Математическое моделирование

УДК 519.624.2

Аппроксимация решения краевых задач локально-кубическим сплайном

Т. Жанлав[*], Р. Мижиддорж[†]

[*] *Монгольский государственный университет, г. Улан-Батор, Монголия*

[†] *Государственный университет образования, г. Улан-Батор, Монголия*

Построен явный локально-кубический сплайн для аппроксимации гладких функций и рассмотрены его аппроксимативные свойства. Предложена сплайн-схема для численного решения краевых задач, основанная на свойствах локально-кубического сплайна и обычного коллокационного кубического сплайна. Схема реализуется путём последовательного решения двух трёхдиагональных систем, отличающихся друг от друга лишь правой частью, что позволяет использовать метод трёхточечной прогонки. Это свидетельствует о том, что данный алгоритм является эффективным, количество операций линейно зависит от числа узлов сетки. Доказано, что построенный сплайн обладает такими же аппроксимативными свойствами, что и локально-кубический сплайн. Таким образом, в данной работе фактически рассматриваются вопросы аппроксимации решений краевых задач. Предложенная схема позволяет найти решение краевой задачи и его первую и вторую производные в узлах равномерной сетки с точностью четвёртого порядка по шагу сетки. Теоретические выводы подтверждены численными экспериментами. Благодаря хорошим аппроксимативным свойствам и простоте алгоритма реализации предложенный метод может быть применён для численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые часто встречаются как в математике, физике, так и в области естественных и инженерных наук.

Ключевые слова: краевые задачи, кубический сплайн, повышенная точность

1. Введение

Пусть требуется найти решение краевой задачи

$$Lu \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

$$\begin{aligned} e_1 y(a) &\equiv \theta_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \\ e_2 y(b) &\equiv \theta_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ достаточно гладкие функции, причём $q(x) < 0$ на $[a,b]$.

Постоянные в краевых условиях (2) заданы, и $\theta_i \geqslant 0$, $\beta_1 \leqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$. В дальнейшем мы считаем, что решение задачи (1), (2) существует и единственно, и оно является достаточно гладким. Для численного решения задачи (1), (2) введена на $[a,b]$ равномерная сетка $\Delta_N = \{x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = \frac{b-a}{N}\}$. Ищем решение задачи (1), (2) в виде кубических сплайнов класса $C^2[a,b]$, т.е.

$$y(x) \approx S(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j B_j(x), \tag{3}$$

где $B_j(x)$ — нормализованные кубические B-сплайны [1].

Статья поступила в редакцию 27 января 2016 г.

Работа выполнена в рамках гранта SST_007/2015 фонда науки и технологии Монголии.

Для использования B-представления (3) предполагается, что дополнена равномерная сетка Δ_N с точками

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0, \quad x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}. \tag{4}$$

Хорошо известный метод сплайн-коллокации

$$\begin{gathered} LS(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \\ e_1 S(a) = \gamma_1, \quad e_2 S(b) = \gamma_2, \end{gathered} \tag{5}$$

даёт систему [1]

$$A_i \alpha_{i-1} - C_i \alpha_i + B_i \alpha_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{6a}$$

$$\begin{gathered} (\theta_1 h - 3\beta_1)\alpha_{-1} + 4h\theta_1\alpha_0 + (\theta_1 h + 3\beta_1)\alpha_1 = 6h\gamma_1, \\ (\theta_2 h - 3\beta_2)\alpha_{N-1} + 4h\theta_2\alpha_N + (\theta_2 h + 3\beta_2)\alpha_{N+1} = 6h\gamma_2, \end{gathered} \tag{6b}$$

где

$$A_i = -\frac{h}{2} p_i + \frac{h^2}{6} q_i, \quad C_i = 2 - \frac{2}{3} h^2 q_i, \quad B_i = 1 + \frac{h}{2} p_i + \frac{h^2}{6} q_i.$$

Система (6) имеет единственное решение при достаточно малом h и решается методом трёхточечной прогонки. Для коллокационного сплайна справедливы [1]

$$S_i^{(r)} - y_i^{(r)} = O(h^2), \quad r = 0, 1, 2, \quad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{7a}$$

Благодаря аппроксимативному свойству (7a) и простоте алгоритма построения метод сплайн-коллокации, как и метод конечных разностей, часто применяется на практике. В работе [2] была доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $r(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ в уравнении* (1) *достаточно гладкие функции. Тогда для коллокационного кубического сплайна, удовлетворяющего уравнению* (5), *справедливы соотношения*

$$\Delta^2 S_i'' = y_i^{IV} + O(h^2), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{7b}$$

где

$$\Delta^2 S_i'' = \frac{1}{h^2} \begin{cases} S_{i+1}'' - 2S_i'' + S_{i-1}'', & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ 2S_0'' - 5S_1'' + 4S_2'' - S_3'', & i = 0, \\ 2S_N'' - 5S_{N-1}'' + 4S_{N-2}'' - S_{N-3}'', & i = N. \end{cases} \tag{7c}$$

Следует отметить, что в работах [3,4] на основе использования свойств квази-интерполяционных кубических сплайнов построены также сплайн-схемы повышенной точности для решения краевых задач (1), (2).

В последнее время появились много работ, в которых применён локально-кубический сплайн в численном анализе [5–7], особенно в построении явных схем для численного решения различных нелинейных уравнений в частных производных [8,9]. В данной работе построен локально-кубический сплайн для решения краевой задачи (1), (2) и получены схемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, которые дают тот же порядок аппроксимации и для решения и для его производных первого и второго порядка на узлах сетки.

2. Локально-кубический сплайн для решения краевой задачи

Пусть решение краевой задачи (1), (2) известно, и построим для него локально-кубический сплайн. В работе [5] был предложен локально-кубический сплайн

$$\hat{S}(\alpha) = \sum_{j=-1}^{N+1} \hat{\alpha}_j B_j(x), \tag{8}$$

где

$$\hat{\alpha}_k = y_k + \frac{1}{3(h_k + h_{k-1})} \left(h_k^2 \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - h_{k-1}^2 \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \right), \quad k = 1, \dots, N-1, \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_0 &= y_0 + \frac{h_0 - h_{-1}}{3} y_0' - \frac{h_0 h_{-1}}{6} y_0'', \\ \hat{\alpha}_{-1} &= y_0 - \omega h_0 y_0' + \frac{h_0^2 \omega^2}{3} y_0'', \end{aligned} \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_N &= y_N + \frac{h_N - h_{N-1}}{3} y_N' - \frac{h_N h_{N-1}}{6} y_N'', \\ \hat{\alpha}_{N+1} &= y_N + \omega h_{N-1} y_N' + \frac{h_{N-1}^2 \omega^2}{3} y_N''. \end{aligned} \tag{9c}$$

Здесь $h_k = x_{k+1} - x_k$, ($h_{-2} = h_{-1} = \omega h_0$, $h_{N+1} = h_N = \omega h_{N-1}$), и $\omega > 0$ – заданный параметр.

Показано, что данный локально-кубический сплайн обладает таким же аппроксимативным свойством, как и интерполяционный кубический сплайн. В случае равномерной сетки формулы (9) принимают вид

$$\hat{\alpha}_k = \frac{-y_{k-1} + 8y_k - y_{k+1}}{6}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \tag{10a}$$

$$\hat{\alpha}_0 = y_0 - \frac{h^2}{6} y_0'', \quad \hat{\alpha}_N = y_N - \frac{h^2}{6} y_N'', \tag{10b}$$

$$2\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{-1} = 3y_0 - hy_0', \quad 2\hat{\alpha}_N + \hat{\alpha}_{N+1} = 3y_N + hy_N'. \tag{10c}$$

Для аппроксимации производных в (10b) и (10c) мы используем формулы

$$\begin{aligned} y_0' &= \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) + O(h^3), \\ y_N' &= \frac{1}{6h} (11y_N - 18y_{N-1} + 9y_{N-2} - 2y_{N-3}) + O(h^3), \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} y_0'' &= \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + O(h^2), \\ y_N'' &= \frac{1}{h^2} (2y_N - 5y_{N-1} + 4y_{N-2} - y_{N-3}) + O(h^2), \end{aligned} \tag{11b}$$

которые справедливы при условии $y(x) \in C^4[a, b]$.

В результате подстановки (11) в (10b) и (10c) мы находим $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_N$, $2\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{-1}$ и $2\hat{\alpha}_N + \hat{\alpha}_{N+1}$ с точностью $O(h^4)$, и это не снижает точность локально-кубического сплайна. Таким образом, мы построили на равномерной сетке полностью локально-кубический сплайн, в котором коэффициенты определяются формулами:

$$
\begin{gathered}
\hat{\alpha}_k = \frac{-y_{k-1} + 8y_k - y_{k+1}}{6}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \\
\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{6}(4y_0 + 5y_1 - 4y_2 + y_3), \quad \hat{\alpha}_N = \frac{1}{6}(4y_N + 5y_{N-1} - 4y_{N-2} + y_{N-3}), \\
\hat{\alpha}_{-1} = \frac{1}{6}(21y_0 - 28y_1 + 17y_2 - 4y_3), \\
\hat{\alpha}_{N+1} = \frac{1}{6}\left(21y_N - 28y_{N-1} + 17y_{N-2} - 4y_{N-3}\right).
\end{gathered} \tag{12}
$$

Отметим, что в работе [6] положили $h_{-2} = h_{-1} = h_{N+1} = h_N = 0$, что соответствует $\omega = 0$. Тогда формулы (9b), (9c) приобретают вид

$$
\hat{\alpha}_{-1} = y_0, \quad \hat{\alpha}_0 = y_0 + \frac{h}{3}y_0', \quad \hat{\alpha}_{N+1} = y_N, \quad \hat{\alpha}_N = y_N - \frac{h}{3}y_N'. \tag{13}
$$

Если использовать формулу (11a) в последних равенствах, то получим локально-кубический сплайн, полученный в [6], в котором базисные B_j-сплайны отличны от нуля на интервале (x_j, x_{j+4}). В отличие от (12) коэффициенты локально-кубического сплайна определяются формулами:

$$
\begin{gathered}
\hat{\alpha}_k = \frac{-y_{k-1} + 8y_k - y_{k+1}}{6}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \\
\hat{\alpha}_{-1} = y_0, \quad \hat{\alpha}_0 = \frac{7y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{18}, \\
\hat{\alpha}_{N+1} = y_N, \quad \hat{\alpha}_N = \frac{7y_N + 18y_{N-1} - 9y_{N-2} + 2y_{N-3}}{18}.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Для локально-кубического сплайна (8) с коэффициентами, заданными формулой (12), имеют места соотношения:

$$
\begin{gathered}
\hat{S}''(x_0) = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3), \quad \hat{S}''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \\
\hat{S}''(x_i) = \frac{1}{6h^2}(-y_{i-2} + 10y_{i-1} - 18y_i + 10y_{i+1} - y_{i+2}), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\
\hat{S}''(x_N) = \frac{1}{h^2}(2y_N - 5y_{N-1} + 4y_{N-2} - y_{N-3}), \\
\hat{S}''(x_{N-1}) = \frac{1}{h^2}(y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2});
\end{gathered} \tag{15}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{S}'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3), \quad \hat{S}'(x_1) = \frac{1}{6h}(2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3), \\
\hat{S}'(x_i) = \frac{1}{12h}(y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i-2}), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\
\hat{S}'(x_{N-1}) = \frac{1}{6h}(2y_N + 3y_{N-1} - 6y_{N-2} + y_{N-3}), \\
\hat{S}'(x_N) = \frac{1}{6h}(11y_N - 18y_{N-1} + 9y_{N-2} - 2y_{N-3})
\end{gathered} \tag{16}
$$

и

$$\hat{S}(x_i) = \frac{1}{36}(-y_{i-2} + 4y_{i-1} + 30y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}), \quad i = 2, 3, \ldots, N-2,$$
$$\hat{S}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, N-1, N. \tag{17}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $y(x) \in C^6[a,b]$. Тогда для локально-кубического сплайна, аппроксимируюшего функцию $y(x)$, справедливы соотношения*

$$\hat{S}(x_i) = y_i - \frac{h^4}{36}y_i^{IV} + O(h^6), \quad i = 2, 3, \ldots, N-2, \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \hat{S}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, N-1, N, \\ \hat{S}'(x_i) = y_i' + O(h^4), \quad i = 2, 3, \ldots, N-2, \\ \hat{S}'(x_0) = y_0' + \frac{h^3}{4}y_0^{IV} + O(h^4), \\ \hat{S}'(x_1) = y_1' - \frac{h^3}{12}y_1^{IV} + O(h^4), \\ \hat{S}'(x_N) = y_N' + \frac{h^3}{4}y_N^{IV} + O(h^4), \\ \hat{S}'(x_{N-1}) = y_{N-1}' - \frac{h^3}{12}y_{N-1}^{IV} + O(h^4) \end{gathered} \tag{19}$$

и

$$\begin{gathered} \hat{S}''(x_i) = y_i'' - \frac{h^2}{12}y_i^{IV} + O(h^4), \quad i = 2, 3, \ldots, N-2, \\ \hat{S}''(x_0) = y_0'' + \frac{h^2}{12}y_0^{IV} - h^2 y_1^{IV} + O(h^4), \\ \hat{S}''(x_1) = y_1'' + \frac{h^2}{12}y_1^{IV} + O(h^4), \\ \hat{S}''(x_{N-1}) = y_{N-1}'' + \frac{h^2}{12}y_N^{IV} + O(h^4), \\ \hat{S}''(x_N) = y_N'' + \frac{h^2}{12}y_N^{IV} - h^2 y_{N-1}^{IV} + O(h^4). \end{gathered} \tag{20}$$

Доказательство. Формулы (18), (19) и (20) непосредственно проверяются с учётом (13), (14), (15) и $y(x) \in C^6[a,b]$. □

3. Аппроксимация решения краевых задач кубическим сплайном

Чтобы построить кубический сплайн, аппроксимирующий решения краевой задачи (1), (2) мы используем теорему 1. Согласно формул (19) и (20) имеем

$$\hat{S}_0'' + p_0\hat{S}_0' + q_0\hat{S}_0 = f_0 + \frac{h^2}{12}(1 - 3hp_0)y_0^{IV} - h^2 y_1^{IV} + O(h^4),$$

$$\hat{S}_1'' + p_1\hat{S}_1' + q_1\hat{S}_1 = f_1 + \frac{h^2}{12}(1 - hp_1)y_1^{IV} + O(h^4),$$

$$\hat{S}_i'' + p_i\hat{S}_i' + q_i\hat{S}_i = f_i - \frac{h^2}{12}y_i^{IV} + O(h^4), \quad i = 2, 3, \dots, N-2,$$

$$\hat{S}_{N-1}'' + p_{N-1}\hat{S}_{N-1}' + q_{N-1}\hat{S}_N = f_{N-1} + \frac{h^2}{12}(1 - hp_{N-1})y_{N-1}^{IV} + O(h^4),$$

$$\hat{S}_N'' + p_N\hat{S}_N' + q_N\hat{S}_N = f_N + \frac{h^2}{12}(1 - 3hp_N)y_N^{IV} - h^2y_{N-1}^{IV} + O(h^4).$$

Эти уравнения можно записать в единообразном виде:

$$\hat{S}_i'' + p_i\hat{S}_i' + q_i\hat{S}_i = f_i - \frac{h^2}{12}D_i + O(h^4), \tag{21}$$

где

$$D_i = \begin{cases} -(1 - 3hp_0)y_0^{IV} + 12y_1^{IV}, & i = 0, \\ -(1 - hp_1)y_1^{IV}, & i = 1, \\ y_i^{IV}, & i = 2, 3, \dots, N-2 \\ -(1 - hp_{N-1})y_{N-1}^{IV}, & i = N-1, \\ -(1 - 3hp_N)y_N^{IV} + 12y_{N-1}^{IV}, & i = N. \end{cases} \tag{22}$$

Согласно лемме 1 можно заменить y_i^{IV} в (22) через (7b) без потери точности. В результате мы имеем

$$\hat{S}_i'' + p_i\hat{S}_i' + q_i\hat{S}_i = f_i - \frac{h^2}{12}\hat{D}_i + O(h^4), \quad i = 0, 1, \dots, N, \tag{23}$$

где

$$\hat{D}_i = \begin{cases} -(1 - 3hp_0)\Delta^2 S_0'' + 12\Delta^2 S_1'', & i = 0, \\ -(1 - hp_1)\Delta^2 S_1'', & i = 1, \\ \Delta^2 S_i'', & i = 2, 3, \dots, N-2, \\ -(1 - hp_{N-1})\Delta^2 S_{N-1}'', & i = N-1, \\ -(1 - 3hp_N)\Delta^2 S_N'' + 12\Delta^2 S_{N-1}'', & i = N. \end{cases} \tag{24}$$

Пренебрегая $O(h^4)$ членами в (23), мы приходим

$$\tilde{S}_i'' + p_i\tilde{S}_i' + q_i\tilde{S}_i = f_i - \frac{h^2}{12}\hat{D}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \tag{25}$$

Таким образом, построение кубического сплайна, аппроксимируюшего решения краевой задачи (1), (2), сводится к последовательному решению задач (5) и (25), т.е. сначала строится коллокационный кубический сплайн $S(x)$, удовлетворяющий уравнению (5). Потом строится сплайн $\tilde{S}(x)$, удовлетворяющий уравнению (25) и краевому условию

$$e_1\tilde{S}_0 = \tilde{\gamma}_1, \quad e_2\tilde{S}_N = \tilde{\gamma}_2, \tag{26}$$

где

$$\hat{\gamma}_1 = \gamma_1 + \frac{h\beta_1}{4}\Delta^2 S_0'', \quad \hat{\gamma}_2 = \gamma_2 + \frac{h\beta_2}{4}\Delta^2 S_N''.$$

Задача (25) отличается от задачи (5) лишь правой частью. Из Леммы 1.1 и Теоремы 2.1 непосредственно вытекает

Следствие. Справедливы соотношения:

$$
\begin{aligned}
y_0^{'} &= \tilde{S}_0^{'} - \frac{h^3}{4}\Delta^2 S_0'' + O(h^4),\\
y_1' &= \tilde{S}_1' + \frac{h^3}{12}\Delta^2 S_1'' + O(h^4),\\
y_i' &= \tilde{S}_i' + O(h^4), \quad i = 2, \ldots, N-2,\\
y_{N-1}' &= \tilde{S}_{N-1}' + \frac{h^3}{12}\Delta^2 S_{N-1}'' + O(h^4),\\
y_N' &= \tilde{S}_N' - \frac{h^3}{4}\Delta^2 S_N'' + O(h^4),
\end{aligned}
\tag{27a}
$$

$$
\begin{aligned}
y_0'' &= \tilde{S}_0'' + \frac{10S_0'' - 19S_1'' + 8S_2'' + S_3''}{12} + O(h^4),\\
y_1'' &= \tilde{S}_1'' - \frac{h}{12}\Delta^2 S_1'' + O(h^4),\\
y_i'' &= \tilde{S}_i'' + \frac{h^2}{12}\Delta^2 S_i'' + O(h^4), \quad i = 2, 3, \ldots, N-2,\\
y_{N-1}'' &= \tilde{S}_{N-1}'' - \frac{h^2}{12}\Delta^2 S_{N-1}'' + O(h^4),\\
y_N'' &= \tilde{S}_N'' + \frac{10S_N'' - 19S_{N-1}'' + 8S_{N-2}'' + S_{N-3}''}{12} + O(h^4),
\end{aligned}
\tag{27b}
$$

$$
y_i = \tilde{S}_i + O(h^4), \quad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{27c}
$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Для построенного сплайна* $\tilde{S}(x)$ *справедливы соотношения* (18), (19) *и* (20).

Доказательство. Пусть $\tilde{S}(x)$ удовлетворяет (25) вместе соответствующими краевыми условиями. Используя Лемму 1.1, запишем (25) в виде

$$
\tilde{S}_i'' - y_i'' - \frac{h^2}{12}y_i^{IV} + h^2 y_{i\pm1}^{IV} + p_i(\tilde{S}_i' - y_i' - \frac{h^3}{4}y_i^{IV}) + q_i(\tilde{S}_i - y_i) = O(h^4), \quad i = 0, N, \tag{28a}
$$

$$
\tilde{S}_i'' - y_i'' - \frac{h^2}{12}y_i^{IV} + p_i(\tilde{S}_i' - y_i' + \frac{h^3}{12}y_i^{IV}) + q_i(\tilde{S}_i - y_i) = O(h^4), \quad i = 1, N-1, \tag{28b}
$$

$$
\tilde{S}_i'' - y_i'' + \frac{h^2}{12}y_i^{IV} + p_i(\tilde{S}_i' - y_I') + q_i(\tilde{S}_i - y_i) = O(h^4), \quad i = 2, 3, \ldots, N-2. \tag{28c}
$$

В уравнении (28a) знак $+\,(-)$ соответствует случаю $i = 0$ $(i = N)$. Теперь вычтем уравнения (28) из уравнений (23). В результате мы имеем

$$
\begin{aligned}
(\hat{S} - \tilde{S})_i'' + p_i(\hat{S} - \tilde{S})_i + q_i(\hat{S} - \tilde{S})_i = O(h^4), \quad i = 0, 1, \ldots, N,\\
e_1(\hat{S} - \tilde{S})_0 = 0, \quad e_2(\hat{S} - \tilde{S})_N = 0.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Обозначим

$$
\hat{S} - \tilde{S} = \sum_{j=-1}^{N+1} d_j B_j(x), \quad d_j = \hat{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_j. \tag{30}
$$

В терминах коэффициентов d_j уравнения (27) записывается в виде

$$\begin{cases} A_i d_{i-1} - C_i d_i + B_i d_{i+1} = O(h^6), \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ (\theta_1 h - 3\beta_1) d_{-1} + 4h\theta_1 d_0 + (\theta_1 h + 3\beta_1) d_1 = 0, \\ (\theta_2 h - 3\beta_2) d_{N-1} + 4h\theta_2 d_N + (\theta_2 h + 3\beta_2) d_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{29'}$$

Матрица системы (29') имеет диагональное преобладание:

$$C_i - A_i - B_i = -\frac{h^2}{3} q_i > 0 \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Следовательно, система (29') имеет единственное решение и имеет место

$$d_i = O(h^4), \quad i = -1, 0, 1, \dots, N, N+1. \tag{31}$$

Из (30), с учётом (31), имеем

$$\hat{S}(x) - \tilde{S}(x) = O(h^4), \quad \forall x \in [a, b]. \tag{32}$$

С учётом (18) и (32) мы приходим

$$\tilde{S}_i - y_i = \tilde{S}_i - \hat{S}_i + \hat{S}_i - y_i = O(h^4), \quad i = 0, 1, \dots, N \tag{33a}$$

т.е. формула (18) справедлива $O(h^4)$. Из (28c) и (33a) следует, что

$$\left(\tilde{S}_i'' - y_i'' + \frac{h^2}{12} y_i^{IV}\right) + p_i(\tilde{S}_i' - y_i') = O(h^4), \quad i = 2, 3, \dots, N-2. \tag{33b}$$

Далее, из (30) и (31), получаем

$$\begin{gathered} \hat{S}_i' - \tilde{S}_i' = \frac{d_{i+1} - d_{i-1}}{2h} = O(h^3), \\ \hat{S}_i'' - \tilde{S}_i'' = \frac{d_{i+1} - 2d_i + d_{i-1}}{h^2} = O(h^2) \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{gathered} \tag{34}$$

Если учесть (19) и (34), то ясно, что выражения в квадратных скобках в уравнении (33b) являются малыми величинами относительно h (по крайне мере $O(h^2)$). Если $p_i = 0$ в (33b), то

$$\tilde{S}_i'' - y_i'' + \frac{h^2}{12} y_i^{IV} = O(h^4), \quad i = 2, 3, \dots, N-2. \tag{35}$$

Если же $p_i \neq 0$, то из (33b) следует, что выражения в квадратных скобках являются малыми величинами одного и того же порядка, а следовательно, согласно (33b) их порядок равен четвёртому, т.е

$$\tilde{S}_i'' - y_i'' + h^2/12 \cdot y_i^{IV} = O(h^4), \quad \tilde{S}_i' - y_i' = O(h^4), \quad i = 2, 3, \dots, N-2.$$

Аналогичным образом из (28a) и (28b) непосредственно вытекают

$$\tilde{S}_i'' - y_i'' - \frac{h^2}{12} y_i^{IV} + h^2 y_{i\pm1}^{IV} = O(h^4), \quad \tilde{S}_i' - y_i' - \frac{h^3}{4} y_i^{IV} = O(h^4), \quad i = \overline{0, N},$$

$$\tilde{S}_i'' - y_i'' - \frac{h^2}{12} y_i^{IV} = O(h^4), \quad \tilde{S}_i' - y_i' + \frac{h^3}{12} y_i^{IV} = O(h^4), \quad i = \overline{1, N-1}$$

соответственно. Теорема доказана полностью. □

С использованием пятиточечных формул

$$y_i'' = \frac{1}{12h}(-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2}) \tag{36}$$

$$y_i' = \frac{1}{12h}(y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}), \quad i = 2, 3, \dots, N-2 \tag{37}$$

можно построить разностную схему повышенной точности. Но, здесь возникают дополнительные вопросы об аппроксимации краевых условий и уравнения (1) в точках $x = x_0$, x_1, x_{N-1}, x_N. Полученная пятидиагональная система, к сожалению, не сводится к решению трёхдиагональной системы, как это имеет место в локально-кубической аппроксимации. В результате только значения решения в узлах сетки найдутся с точностью $O(h^4)$. В то время, как видно из Теоремы 3.1, кубический сплайн, построенный для решения задачи (1), (2) не только аппроксимирует значения решения, но и его производных. Любопытно отметить, что формула (16) для $\hat{S}'(x_i)$ полностью совпадает с (37). Как следствие, выполнение соотношения (19) очевидно.

4. Результаты численных расчётов

Качество схемы проверено на ряде примеров. Рассмотрим тестовую задачу

$$u''(x) + \sin x \cdot u'(x) - xu(x) = 2(\cos x - 1 - x) \cdot \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u(\pi) = 0 \tag{I}$$

и

$$u(x) - 2u'(x) = -4, \quad x = 0; \quad u(x) + \frac{1}{2}u'(x) = -1, \quad x = \pi. \tag{II}$$

Точное решение задачи имеет вид $u(x) = 2\sin x$.

В табл. 1 приведены численные результаты, полученные на равномерной сетке.

Таблица 1

Численные результаты, полученные на равномерной сетке

Погрешности	I				II			
	$h=\pi/10$	$h/2$	$h/4$	σ_i	$h=\pi/10$	$h/2$	$h/4$	σ_i
ε_0	1.94-04	5.70-06	3.0-07	5.12	3.99-03	2.68-04	1.71-05	3.89
ε_1	0.68-02	4.11-04	2.53-05	4.05	4.74-03	3.32-04	2.21-05	3.83
ε_2	4.64-04	1.55-05	4.88-07	4.90	5.86-03	3.56-04	2.21-05	4.04

Использованы обозначения:

$$\varepsilon_0 = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |u_i - \tilde{S}_i|, \ \varepsilon_1 = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \{u_i' - e_i(\tilde{S}', S'')\}, \ \varepsilon_2 = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |u_i'' - \tilde{e}_i(\tilde{S}'', S'')|,$$

где

$$e_i(\tilde{S}', S'') = \begin{cases} \tilde{S}'_i - \dfrac{h^3}{12}\Delta^2 S''_i, & i = 0, N, \\ \tilde{S}'_i + \dfrac{h^3}{4}\Delta^2 S''_i, & i = 1, N-1, \\ \tilde{S}'_i, \quad i = 2, 3, \ldots, N-2, \end{cases}$$

и

$$\tilde{e}_i(\tilde{S}'', S'') = \begin{cases} \tilde{S}''_i + \dfrac{1}{12}(10S''_0 - 19S''_1 + 8S''_2 + S''_3), & i = 0, \\ \tilde{S}''_i - \dfrac{h^2}{12}\Delta^2 S''_i, & i = 1, N-1, \\ \tilde{S}''_i + \dfrac{h^2}{12}\Delta^2 S''_i, & i = 2, 3, \ldots, N-2, \\ \tilde{S}''_N + \dfrac{1}{12}(10S''_N - 19S''_{N-1} + 8S''_{N-2} + S''_{N-3}), & i = N. \end{cases}$$

В табл. 1 приведены коэффициенты Рунге $\sigma_i = \log_2 \left| \frac{\varepsilon_i(h) - \varepsilon_i(h/2)}{\varepsilon_i(h/2) - \varepsilon_i(h/4)} \right|$.

Из табл. 1 видно, что порядок сходимости всех величин $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ равен $O(h^4)$. Они подтверждают теоретические выводы относительно порядка сходимости (Теорема 2, Следствие).

5. Заключение

В работе предложена сплайн-схема для численного решения краевых задач. Доказано, что построенный сплайн обладает такими же аппроксимативными свойствами, как локально-кубический сплайн. Следовательно, предлагаемая сплайн-схема может быть применена с успехом для численного решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

Литература

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
2. *Жанлав Т.* О методе сплайн-аппроксимации решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. — 1992.
3. *Жанлав Т.* О трехточечной сплайн-схеме повышенной точности // ЖВМ и МФ. — 1991. — Т. 31, № 1. — С. 40–51.
4. *Дронов С. Г., Лигун А. А.* Об одном сплайн-метод решения краевой задачи // Укр. матем. журнал. — 1989. — Т. 41, № 5. — С. 703–707.
5. *Жанлав Т.* О представлении интерполяционных кубических сплайнов через B-сплайны // Методы сплайн-функций (Новосибирск). — 1981. — № 87. — С. 3–10.
6. *Sablonnier P.* Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. — 2005. — Vol. 63, No 3. — Pp. 211–222.
7. *Zhanlav T., Mijiddorj R.* The local integro cubic splines and their approximation properties // Appl. Math. Comput. — 2010. — T. 216, № 7.
8. *Zhu C. G., Wang R.-H.* Numerical solution of Burgers equation by cubic B-spline quasi-interpolation // Appl. Math. Comput. — 2009. — T. 208, № 1.
9. *Zhu C., Kang W.-S.* Numerical solution of Burgers-Fisher equation by cubic B-spline quasi-interpolation // Appl. Math. Comput. — 2010. — Vol. 216, No 9. — Pp. 2679–2686.

UDC 519.624.2

Local-Cubic Spline for Approximate Solution of Boundary Value Problems

T. Zhanlav*, R. Mijiddorj†

* *National University of Mongolia, Ulan-Bator, Mongolia*

† *Mongolian State University of Education, Ulan-Bator, Mongolia*

We have constructed an explicit local-cubic spline for the approximation of the smooth functions and have studied the behavior of the approximation. To solve numerically boundary value problems, a spline-scheme based on the properties of the local-cubic spline and the standard cubic spline collocation is proposed. The scheme is implemented by sequentially solving two tridiagonal systems, which allow to use the three-point sweep method and differ from each other only by matrix of the right-hand side of the equation. It indicates that this algorithm is efficient. The number of operations depends linearly on the number of grid nodes. It is proved that the constructed spline possesses the same approximation properties as the local-cubic spline. Thus, in this paper we actually considered the approximation of the solutions of the boundary value problems. The proposed scheme also allows to find the first and second derivatives of the solution of the boundary value problem on the uniform grid nodes of the fourth-order accuracy with respect to the step-size of the grid. The numerical experiments confirm the theoretical order of convergence. Due to good approximation properties and the simplicity of the algorithm implementation, the proposed method can be applied to solve numerically the boundary value problems for the second order ordinary differential equations, which often occur in mathematics, physics, and in the field of natural and engineering sciences.

Key words and phrases: boundary value problems, cubic spline, high accuracy

References

1. Y. S. Zav'yalov, B. I. Kvasov, V. L. Miroschnichenko, Methods of spline-functions, Nauka Moscow, 1980, in Russian.
2. T. Zhanlav, On a spline approximation method for solving ordinary differential equations, in Russian (1992).
3. T. Zhanlav, A high accuracy three-point spline scheme, USSR Comput. Math. Math. Phys. 31 (1) (1991) 28–36.
4. S. G. Dronov, A. A. Ligun, A certain spline method for solving a boundary-value problem, Ukrainian Mathematical Journal 41 (5) (1989) 608–612.
5. T. Zhanlav, B-representation of interpolatory cubic splines, Methods of spline-functions, (Novosibirsk) (87) (1981) 3–10.
6. P. Sablonnier, Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 63 (3) (2005) 211–222.
7. T. Zhanlav, R. Mijiddorj, The local integro cubic splines and their approximation properties, Appl. Math. Comput. 216 (7).
8. C. G. Zhu, R.-H. Wang, Numerical solution of burgers equation by cubic b-spline quasi-interpolation, Appl. Math. Comput. 208 (1) (2009) 260–272.
9. C. Zhu, W.-S. Kang, Numerical solution of burgers-fisher equation by cubic b-spline quasi-interpolation, Appl. Math. Comput. 216 (9) (2010) 2679–2686.