УДК 537.8:514.762.37

Геометрический подход к лагранжеву и гамильтонову формализмам электродинамики

Д. С. Кулябов*†

* *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

† *Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия*

При решении полевых задач, в частности задач электродинамики, используются лагранжев и гамильтонов формализмы. Полевой гамильтонов формализм имеет то преимущество перед лагранжевым, что имманентно содержит калибровочное условие, в то время как в лагражевом формализме калибровочное условие вводится специально из некоторых внешних соображений. Однако использование гамильтонового формализма в полевых задачах затруднено из-за нерегулярности полевых лагранжианов. Необходимо использовать такой вариант лагранжевого и гамильтонового формализмов, который позволил бы работать с полевыми моделями, в частности решать задачи электродинамики.

В качестве математического аппарата предлагается использовать современную дифференциальную геометрию и алгебраическую топологию, в частности теорию расслоенных пространств. Этот аппарат приводит к большей ясности в понимании математических структур, ассоциированных с физическими и техническими моделями. Использование теории расслоенных пространств позволяет углубить и расширить как лагранжев, так и гамильтонов формализмы, выявить широкий спектр вариантов данных формализмов, выбрать вариант формализма, наиболее адекватный изучаемой проблеме. Фактически, только использование формализма расслоенных пространств позволяет адекватно решать полевые задачи, в частности задачи электродинамики.

Ключевые слова: расслоенные пространства, связность, лагранжев формализм, гамильтонов формализм, теория Янга–Миллса

1. Введение

Лагранжев и гамильтонов формализмы востребованы в механике и теории поля. Однако для работы с ними обычно используют классический математический аппарат, который не позволяет в полной мере использовать возможности данных формализмов. Более того, данный аппарат зачастую используется механически, что не позволяет осознать сильные и слабые стороны используемых формализмов, а также применить их к нестандартной ситуации. Например, вызывает затруднение применение гамильтонового подхода к полевым задачам. Автор предлагает пользоваться более современным математическим аппаратом, а именно теорией расслоений [1, 2]. Этот аппарат помогает глубже понять лагранжев и гамильтонов подходы [3], позволяет использовать их в новых областях. Например, более эффективно применять гамильтонов формализм в задачах теории поля [4, 5]. Данная работа рассматривается авторами как краткий конспект методов теории расслоенных пространств. В качестве иллюстрации к этим методам используется электродинамика.

2. Лагранжев формализм

Будем рассматривать расслоение:

$$\pi : Y \to X \tag{1}$$

с координатами (x^λ, y^i).

Статья поступила в редакцию 10 октября 2016 г.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008).

Тогда лагранжева плотность (лагранжиан первого порядка) будет определяться как

$$L = \mathcal{L}(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)\omega, \tag{2}$$

где $\omega := \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$.

При этом лагранжева плотность рассматривается как горизонтальная плотность на расслоении струй первого порядка:

$$L : J^1Y \to \overset{n}{\wedge} T^*X, \tag{3}$$

а многообразие струй J^1Y играет роль конфигурационного пространства.

Для лагранжиана L можно записать дифференциальный оператор второго порядка (оператор Эйлера–Лагранжа):

$$\mathcal{E}_L : J^2Y \underset{Y}{\to} \overset{n+1}{\wedge} T^*Y. \tag{4}$$

Также определим оператор Эйлера–Лагранжа первого порядка:

$$\mathcal{E}'_L = \left[\partial_i - \left(\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + y^i_{\mu\lambda}\right)\partial^\lambda_i\right] \mathcal{L}\, \mathrm{d}y^i \wedge \omega. \tag{5}$$

Он представляет собой дифференциальный оператор первого порядка на расслоении струй $J^1Y \to X$:

$$\mathcal{E}'_L : J^2Y \underset{J^1Y}{\to} \overset{n+1}{\wedge} T^*Y. \tag{6}$$

Можно выделить три типа уравнений, получаемых в лагранжевом формализме (уравнения Эйлера–Лагранжа):

– алгебраические уравнения Эйлера–Лагранжа. Эти уравнения записываются для сечения повторного расслоения струй:

$$J^1J^1Y \to J^1Y; \tag{7}$$

– уравнения Эйлера–Лагранжа первого порядка. Уравнения записываются для сечение расслоения струй:

$$J^1Y \to X; \tag{8}$$

– уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка. Уравнения записываются для сечение расслоения:

$$Y \to X. \tag{9}$$

Зададим на расслоении $J^1Y \to X$ лагранжеву связность $\bar\Gamma^i_{\mu\lambda} = \bar\Gamma^i_{\mu\lambda}(x^\nu, y^j, y^j_\nu)$:

$$\bar\Gamma = \mathrm{d}x^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + \bar\Gamma^i_{\mu\lambda}\partial^\mu_i\right). \tag{10}$$

Лагранжева связность принимает значения в ядре оператора Эйлера–Лагранжа первого порядка (5):

$$\mathcal{E}'_L \circ \bar\Gamma = 0. \tag{11}$$

Тогда алгебраические уравнения Эйлера–Лагранжа будут иметь вид:

$$\partial_i \mathcal{L} - \left(\partial_\lambda + y^j_\lambda \partial_j + \bar\Gamma^j_{\mu\lambda}\partial^\mu_j\right)\partial^\lambda_i \mathcal{L} = 0. \tag{12}$$

Это уравнения на компоненты лагранжевой связности.

Пусть $\bar{s}$ есть интегральное сечение расслоения связности (10) ($J^1Y \to X$). Оно принимает значение в ядре оператора (5) $\ker \mathcal{E}'_L$:

$$\mathcal{E}'_L \circ J^1\bar{s} = 0. \tag{13}$$

Тогда получим дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа первого порядка:

$$\partial_i \mathcal{L} - \Big(\partial_\lambda + \bar{s}^j_\lambda \partial_j + \partial_\lambda \bar{s}^j_\mu \partial^\mu_j\Big)\partial^\lambda_i \mathcal{L} = 0, \tag{14}$$

где $\bar{s}^i_\lambda := \partial_\lambda \bar{s}^i$. Уравнения (14) записаны для $\bar{s} = \bar{s}(x^\nu, y^j)$.

Рассмотрим вместо $\bar{s}$ сечение s расслоения $Y \to X$. Пусть его второе струйное продолжение J^2s принимает значения в ядре оператора (4) $\ker \mathcal{E}_L$:

$$\mathcal{E}_L \circ J^2 s = 0. \tag{15}$$

Тогда дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка будут иметь вид:

$$\partial_i \mathcal{L} - \big(\partial_\lambda + \partial_\lambda s^j \partial_j + \partial_\lambda \partial_\mu s^j \partial^\mu_j\big)\partial^\lambda_i \mathcal{L} = 0. \tag{16}$$

Уравнения (16) записаны для $s = s(x^\nu)$. Уравнения (14) и (16) эквивалентны.

3. Гамильтонов формализм

Можно выделить несколько вариантов гамильтонова формализма:

– стандартный симплектический гамильтонов формализм (при применении к полевым задачам стандартный формализм переходит в формализм Дирака для систем со связями);
– гамильтонов формализм де Дондера;
– многоимпульсный гамильтонов формализм (данный формализм является полисимплектическим вариантом стандартного гамильтонова формализма).

Для теории поля наиболее удобным представляется использование многоимпульсного гамильтонова формализма.

Для перехода к гамильтоновому формализму используют не лагранжиан, а его лепажев эквивалент. В формализме де Дондера и многоимпульсном формализме используют форму Пуанкаре–Картана:

$$\Xi_L = \pi^\lambda_i \, \mathrm{d}y^i \wedge \omega_\lambda - \pi^\lambda_i y^i_\lambda \omega + \mathcal{L}\omega, \tag{17}$$

где $\pi^\lambda_i := \partial^\lambda_i \mathcal{L}$, $\omega_\lambda := \partial_\lambda \rfloor \omega$.

Для расслоения $Y \to X$ введём расслоение Лежандра с атласом координат $(x^\lambda, y^i, p^\lambda_i)$:

$$\Pi = \overset{n}{\wedge} T^*X \underset{Y}{\otimes} TX \underset{Y}{\otimes} V^*Y. \tag{18}$$

Лагранжиан L задаёт послойный морфизм:

$$\hat{L} = J^1 \underset{Y}{\to} \Pi, \quad p^\lambda_i \circ \hat{L} = \pi^\lambda_i. \tag{19}$$

Многообразие Лежандра Π является фазовым пространством многоимпульсного гамильтонова формализма.

На расслоении Лежандра $\Pi \to Y$ вводится обобщённая форма Лиувилля:

$$\theta = -p^\lambda_i \, \mathrm{d}y^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \tag{20}$$

Ей соответствует полисимплектическая форма:

$$\Omega = \mathrm{d}p_i^\lambda \wedge \mathrm{d}y^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \tag{21}$$

В случае многообразия $X = \mathbb{R}$ эти формы переходят в стандартную форму Лиувилля и стандартную симплектическую форму.

Многоимпульсный гамильтониан может быть представлен как внешняя форма:

$$\mathrm{d}H = \gamma \lrcorner \Omega, \tag{22}$$

где γ — гамильтонова связность, то есть такая связность, для которой внешняя форма $\gamma \lrcorner \Omega$ — точная.

Многоимпульсный гамильтониан может быть представлен в форме

$$H = p_i^\lambda \,\mathrm{d}y^i \wedge \omega_\lambda - p_i^\lambda \Gamma_\lambda^i \omega - \tilde{\mathcal{H}}_\Gamma \omega = p_i^\lambda \,\mathrm{d}y^i \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H}\omega, \tag{23}$$

где Γ — связность на расслоении $Y \to X$.

Тогда можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda r^i(x) &= \partial_\lambda^i \mathcal{H}, \\ \partial_\lambda r_i^\lambda(x) &= -\partial_i \mathcal{H}. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь r — сечение расслоения $\Pi \to X$.

4. Калибровочный подход

Калибровочный подход используется для описания физических полей в рамках геометрической теории поля. Физические поля рассматриваются как сечениями расслоения $Y \to X$. На этом расслоении вводят связности и ковариантные производные ∇. На расслоении струй строят лагранжиан (3).

Будем рассматривать главное расслоение со структурной группой внутренних симметрий G:

$$\pi_P : P \to X. \tag{25}$$

Калибровочные потенциалы соответствуют группе внутренних симметрий G. Будем отождествлять их со связностями на главном расслоении P. Калибровочные потенциалы представляются глобальными сечениями A расслоения связностей $C = J^1P/G \to X$:

$$A_\mu^m := \big(k_\mu^m \circ A\big)(x). \tag{26}$$

На C задаются координаты $C = C(x^\mu, k_\mu^m)$.

Многообразие струй J^1C главного расслоения связностей C называется конфигурационным пространством калибровочных потенциалов с координатами $(x^\mu, k_\mu^m, k_{\mu\lambda}^m)$. Для J^1C существует расщепление:

$$J^1C = C_+ \underset{C}{\oplus} C_-. \tag{27}$$

Здесь

$$C_- = C \times \overset{2}{\wedge} T^*X \underset{X}{\otimes} V^GP, \tag{28}$$

где $V^GP := VP/G$.

Расслоение $C_+ \to C$ есть аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением:

$$\bar{C}_+ = \overset{2}{\vee} T^*X \underset{C}{\otimes} V^G P. \tag{29}$$

Координаты на этом расщеплении имеют следующий вид:

$$k^m_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(k^m_{\mu\lambda} + k^m_{\lambda\mu} + c^m_{nl} k^n_\lambda k^l_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(k^m_{\mu\lambda} - k^m_{\lambda\mu} - c^m_{nl} k^n_\lambda k^l_\mu\right), \tag{30}$$

где c^k_{mn} суть структурные константы алгебры Ли g_r группы G относительно базиса $\{I_m\}$.

Запишем каноническую сюрьекцию $\mathcal{S} = pr_1 : J^1C \to C_+$:

$$\mathcal{S}^m_{\lambda\mu} = k^m_{\mu\lambda} + k^m_{\lambda\mu} + c^m_{nl} k^n_\lambda k^l_\mu. \tag{31}$$

Запишем каноническую сюрьекцию $\mathcal{F} = pr_2 : J^1C \to C_-$:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^m_{\lambda\mu}\, \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \otimes I_m, \quad \mathcal{F}^m_{\lambda\mu} = k^m_{\mu\lambda} - k^m_{\lambda\mu} - c^m_{nl} k^n_\lambda k^l_\mu. \tag{32}$$

Введём величину $F := \mathcal{F} \circ J^1 A$. Тогда для неё получим:

$$F^m_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A^m_\mu - \partial_\mu A^m_\lambda - c^m_{nl} A^n_\lambda A^l_\mu. \tag{33}$$

На конфигурационном пространстве J^1C задаётся лагранжиан Янга–Миллса. Для простоты рассмотрим свободный лагранжиан Янга–Миллса (при отсутствии источников):

$$L_{YM} = \frac{1}{4\varepsilon^2} {}^G a_{mn} g^{\lambda\mu} g^{\beta\nu} \mathcal{F}^m_{\lambda\beta} \mathcal{F}^n_{\mu\nu} \sqrt{|g|}\omega, \tag{34}$$

где ${}^G a_{mn}$ — невырожденная G-инвариантная метрика на алгбре Ли g_r, ε — константа взаимодействия, $g_{\lambda\mu}$ и $g^{\lambda\mu}$ — метрика в касательном (TX) и кокасательном (T^*X) расслоениях над X, $g := \det\{g_{\lambda\mu}\}$.

5. Электромагнитное поле

Опишем структуру калибровочного подхода для электромагнитного поля. Будем рассматривать электромагнитное поле на многообразии X^4. Группой внутренних симметрий G является группа $U(1)$.

Главное расслоение:

$$\pi_P : P \to X^4. \tag{35}$$

Сопряжённое расслоение изоморфно тривиальному расслоению:

$$V^G P = X^4 \times \mathbb{R}. \tag{36}$$

Расслоение связностей изоморфно аффинному кокасательному расслоению:

$$C \cong T^*X^4. \tag{37}$$

Из (33) запишем напряжённость электромагнитного поля:

$$F_{\mu\lambda} = \mathcal{F}_{\mu\lambda} \circ J^1 A = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda. \tag{38}$$

Для пространства Минковского ($X^4 = M^4$) с метрикой $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ из (34) получим лагранжиан свободного электромагнитного поля:

$$L = -\frac{1}{16\pi c}\eta^{\lambda\mu}\eta^{\beta\nu}\mathcal{F}_{\lambda\beta}\mathcal{F}_{\mu\nu}\omega. \tag{39}$$

Фазовым пространством будет являться расслоение Лежандра с координатами $(X^\lambda, k_\mu, p^{\mu\lambda})$:

$$\Pi = \left(\overset{4}{\wedge} T^*X \otimes TX \otimes TX\right) \underset{X}{\times} C. \tag{40}$$

Ассоциированный с лагранжианом лежандров морфизм запишется следующим образом:

$$p^{(\mu\lambda)} \circ \hat{L} = 0; \tag{41}$$

$$p^{[\mu\lambda]} \circ \hat{L} = -\frac{1}{4\pi c}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}. \tag{42}$$

Многоимпульсный гамильтониан принимает вид:

$$H = p^{\mu\lambda}\,\mathrm{d}k_\mu \wedge \omega_\lambda - p^{\mu\lambda}S_{\mu\lambda}\omega - \tilde{H}\omega, \tag{43}$$

$$S_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu), \tag{44}$$

$$\tilde{H} = -\pi\eta_{\mu\alpha}\eta_{\lambda\beta}p^{[\mu\lambda]}p^{\alpha\beta}. \tag{45}$$

Этому гамильтониану соответствуют следующие уравнения Гамильтона:

$$\partial_\lambda r^{\mu\lambda} = 0, \tag{46}$$

$$\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r^\lambda = \partial_\lambda A_\mu + \partial_\mu A_\lambda. \tag{47}$$

6. Заключение

Автором сделана выжимка материалов по геометрическому подходу к лагранжеву и гамильтонову формализмам на основе расслоенных пространств. Применение данного подхода продемонстрировано на примере электромагнитного поля в представлении поля Янга–Миллса.

Литература

1. *Saunders D. J.* The Geometry of Jet Bundles. — Cambridge University Press, 1989.
2. *Vargas J. G.* Differential Geometry for Physicists and Mathematicians. — World Scientific Publishing Company, 2014.
3. *Giachetta G., Mangiarotti L., Sardanashvily G.* Advanced Classical Field Theory. — Singapore: World Scientific Publishing Company, 2009.
4. *Sardanashvily G.* Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. — Singapore: World Scientific Publishing Company, 1995.
5. *Giachetta G., Mangiarotti L., Sardanashvily G.* Covariant Hamilton Equations for Field Theory // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1999. — Vol. 32, No 38. — Pp. 6629–6642.

UDC 537.8:514.762.37

A Geometric Approach to the Lagrangian and Hamiltonian Formalism of Electrodynamics

D. S. Kulyabov*†

* *RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*

† *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow region, Russia*

In solving field problems, in particular problems of electrodynamics, we commonly use the Lagrangian and Hamiltonian formalisms. Hamiltonian formalism of field theory has the advantage over the Lagrangian, which inherently contains a gauge condition. While the gauge condition is introduced ad hoc from some external reasons in the Lagrangian formalism. However, the use of the Hamiltonian formalism in the field theory is difficult due to the non-regularity of the field Lagrangian. We must use such variant of the Lagrangian and the Hamiltonian formalism, which would allow us to work with the field models, in particular, to solve the problem of electrodynamics.

We suggest using the modern differential geometry and the algebraic topology, in particular the theory of fiber bundles, as a mathematical apparatus. This apparatus leads to greater clarity in the understanding of mathematical structures, associated with physical and technical models. Using the fiber bundles theory allows us to deepen and expand both the Lagrangian and the Hamiltonian formalism. We can detect a wide range of these formalisms. We can select the most appropriate formalism. Actually just using the fiber bundles formalism we can adequately solve the problems of the field theory, in particular the problems of electrodynamics.

Key words and phrases: fiber bundles, connectivity, Lagrangian formalism, Hamiltonian formalism, Yang–Mills theory

References

1. D. J. Saunders, The Geometry of Jet Bundles, Cambridge University Press, 1989. doi:10.1017/CBO9780511526411.
2. J. G. Vargas, Differential Geometry for Physicists and Mathematicians, World Scientific Publishing Company, 2014.
3. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Advanced Classical field theory, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2009.
4. G. Sardanashvily, Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1995.
5. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Covariant Hamilton Equations for Field Theory, Journal of Physics A: Mathematical and General 32 (38) (1999) 6629–6642. doi:10.1088/0305-4470/32/38/302.

© Кулябов Д. С., 2016