2 & A_0+A_1
\end{pmatrix}.$$

Вложенная цепь Маркова является неприводимой и непериодической.

Обозначим через p_k^*, $k=\overline{1,n+r}$, стационарную по вложенной цепи Маркова вероятность того, что в системе имеется k заявок, и положим $\vec{p}^{\,*}=(p_1^*,\dots,p_{n+r}^*)^T$. Тогда для $\vec{p}^{\,*}$ справедлива система уравнений равновесия (СУР)

$$\vec{p}^{\,*T} = \vec{p}^{\,*T}P \qquad (5)$$

с условием нормировки

$$\vec{p}^{*T}\vec{1} = 1. \tag{6}$$

Для решения СУР (5–6) можно использовать методы, изложенные в [5, 6].

Приведём некоторые другие стационарные характеристики, связанные с числом заявок в системе. Рассмотрим вектор $\vec{p}^- = (p_0^-, \ldots, p_{n+r}^-)^T$, где p_k^-, $k = \overline{0, n+r}$, — стационарная вероятность того, что поступившая в систему заявка застала в ней k других заявок. Координаты этого вектора имеют вид

$$p_k^- = p_{k+1}^*, \quad k = \overline{0, n+r-2},$$
$$p_{n+r-1}^- = p_{n+r-1}^* A_0 + p_{n+r}^* A_1, \quad p_{n+r}^- = p_{n+r}^* A_0.$$

Вероятность π потери заявки из-за переполнения системы определяется формулой

$$\pi = p_{n+r}^- = p_{n+r}^* A_0.$$

Обозначим:

T_k — среднее время, проведённое рассматриваемой системой в состоянии $(n+r-k)$ между последовательными моментами поступления заявок при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось $n+r$ заявок;

$T_{k,w}$ — среднее время, проведённое системой на интервале между соседними моментами поступления заявок в состоянии w при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось k заявок.

Тогда

$$T_k = \int\limits_0^\infty (1 - A(x)) F_k(x)\,\mathrm{d}x, \qquad T_{k,w} = \int\limits_0^\infty (1 - A(x)) F_{kw}(x)\,\mathrm{d}x,$$

или после элементарных преобразований

$$T_0 = \frac{1 - A_0}{\mu n}, \quad T_k = T_{k-1} - \frac{A_k}{\mu n}, \quad k = \overline{1, r}, \quad T_{k,k} = \frac{1 - A_{k,k}}{k\mu}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$T_{k,w} = \frac{\mu(w+1)T_{k,w+1} - A_{k,w}}{\mu w}, \quad k = \overline{1, n+r}, \quad w = \overline{0, \min(k-1, n-1)}.$$

Теперь, используя элементы теории полумарковских процессов (см., например, [5]), можно записать следующие выражения для стационарных вероятностей состояний по времени:

$$\pi_0 = \frac{1}{a} \sum_{w=1}^{n+r} p_w^* T_{w,0}, \tag{7}$$

$$\pi_k = \frac{1}{a} \sum_{w=k}^{n+r} p_w^* T_{w,k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{8}$$

$$\pi_k = \frac{1}{a} \sum_{w=k}^{n+r} p_w^* T_{w-k}, \quad k = \overline{n, n+r}. \tag{9}$$

3. Вероятности, связанные с обобщённым обновлением

Определим некоторые вероятности, связанные с обобщённым обновлением. В отличие от обычных систем, в системах с обновлением заявки в накопителе могут теряться.

Обозначим через p_{first} стационарную вероятность того, что принятая в систему заявка будет выбита из накопителя первой обслужившейся на приборе. Тогда, используя формулу полной вероятности, получаем:

$$p_{\text{first}} = \frac{1}{1-\pi}\sum_{i=0}^{r-1} Q(i+1)p^{-}_{n+i}.$$

Теперь найдём стационарную вероятность p_{loss} того, что принятая в систему заявка не попадёт на прибор, т. е. будет «убита» (не обязательно первой) обслужившейся заявкой. Для этого обозначим через $\hat{\pi}_m(k)$ вероятность того, что заявка, находящаяся в начальный момент в очереди на k-м месте, будет «убита» m-й обслужившейся заявкой. Имеют место соотношения

$$\hat{\pi}_1(k) = Q(k), \quad k = \overline{1,r}, \tag{10}$$

$$\hat{\pi}_m(k) = \sum_{i=m-1}^{k-1} \pi_{m-1}(i)\hat{\pi}_1(k-i), \quad m = \overline{2,r}, \quad k = \overline{m,r}, \tag{11}$$

Вводя теперь

$$\hat{\pi}(k) = \sum_{m=1}^{k} \hat{\pi}_m(k), \quad k = \overline{1,r},$$

— вероятность того, что заявка, находящаяся в начальный момент в очереди на k-м месте, будет «убита» (какой-либо) обслужившейся заявкой, — и используя формулу полной вероятности, приходим к следующему выражению:

$$p_{\text{loss}} = \frac{1}{1-\pi}\sum_{i=0}^{r-1} \hat{\pi}(i+1)p^{-}_{n+i}.$$

Стационарная вероятность того, что принятая в систему заявка попадёт на прибор,

$$p_{\text{serv}} = 1 - p_{\text{loss}}.$$

Наконец, общую стационарную вероятность потери заявки (за счёт переполнения накопителя или «убийства» обслужившейся заявкой) можно записать в виде

$$\pi_{\text{total}} = \pi + (1-\pi)p_{\text{loss}}.$$

4. Распределения времён пребывания в накопителе потерянной и обслуженной заявок

Введём следующие обозначения:

$W_i^{(\text{serv})}(x)$ — вероятность того, что принятая в систему заявка проведёт в накопителе время меньше x и попадёт на обслуживание, при условии, что она в момент поступления в систему застала в системе i, $i = \overline{0, n+r-1}$, других заявок;

$W_i^{(\text{loss})}(x)$ — вероятность того, что принятая в систему заявка проведёт в накопителе время меньше x и будет «убита», при условии, что в момент поступления она застала в системе i, $i = \overline{0, n+r-1}$, других заявок.

Очевидно, что

$$W_i^{(\text{serv})}(x) = 1, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x > 0,$$
$$W_i^{(\text{loss})}(x) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Далее, при $i = \overline{n, n+r-1}$, событие «принятая в систему заявка проведёт в накопителе время меньше x и попадёт на обслуживание, при условии, что она в момент поступления в систему застала в системе i других заявок» представляет собой объединение событий «m-я обслуженная заявка, $m = \overline{1, i-n+1}$, обслужится до момента x и за время, проведённое ею в системе, систему покинет ровно $i-n+1$ заявок». Отсюда по формуле полной вероятности получаем

$$W_i^{(\mathrm{serv})}(x) = \sum_{m=1}^{i-n+1} \pi_m(i-n+1) H_m(x), \quad i = \overline{n, n+r-1}, \tag{12}$$

где $H_m(x)$ — функция распределения Эрланга с параметрами m и $n\mu$.

Аналогично, при $i = \overline{n, n+r-1}$, событие «принятая в систему заявка проведёт в накопителе время меньше x и будет «убита», при условии, что она в момент поступления в систему застала в системе i других заявок» представляет собой объединение событий «m-я обслуженная заявка, $m = \overline{1, i-n+1}$, обслужится до момента x и в момент ухода из системы «убьёт» выделенную, $(i+1)$-ю заявку», что с учётом формулы полной вероятности даёт

$$W_i^{(\mathrm{loss})}(x) = \sum_{m=1}^{i-n+1} \hat{\pi}_m(i-n+1) H_m(x), \quad i = \overline{n, n+r-1}. \tag{13}$$

Наконец, пусть:

$W^{(\mathrm{serv})}(x)$ — функция стационарного распределения времени пребывания в накопителе принятой в систему и попавшей на обслуживание заявки;
$W^{(\mathrm{loss})}(x)$ — функция стационарного распределения времени пребывания в накопителе (и в системе) принятой в систему, но «убитой», заявки.

Снова, используя формулу полной вероятности, имеем:

$$W^{(\mathrm{serv})}(x) = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{serv}}} \sum_{i=0}^{n+r-1} W_i^{(\mathrm{serv})}(x) p_i^-, \tag{14}$$

$$W^{(\mathrm{loss})}(x) = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{loss}}} \sum_{i=n}^{n+r-1} W_i^{(\mathrm{loss})}(x) p_i^-. \tag{15}$$

Из формул (12)–(15) нетрудно получить выражения для моментов соответствующих распределений. Так, стационарные среднее $\overline{w}^{(\mathrm{serv})}$ и $\overline{w}^{(\mathrm{loss})}$ времена пребывания в накопителе обслуженной и принятой в систему, но «убитой», заявок определяются формулами

$$\overline{w}^{(\mathrm{serv})} = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{serv}}} \sum_{i=n}^{n+r-1} \overline{w}_i^{(\mathrm{serv})} p_i^-,$$

$$\overline{w}^{(\mathrm{loss})} = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{loss}}} \sum_{i=n}^{n+r-1} \overline{w}_i^{(\mathrm{loss})} p_i^-,$$

где

$$\overline{w}_i^{(\mathrm{serv})} = \frac{1}{n\mu} \sum_{m=1}^{i-n+1} m\pi_m(i-n+1), \quad i = \overline{n, n+r-1},$$

$$\overline{w}_i^{(\mathrm{loss})} = \frac{1}{n\mu} \sum_{m=1}^{i-n+1} m\hat{\pi}_m(i-n+1), \quad i = \overline{n, n+r-1}.$$

Поскольку время пребывания в системе обслуженной заявки равно сумме времён пребывания в накопителе и собственно обслуживания, то функция стационарного распределения времени пребывания в системе обслуженной заявки может быть записана в виде

$$V^{(\mathrm{serv})}(x) = \int\limits_0^{\infty} W^{(\mathrm{serv})}(x-y)\mu \mathrm{e}^{-\mu y}\,\mathrm{d}y, \quad x > 0,$$

а стационарное среднее время пребывания в системе обслуженной заявки определяется выражением

$$\overline{v}^{(\mathrm{serv})} = \overline{w}^{(\mathrm{serv})} + \frac{1}{\mu}.$$

5. Заключение

Таким образом, в работе исследована многолинейная система массового обслуживания с обновлением, рекуррентным входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием. Получены математические соотношения для вычисления стационарного распределения основных пользовательских характеристик рассматриваемой системы.

Литература

1. *Kreinin A.* Queueing Systems with Renovation // Journal of Applied Math. Stochast. Analysis. — Vol. 10, No 4. — 1997. — Pp. 431–443.
2. *Kreinin A.* Inhomogeneous Random Walks: Applications in Queueing and Finance // CanQueue / Fields Institute. — Toronto: 2003.
3. *Towsley D., Tripathi S. K.* A single server priority queue with server failure and queue flushing // Oper. Res. Lett. — 1999.
4. *Бочаров П. П., Зарядов И. С.* Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — № 1–2. — 2007. — С. 15–25.
5. Queueing Theory / P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — P. 529.
6. Стационарные характеристики системы массового обслуживания $G|MSP|1|r$ / П. П. Бочаров, Ч. Д'Апиче, А. В. Печинкин, С. Салерно // Автоматика и телемеханика. — № 2. — 2003. — С. 127–143.
7. *Чаплыгин В. В.* Система массового обслуживания $G|BMSP|1|r$ // Информационные процессы. — Т. 3, № 2. — 2003. — С. 97–108.

UDC 519.872

Queueing System $G|M|n|r$ with General Renovation. Stationary Characteristics

I. S. Zaryadov

Department of Probability Theory and Mathematical Statistics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

The queueing system with recurrent input flow, exponential service distribution, finite queue size and general renovation is revised. For this system such stationary characteristics as stationary distribution of the Markov imbedded chain, loss probabilities due system overflow and general renovation, time in system distributions for lost and served customers are found.