

---

# Математическое моделирование

УДК 532.516:539.3

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35

## Распространение нелинейных волн в соосных физически нелинейных цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью

Ю. А. Блинков\*, А. В. Месянжин<sup>†</sup>, Л. И. Могилевич<sup>‡</sup>

\* Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского

ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, Россия, 410012

<sup>†</sup> ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики»

ул. Большая Садовая, д. 239, г. Саратов, Россия, 410005

<sup>‡</sup> Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина  
ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, Россия, 410054

В современной волновой динамике известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Они получены на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщённых уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Также методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, отличающиеся от известных учётом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками. На основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, получены системы обобщённых уравнений КдВ. В представленной работе проведено исследование модели волновых явлений двух физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа–Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри. Для рассмотренных систем уравнений с учётом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка–Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений. Применение техники базисов Грёбнера позволяет генерировать схемы, для которых с помощью эквивалентных преобразований можно получить дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных уравнений. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс программ, позволяющий построить графики и получить численные решения задач Коши при точных решениях системы уравнений динамики соосных оболочек в качестве начального условия.

**Ключевые слова:** нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки

### 1. Постановка задачи

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Для абсолютно жёсткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы — упругой цилиндрической оболочки проведено аналогичное исследование в [2–5], а с учётом жидкости в [6].

---

Статья поступила в редакцию 19 сентября 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

Проблемы распространения волн в вязкоупругих и нелинейно вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе цилиндрических оболочках, без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью рассматривались ранее с позиции теории солитонов [7].

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [8,9], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщённых уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Выявлены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) наличие жидкости приводит к быстрому затуханию волны.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [10,11], отличающиеся от известных учётом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщённых уравнений КдВ. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке, и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рис. (1), внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью  $\delta$ , радиус срединной поверхности оболочки  $R$ ;  $R_1 = R^{(1)} - h_0^{(1)}/2$  — внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2 = R^{(2)} + h_0^{(2)}/2$  — внешний радиус внутренней оболочки;  $R_3 = R^{(2)} - h_0^{(2)}/2$  — внутренний радиус внутренней оболочки,  $R^{(1)}$ ,  $R^{(2)}$  — радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек;  $h_0^{(1)}$ ,  $h_0^{(2)}$  — их толщины. Все механические перемещения внутренней оболочки обозначены индексом (2) сверху, а внешней — индексом (1).

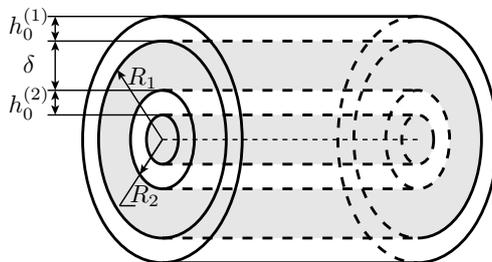


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа–Лява, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $e_i$  [12]:

$$\sigma_i = Ee_i \mp me_i^3,$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $m$  — константа материала, которая определяется из опытов на сжатие или растяжение.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $(r, \Theta, x)$  в случае осесимметричного течения [13, 14] записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при  $r = R_i - W^{(i)}$  выполняются условия прилипания жидкости [14]

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} = V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь  $t$  — время;  $r, x$  — цилиндрические координаты;  $V_r, V_x$  — проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости;  $U^{(i)}$  — продольное упругое перемещение оболочки по оси  $x$ ;  $W^{(i)}$  — прогиб оболочки, положительный к центру кривизны;  $R_1$  — внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2$  — внешний радиус внутренней оболочки ( $R_1 = R_2 + \delta$ );  $\delta$  — толщина слоя жидкости при кольцевом сечении трубы,  $i = 1$  относится к внешней, а  $i = 2$  относится к внутренней оболочке;  $p$  — давление в жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнения динамики физически нелинейной оболочки записываются в виде [15, 16]

$$\begin{aligned} \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \left[ U_x^{(i)} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ 1 \mp \frac{4m}{3E} \left[ \left( U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle_x - \\ - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x(i-1), \\ \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} W_{xxxx}^{(i)} - \frac{1}{R} \left( \mu_0 U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \times \right. \\ \times \left. \left[ 1 \pm \frac{4m}{3E} \left( \left( U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \right\rangle + \\ + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mu_0$  — коэффициент Пуассона,  $\rho_0$  — плотность материала оболочек;  $x$  — продольная координата. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_n &= \left[ P_{rr} \cos \left( \widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r} \right) + P_{rx} \cos \left( \widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}}, \\ q_x &= \left[ P_{rx} \cos \left( \widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r} \right) + P_{xx} \cos \left( \widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}}, \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \quad P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

В подходе Эйлера здесь имеем

$$\begin{aligned} \cos \left( \widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r} \right) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, \quad \cos \left( \widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}} \right) = -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\ \cos \left( \widehat{-\bar{n}, \bar{n}_r} \right) &= \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \left( \widehat{-\bar{n}, \bar{i}} \right) = -\frac{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}}{\left( 1 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ |\bar{N}| &= \left( R_i - W^{(i)} \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\bar{n}$  — нормаль к срединной поверхности  $i$ -й оболочки,  $\bar{n}_r, \bar{i}$  — орты базиса  $(r, \Theta, x)$  цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снять напряжения на невозмущённую поверхность оболочки, то можно считать  $-\bar{n} = \bar{n}_r$  и  $\cos \left( \widehat{-\bar{n}, \bar{n}_r} \right) = 1$ ,  $\cos \left( \widehat{-\bar{n}, \bar{i}} \right) = 0$ . Напряжения  $\tilde{q}_x, \tilde{q}_n$  со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке определяется теми же формулами (4), (5), в которых плотность жидкости  $\bar{\rho}$ , коэффициент кинематической вязкости  $\bar{\nu}$ .

## 2. Уравнения динамики оболочек

Принимая длину волны  $l$  за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения  $u_m$  и прогиба  $w_m$ , переходим к безразмерным переменным.

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}.$$

Здесь  $c_0$  — скорость звука в оболочке.

Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon).$$

Введём полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (6)$$

где  $c$  — неизвестная безразмерная скорость волны.

Разделим обе части 1-го уравнения (3) на  $\frac{1}{l} \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} = \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \frac{1}{l}$ , получим

$$\left\langle \frac{u_m}{l} \left[ u_{1\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \left( u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{1\xi}^{(i)} u_3^{(i)} + \frac{w_m^2 l^2}{u_m^2 R^{(i)2}} u_3^{(i)2} \right) \right\} \right\rangle_{\xi} - \\ - \frac{u_m}{l} \left( c^2 u_{1\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{1\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{1\tau\tau}^{(i)} \right) = - \frac{l(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разделим обе части 2-го уравнения (3) на  $\frac{1}{R^{(i)}} \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} = \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{R^{(i)}}$ , получим

$$\frac{u_m}{l} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} u_{3\xi\xi\xi\xi}^{(i)} + \left[ -\mu_0 u_{1\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 \pm \frac{4}{3} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \frac{m}{E} \left( u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{1\xi}^{(i)} u_3^{(i)} + \frac{w_m^2 l^2}{u_m^2 R^{(i)2}} u_3^{(i)2} \right) \right\} \right\rangle + \\ + \frac{w_m R^{(i)}}{l^2} \left( c^2 u_{3\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{3\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{3\tau\tau}^{(i)} \right) = R^{(i)} \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разложим упругие перемещения по степеням  $\varepsilon = u_m/l$ :

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots,$$

подставим их в уравнения, разделим обе части уравнений на  $\varepsilon = u_m/l$  и, оставляя члены  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , получим

$$\left( u_{10\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right)_{\xi} + \varepsilon \left\{ u_{11\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[ u_{10\xi}^{(i)3} - (1 + \mu_0) \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{10\xi}^{(i)} u_{30}^{(i)} \left( u_{10\xi}^{(i)} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right) - \mu_0 \left( \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \right)^3 u_{30}^{(i)3} \right] \right\}_{\xi} - \\ - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \varepsilon c^2 u_{11\xi\xi}^{(i)} + 2\varepsilon c u_{10\xi\tau}^{(i)} = - \frac{l^2(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}, \\ - \mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \left\langle -\mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[ \mu_0 u_{10\xi}^{(i)3} - (1 + \mu_0) \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{10\xi}^{(i)} u_{30}^{(i)} \left( u_{10\xi}^{(i)} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right) - \left( \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \right)^3 u_{30}^{(i)3} \right] \right\rangle + \\ + \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} c^2 u_{30\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при  $\varepsilon^0$ , будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{10\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} &= 0 \\ -\mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что  $\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}$ ,  $(1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0$ . Следовательно  $u_{10}$  — произвольная функция, а безразмерная скорость волны в замене координат (6) имеет значение  $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$ . Приравниваем коэффициенты при  $\varepsilon$  в правых и левых частях уравнений и учитываем предыдущие результаты, тогда получаем

$$\begin{aligned} \left[ \mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 - \mu_0 + \mu_0^2) u_{10\xi}^{(i)3} \right]_{\xi} + \\ + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\tau\xi}^{(i)} = -\frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)), \\ -\mu_0 u_{11\xi} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned}$$

Умножим обе части второго уравнения на  $\mu_0$ , продифференцируем по  $\xi$ , затем вычтем его из первого уравнения и разделим обе части полученного уравнения на  $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$ . В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} \mp \\ \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(i)2} u_{10\xi\xi}^{(i)} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \times \\ \times \left[ q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \left( \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

В случае, когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равна нулю, и получаются независимые модифицированные уравнения Кортвега де Вриза (МКдВ).

### 3. Определение напряжений действующих на оболочки со стороны жидкости

#### 3.1. Кольцевое сечение

Введём безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \\ p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{w_m}{R_2} = (1), \quad \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Во введённых безразмерных переменных получим уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left\{ \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \\ = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2(1+\psi_{r^*})} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\delta^2 v_r}{R_2^2(1+\psi_{r^*})^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right], \\ \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2(1+\psi_{r^*})} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}}, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\delta v_r}{R_2(1+\psi_{r^*})} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0 \end{aligned}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{l} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t^*} = v_x - \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*}, \\ - \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*} = v_r + \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \end{aligned}$$

при  $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$  и  $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$ .

Полагая теперь  $\delta/l = 0$ ,  $\delta/R_2 = 0$  (нулевое приближение по  $\delta/l$  — гидродинамическая теория смазки), а также  $\frac{\delta \delta c_0}{l \nu} = 0$  — ползущие течения, получим уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия:  $v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*}$ ,  $v_x = 0$  при  $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$  и  $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$ . Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\lambda$ , имеем

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots$$

Для первых членов разложения получим те же уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1; \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0.$$

С точностью до  $\psi$ ,  $\lambda$  получим

$$\cos(\widehat{-\vec{n}, \vec{n}_r}) \approx 1, \quad \cos(\widehat{-\vec{n}, \vec{i}}) \approx 0,$$

$$q_x^i = \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \left[ \frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial x^*} \right] \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\frac{w_m u_3^{(2)}}{\delta} \\ r_1^* = 1 - \frac{w_m}{\delta} u_3^{(1)}}} \approx \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\lambda u_3^{(2)} \\ r_1^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}}},$$

$$\begin{aligned} q_n &= -\frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P - p_0 + 2\rho\nu \frac{w_m c_0}{l\delta} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} \left( P - 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right) = \\ &= \left\{ \left( \frac{\delta}{l} \right)^2 = \psi_i^2 \varepsilon_i \right\} \approx -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P. \end{aligned}$$

Из уравнений движения жидкости получаем с учётом граничных условий

$$v_x^0 = \frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial P^0}{\partial x^*}. \quad (8)$$

Подставляя в уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = -\frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}. \quad (9)$$

Тогда, учитывая условия при  $r^* = 0$ , получаем

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{1}{2} \left( \frac{r^{*3}}{3} - \frac{r^{*2}}{2} \right) \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}. \quad (10)$$

Удовлетворяя условиям при  $r^* = 1$ , найдём

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}} &= 12 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right), \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = 12 \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ P^0 &= 12 \int \left[ \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*. \end{aligned}$$

При этом имеем

$$\begin{aligned} v_x^0 &= (r^{*2} - r^*) 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=1} &= 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=0} = 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*. \end{aligned}$$

В результате найдём

$$\begin{aligned} P^0 &= 12 \int \left[ \int \left( c \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - c \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(1)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} \right) d\xi \right] d\xi = \\ &= 12\sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_n = \frac{\rho_0 \nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi,$$

$$-\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho_0 \nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}).$$

Учитывая, что  $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$ , найдём

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho_0 \nu}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0 \mu_0} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} [u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)}],$$

$$q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i.$$

### 3.2. Круговое сечение

Рассматривая круговое сечение, введём безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r; V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x; r^* = \frac{r}{R_3}; t^* = \frac{c_0}{l} t; x^* = \frac{1}{l} x,$$

$$p = \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0; \frac{R_3}{l} = \psi = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}); \lambda = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon).$$

В этих переменных получим уравнения гидродинамики

$$\psi^2 \left\{ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial r^*} \right\} =$$

$$= \psi^2 \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right],$$

$$\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}};$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{v_r}{r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t} = v_x + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*}; -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t} = v_r + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*}$$

при  $r^* = 1 - \lambda u_3^{(2)}$ ;  $v_r, v_x$  – ограничены при  $r^* = 0$ :  $r^* \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = 0, r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} = 0$ .

Полагая теперь  $\psi = 0$  (нулевое приближение по  $\psi$  – гидродинамическая теория смазки [17]), а также  $\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} = 0$  – ползущие течения [18, 19], получаем уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0.$$

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\lambda$ :

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots,$$

для первых членов разложений получим те же уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \text{ при } r^* = 1; \quad r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \text{ при } r^* = 0.$$

Определим теперь в этих переменных напряжения со стороны жидкости на оболочке. С точностью до  $\lambda$ ,  $\psi$  имеем

$$\cos(\widehat{\bar{n}, \bar{n}_r}) = \frac{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left( 1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 1,$$

$$\cos(\widehat{\bar{n}, \bar{i}}) = -\frac{\lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left( 1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 0,$$

$$\tilde{q}_x = \tilde{\rho} \tilde{\nu} \frac{c_0 w_m}{R_3^2} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx \frac{w_m}{R_3} \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1},$$

$$\tilde{q}_n = \left[ -p_0 - \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 w_m l}{R_3^3} P + 2 \tilde{\rho} \tilde{\nu} \frac{w_m c_0}{l R_3} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx -p_0 - \frac{w_m}{R_3} \left( \frac{l}{R^{(2)}} \right) \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P.$$

Получаем

$$\tilde{q}_x = \lambda \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \quad \tilde{q}_n = -p_0 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P. \quad (11)$$

Решение уравнений гидродинамики легко получить (это классические уравнения гидродинамической теории смазки). Из уравнений движения имеем

$$v_x = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial P}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Здесь учтены граничные условия при  $r^* = 1$ ,  $r^* = 0$ .

Подставляя в уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^*) = -\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Тогда, учитывая условия при  $r^* = 0$ , получим

$$v_r = -\frac{r^*}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{1}{4} \left( \frac{r^{*3}}{4} - \frac{r^*}{2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Удовлетворяя граничным условиям при  $r^* = 1$ , найдём

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}} = 16 \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right].$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x^*} = 16 \int \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right] dx^* = 16 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right];$$

$$P = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] dx^*,$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \frac{\partial}{\partial t^*} 16 \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] \Big|_{r^*=1} = 8 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right].$$

Учитывая, что введены переменные (6), найдём с точностью до  $\varepsilon$  и с учётом связи (11)

$$P = 8 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} u_{10}^{(2)}.$$

При этом

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}.$$

Тогда учитывая, что  $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}$ , получаем

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = - \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{l} \left[ 1 - \left( 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}. \quad (12)$$

#### 4. Уравнения динамики с учётом наличия жидкости между оболочками и во внутренней оболочке

Система уравнений (7) с учётом найденной правой части (12) примет вид

$$u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(1)2} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \\ + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ 1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[ u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)} \right] = 0,$$

$$u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(2)2} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \\ + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ 1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[ u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)} \right] - 2(1 - 4\mu_0^2) \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{R c_0 \varepsilon} u_{10\xi}^{(2)} = 0.$$

Здесь с принятой точностью  $\frac{h_0}{R} \approx O(\varepsilon)$ ,  $\frac{\delta}{R_2} = \psi \ll 1$  обозначено  $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$ , при этом положено  $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$ . Можно также ввести обозначения  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3\phi^{(1)}$ ,  $u_{10\xi}^{(2)} = c_3\phi^{(2)}$ ,  $\eta = c_1\xi$ ,  $t = c_2\tau$ , где

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right] \frac{\nu}{\delta c_0}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$c_3 = \left[\frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l}\right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{c_3^2 c_1}{c_2}\right]^{-1} 6,$$

$$\sigma = \frac{1 - 4\mu_0^2}{3\mu_0^2} \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \frac{\tilde{\rho}\tilde{\nu}}{\rho\nu} \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right]^{-1}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \phi_t^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} \mp 6\phi^{(1)2} \phi_{\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} &= 0, \\ \phi_t^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} \mp 6\phi^{(2)2} \phi_{\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Система уравнений (13) имеет в качестве точного решения с верхним знаком – при  $6\phi^{(1)2} \phi_{\eta}^{(1)}$  и при  $\sigma = 0$  (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) следующее точное решение

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = k \tanh(k\eta + 2k^3 t). \quad (14)$$

## 5. Численное моделирование

В работах [20–22] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределённой системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом получается разностная схема, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования построения.

Запишем систему уравнений (13) в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(1)} \pm 2\phi^{(1)3}\right) dt + \phi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(1)} - \phi^{(2)}\right) dt d\eta &= 0, \\ \oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(2)} \pm 2\phi^{(2)3}\right) dt + \phi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)}\right) dt d\eta &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

для любой области  $\Omega$ . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим  $u_j^{(i)n} = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$  и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 2.

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{,\eta} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \quad \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta = u^{(i)}_{,\eta}(t, \eta_{j+2}) - u^{(i)}_{,\eta}(t, \eta_j). \quad (16)$$

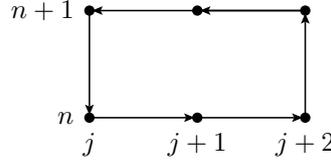


Рис. 2. Базовой контур для уравнения (15)

Используя для интегрирования по времени и первой производной по  $\eta$  формулу трапеций, а по второй производной по  $\eta$  формулу среднего значения и полагая  $t_{n+1} - t_n = \tau$ ,  $\eta_{j+1} - \eta_j = h$ , перепишем соотношения (15), (16) в виде

$$\begin{aligned} & \left( - \left( u_{\eta\eta j}^{(1)n} + u_{\eta\eta j}^{(1)n+1} - u_{\eta\eta j+2}^{(1)n} - u_{\eta\eta j+2}^{(1)n+1} \right) \pm \right. \\ & \pm 2 \left( u_j^{(1)3n} + u_j^{(1)3n+1} - u_{j+2}^{(1)3n} - u_{j+2}^{(1)3n+1} \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left( u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j+1}^{(1)n} \right) \cdot 2h + \\ & \left. + \left( \left( u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \left( u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( - \left( u_{\eta\eta j}^{(2)n} + u_{\eta\eta j}^{(2)n+1} - u_{\eta\eta j+2}^{(2)n} - u_{\eta\eta j+2}^{(2)n+1} \right) \pm \right. \\ & \pm 2 \left( u_j^{(2)3n} + u_j^{(2)3n+1} - u_{j+2}^{(2)3n} - u_{j+2}^{(2)3n+1} \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left( u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j+1}^{(2)n} \right) \cdot 2h + \\ & \left. + \left( \left( u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) - \left( u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \sigma \left( u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\left( u_{\eta j+1}^{(i)n} + u_{\eta j}^{(i)n} \right) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^{(i)n} - u_j^{(i)n}, \quad u_{\eta j+1}^{(i)n} \cdot 2h = u_{j+2}^{(i)n} - u_j^{(i)n}.$$

Поскольку пакет [21] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (13) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции  $F^{(i)} = \mp 2u^{(i)3}$ . За счёт выбора допустимого упорядочения так, чтобы  $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(1)}$ , а затем по переменным  $n, j$ , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера и структура базиса позволит проверить принадлежность искомой разностной схемы.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (13), аналогичную схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} + \\ & + \frac{\left( u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1} \right) + \left( u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n} \right)}{4h^3} \mp \\ & \mp 2 \frac{\left( u_{j+1}^{(1)3n+1} - u_{j-1}^{(1)3n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(1)3n} - u_{j-1}^{(1)3n} \right)}{4h} + \\ & + \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} + \\
& + \frac{(u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1}) + (u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n})}{4h^3} \mp \\
& \mp 2 \frac{(u_{j+1}^{(2)3n+1} - u_{j-1}^{(2)3n+1}) + (u_{j+1}^{(2)3n} - u_{j-1}^{(2)3n})}{4h} + \\
& + \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \sigma \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0.
\end{aligned}$$

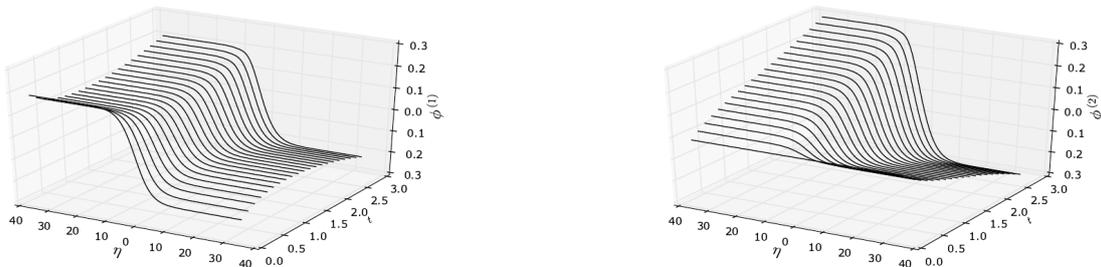
Полученные неявные разностные схемы имеют кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^3 = v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3.$$

Количество итераций для достижения точности  $10^{-12}$  на следующем временном слое, как правило, не превышало 2–3. Шаг по времени  $t$  брался равным половине шага по переменной  $\eta$ . Программа расчёта была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://scipy.org>).

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке, как показано в работе [10], возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой её не было в начальный момент времени, и амплитуды волн деформации в соосных оболочках со временем начинают совпадать. Эти амплитуды в два раза меньше исходной амплитуды волны деформации внешней оболочки в начальный момент времени.

Выполненные вычислительные эксперименты, показанные на рис. 3, позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации при значении параметра  $\sigma > 0$ .



**Рис. 3.** Графики численного решения уравнений (13) при  $\sigma = 0.7$  с начальным условием  $\phi^{(2)} = 0$  и с  $\phi^{(1)}$ , взятого из точного решения (14) при  $t = 0$  с  $k = 0.2$

Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим линейным ростом, при этом угол наклона амплитуды волны больше во внутренней оболочке. Наблюдается линейный синхронный рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном во внутренней оболочке.

## Литература

1. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Собр.соч. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — С. 149–171.

2. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58.
3. *Ерофеев В. И., Клюева Н.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. — 2002. — Т. 48, № 6. — С. 725–740.
4. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // РАН. Акустический журнал. — 2001. — Т. 47, № 3. — С. 359–363.
5. *Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН Акустический журнал. — 2000. — Т. 46, № 1. — С. 116–117.
6. *Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычислительная механика сплошных сред. — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 336–345. — ISSN 1999-6691.
7. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением / В. И. Ерофеев, А. И. Землянухин, В. М. Катсон, С. Ф. Шешенин // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2, № 4. — С. 67–75.
8. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость / А. Ю. Блинкова, С. В. Иванов, А. Д. Ковалев, Л. И. Могилевич // Известия Саратовского университета. Новая серия. Физика. — 2012. — Т. 12, № 2. — С. 12–18.
9. Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой / А. Ю. Блинкова, Ю. А. Блинков, С. В. Иванов, Л. И. Могилевич // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 193–202.
10. *Блинков Ю. А., Ковалева И. А., Могилевич Л. И.* Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2013. — Т. 3. — С. 42–51.
11. *Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И.* Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 184–197.
12. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Иностранная литература, 1961.
13. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003.
14. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. — Л.: ЛГУ, 1978. — С. 296.
15. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — С. 432.
16. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
17. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — С. 712.
18. *Попов И. Ю., Чивилихин С. А., Гусаров В. В.* Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой жидкости // Доклады РАН. — 2007. — Т. 412, № 2. — С. 201–203.
19. Солитон в стенке нанотрубки и стоково течение в ней / И. Ю. Попов, О. А. Родыгина, С. А. Чивилихин, В. В. Гусаров // Письма в ЖТФ. — 2010. — Т. 36, № 18. — С. 48–54.
20. *Блинков Ю. А., Гердт В. П.* Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. — 2008. — Т. 34, № 2. — С. 67–80.
21. *Gerdt V. P., Blinkov Y. A.* Involution and Difference Schemes for the Navier-Stokes Equations // CASC: 11th International Workshop, Kobe, Japan, Sept. 13–17, 2009.

Proceedings / Ed. by V. P. Gerdt, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. — Pp. 94–105.

22. On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier-Stokes Equations / P. Amodio, Y. Blinkov, V. Gerdt, R. La Scala // Computer Algebra in Scientific Computing: 15th International Workshop, CASC 2013, Berlin, Germany, September 9-13, 2013. Proceedings / Ed. by V. P. Gerdt, W. Koepf, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov. — Springer International Publishing, 2013. — Pp. 46–60.

UDC 532.516:539.3

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35

## Propagation of Nonlinear Waves in Coaxial Physically Nonlinear Cylindrical Shells Filled with a Viscous Fluid

Y. A. Blinkov\*, A. V. Mesyanzhin†, L. I. Mogilevich‡

\* *Saratov State University,*

*83, Astrahanskaya str., Saratov, Russian Federation, 410012*

† *Industrial Automatics Design Bureau JSC,*

*239, B. Sadovaya str., Saratov, Russian Federation, 410005*

‡ *Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,*

*77, Politekhnikeskaya str., Saratov, Russian Federation, 410054*

Investigation of deformation waves behavior in elastic shells is one of the important trends in contemporary wave dynamics. There exist mathematical models of wave motions in infinitely long geometrically non-linear shells, containing viscous incompressible liquid, based on the related hydroelasticity problems, which are derived by the shells dynamics and viscous incompressible liquid equations in the form of generalized KdV equations. Also, mathematical models of the wave process in infinitely long geometrically non-linear coaxial cylindrical elastic shells are obtained by means of disturbances method. These models differ from the known ones by the consideration of incompressible liquid presence between the shells, based on the related hydroelasticity problems. These problems are described by shells dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding edge conditions in the form of generalized KdV equations system. The paper presents the investigation of wave occurrences of two geometrically non-linear elastic coaxial cylindrical shells model of Kirchhoff-Love type, containing viscous incompressible liquid between them, as well as inside. The difference schemes of Crank-Nicholson type are obtained for the considered equations system by taking into account liquid impact and with the help of Gröbner bases construction. To generate these difference schemes, the basic integral difference correlations, approximating initial equations system, were used. The usage of Gröbner bases technology provides generating the schemes, for which it becomes possible to obtain discrete analogs of the laws of preserving initial equations system. To do this, equivalent transformations were made. On the basis of computation algorithm the complex of programs, permitting to construct graphs and obtain numerical solutions under exact solutions of coaxial shell dynamics equations system, was made.

**Key words and phrases:** nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell

## References

1. I. S. Gromeka, On the Theory of Fluid Motion in Narrow Cylindrical Tubes, in: Collected Works, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1952, pp. 149–171, in Russian.
2. A. I. Zemljanuhin, L. I. Mogilevich, Nonlinear Waves of Deformation in the Cylindrical Shells, Math. Universities. Applied Nonlinear Dynamics 3 (1) (1995) 52–58, in Russian.
3. V. I. Erofeev, Solitons and Nonlinear Periodic Strain Waves in Rods, Plates, and Shells (A Review), Acoustical Physics 48 (6) (2002) 643. doi:10.1134/1.1522030.

4. A. I. Zemlyanukhin, L. I. Mogilevich, Nonlinear Waves in Inhomogeneous Cylindrical Shells: A New Evolution Equation, *Acoustical Physics* 47 (3) (2001) 303–307. doi:10.1007/bf03353584.
5. G. A. Arshinov, A. I. Zemljaniuhin, L. I. Mogilevich, Two-Dimensional Solitary Waves in a Nonlinear Viscoelastic Deformable Medium, *RAS Acoustic Magazine* 46 (1) (2000) 116–117, in Russian.
6. A. Blinkova, Y. Blinkov, L. Mogilevich, Non-Linear Waves in Coaxial Cylinder Shells Containing Viscous Liquid Inside with Consideration for Energy Dispersion, *Comp. Contin. Mech.* 6 (3) (2013) 336–345. doi:10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
7. V. Erofejev, A. Zemlyanukhin, V. Catson, S. Sheshenin, Formation of strain solitary waves in the Cosserat continuum with restricted rotation, *Comp. Contin. Mech.* 2 (4) (2009) 67–75. doi:10.7242/1999-6691/2009.2.4.32.
8. A. J. Blinkova, S. V. Ivanov, A. D. Kovalev, L. I. Mogilevich, Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them, *Proceedings of Saratov University. New Ser. Ser. Physics* 12 (2) (2012) 12–18, in Russian.
9. A. Y. Blinkova, Y. A. Blinkov, S. V. Ivanov, L. I. Mogilevich, Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 15 (2) (2015) 193–202. doi:10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202.
10. J. A. Blinkov, I. A. Kovaleva, L. I. Mogilevich, Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically And Physically Nonlinear Shell Containing Viscous Incompressible Fluid in Between, *Bulletin of PFUR. Series Mathematics. Information Sciences. Physics.* 3 (2013) 42–51, in Russian.
11. Y. A. Blinkov, A. V. Mesyanzhin, L. I. Mogilevich, Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 16 (2) (2016) 184–197, in Russian. doi:10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
12. G. Kauderer, *Nonlinear Mechanics, Foreign Literature*, Moscow, 1961, in Russian.
13. L. G. Lojckanskij, *Fluid Mechanics*, Drofa, Moscow, 2003, in Russian.
14. S. V. Vallander, *Lectures on Hydromechanics*, L., Ed. LSU, 1978, in Russian.
15. A. S. Vol'mir, *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*, Nauka, Moscow, 1972, in Russian.
16. A. S. Vol'mir, *Skins in the Liquid and Gas Flow: Hydroelasticity Problem*, Nauka, Moscow, 1979, in Russian.
17. H. Schlichting, *The Theory of the Boundary Layer*, Nauka, Moscow, 1974, in Russian.
18. I. Y. Popov, S. A. Chivilihin, V. V. Gusarov, Dynamics of Electric Roller Nanotubes in a Viscous Fluid, *Reports of the Russian Academy of Sciences* 412 (2) (2007) 201–203, in Russian.
19. I. Y. Popov, O. A. Rodygina, S. A. Chivilihin, V. V. Gusarov, Soliton in a Nanotube Wall and Stokes Flow in the Nanotube, *Technical Physics Letters* 36 (9) (2010) 852–855. doi:10.1134/s1063785010090221.
20. Y. A. Blinkov, V. P. Gerdt, Specialized Computer Algebra System GINV, *Programming and Computer Software* 34 (2) (2008) 112–123. doi:10.1134/S0361768808020096.
21. V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov, *Involution and Difference Schemes for the Navier–Stokes Equations*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 94–105. doi:10.1007/978-3-642-04103-7\_10.
22. P. Amodio, Y. Blinkov, V. Gerdt, R. La Scala, *On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier-Stokes Equations*, Springer International Publishing, 2013, pp. 46–60. doi:10.1007/978-3-319-02297-0\_4.