

---

# Математика

УДК 519.63

## Об одной вспомогательной нелинейной краевой задаче в теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау и её множественных решениях

Н. Б. Колюхова, А. А. Шеина

*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Проводятся аналитико-численные исследования однородной нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с кубической нелинейностью и двумя вещественными параметрами, возникающей в теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау. Множественные нетривиальные решения этой задачи, зависящие от указанных параметров, выражаются через эллиптические функции Якоби и описывают стационарные состояния (вблизи критических значений температур) сверхпроводящей бесконечной пластины конечной толщины в отсутствие магнитного поля. Задача является «вырожденной» по отношению к исходной нелинейной краевой задаче для сверхпроводящей пластины в магнитном поле и важна для построения алгоритма нахождения всех решений последней в широком диапазоне изменения параметров; изучаемая задача представляет и самостоятельный математический интерес.

**Ключевые слова:** теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау, стационарные состояния сверхпроводящей пластины в отсутствие магнитного поля, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, однородная краевая задача и её множественные решения

### 1. Введение. О нелинейной краевой задаче для сверхпроводящей пластины в магнитном поле

Макроскопическая теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау (ГЛ) [1] широко применяется для описания состояний сверхпроводников в магнитных полях вблизи критических значений температур (см., например, [2–4] и цитированную там литературу). В [2], в частности, приведена известная история экспериментального открытия явления сверхпроводимости и описаны первые попытки (менее успешные, чем в [1]) создания теории этого явления.

По современным представлениям в сверхпроводниках, как и в сверхтекучих жидкостях, частицы ведут себя упорядоченно, образуя одну большую квантово-механическую волну (КМВ), и благодаря этому сверхпроводники переносят электричество без сопротивления. Такая большая КМВ описывается «эффективной волновой функцией» [1], которую также называют «параметром порядка»; квадрат этой функции задаёт концентрацию «сверхпроводящих электронов», т.е. отношение числа упорядоченных электронов, образующих единую КМВ, к общему числу электронов в сверхпроводнике.

Одной из интенсивно изучаемых задач теории сверхпроводимости ГЛ является одномерная нелинейная краевая задача (КрЗ), которая описывает стационарные состояния сверхпроводящей бесконечной пластины конечной толщины, помещённой в магнитное поле, направленное вдоль пластины. В безразмерных переменных, введённых в [3] (см. также [5]), эта задача для симметричных решений имеет вид:

$$a'' - \psi^2 a = 0, \quad \psi'' + \kappa^2(\psi - \psi^3) - a^2 \psi = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (1)$$

$$a(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad a'(D) = h, \quad \psi'(D) = 0. \quad (2)$$

Здесь все величины вещественны;  $D$ ,  $h$  и  $\varkappa$  – безразмерные положительные параметры:  $D$  – полуширина пластины,  $h$  – напряжённость магнитного поля,  $\varkappa$  – параметр теории ГЛ, характеризующий материал сверхпроводника и меняющийся в широком диапазоне;  $a(x)$  – потенциал магнитного поля,  $\psi(x)$  – эффективная волновая функция, характеризующая КМВ сверхпроводящих электронов в пластине, где величина  $\psi^2(x)$  равна концентрации в ней таких электронов:

$$0 \leq \psi^2(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D] \quad (3)$$

(по сравнению с [1], как и в [3, 5], введена другая нормировка  $h$ :  $h = h_{GL}\varkappa$ , так что  $a = a_{GL}\varkappa$ , и выбрана другая ориентация пластины в магнитном поле).

Случай  $\psi = 0$  соответствует нормальной фазе ( $n$ -фазе) состояния пластины, а случай  $\psi \neq 0$  – сверхпроводящей фазе ( $s$ -фазе) её состояния. КрЗ (1), (2) разрешима: при любом  $h$  она имеет по крайней мере одно решение  $\{a(x), \psi(x)\} = \{hx, 0\}$ , которое при  $h > 0$  является единственным  $n$ -решением этой задачи; «физическое» ограничение (3) выполняется для всех решений КрЗ (1), (2)  $\forall \varkappa \neq 0$ . Интерес, в частности, представляют фазовые переходы  $s \rightarrow n$  и  $n \rightarrow s$  для разных значений параметров задачи в режимах усиления или ослабления магнитного поля. Такие переходы описываются с помощью бифуркационных диаграмм состояний – зависимости от величины магнитного поля значений параметра порядка в центре или на краю пластины (и/или значений других физических величин – типа намагниченности пластины, см. [3, 5]).

Под **основным состоянием пластины в магнитном поле** понимается такое, при котором параметр порядка (как функция поперечной координаты) не меняет знак на ширине пластины, т.е. удовлетворяет более сильному ограничению по сравнению с выражением (3):

$$0 \leq \psi(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D] \quad (4)$$

(задача (1), (2) с ограничением (4) относится к задачам типа Кнезера).

В [3] (см. также другие статьи автора, цитируемые в [3, 4]) содержится подробное изложение физических представлений автора об основных состояниях сверхпроводящей пластины в магнитном поле; во многом они основаны на численных исследованиях задачи (1), (2), (4). Однако, как подробно поясняется в [5], в этих достаточно многочисленных статьях использовался неудачный численный метод, что привело к получению в них неполных разрывных диаграмм состояний (по признанию автора [3], вид таких диаграмм подвергался сомнениям со стороны В.Л. Гинзбурга, так как противоречил его физической интуиции).

Правильные диаграммы были получены в [5] с помощью другого подхода, предложенного и реализованного группой соавторов-математиков. А именно, в [5, 6] представлены достаточно подробные аналитико-численные исследования множественных решений задачи (1), (2), (4): предложен простой численный метод нахождения всех таких решений в широком диапазоне изменения параметров задачи, в том числе получены не найденные ранее другими методами динамически неустойчивые и неизолированные решения; построены более подробные и точные непрерывные диаграммы состояний пластины, описывающие её переход из сверхпроводящей фазы в нормальную (и наоборот) при усилении (ослаблении) магнитного поля, что позволило детально изучить явление магнитного гистерезиса и эволюцию диаграмм с изменением параметров, и др.; поставлены и изучены спектральные задачи для исследования динамической (не)устойчивости решений в рамках линейной теории возмущений и для априорного нахождения пороговых значений магнитного поля.

К сожалению, автору [3] (а затем и всей группе соавторов [5]) не были известны результаты многочисленных работ математиков по изучению задачи (1), (2), (4)

(поток математических статей продолжается до сих пор), в том числе интересной работы [7], предвосхитившей подход [5] к решению этой задачи. В [7], в частности, доказано строго, что бифуркационная кривая должна быть непрерывна. Более детально некоторые результаты [7] будут обсуждаться нами в другой работе.

Для наших исследований важно, что как математический, так и, возможно, физический интерес (см., например, [8]) представляют и другие решения нелинейной КрЗ (1), (2), отвечающие «возбуждённым» сверхпроводящим состояниям пластины в магнитном поле, когда параметр порядка меняет знак на ширине пластины или плёнки. Такие решения ещё более затруднительно находить итерационными методами типа релаксации [3]: в [8] при попытках находить такие решения алгоритм их вычислений не приводится (по утверждению автора, ввиду его сложности). Согласно [8], хотя основные состояния пластины считаются наиболее реализуемыми в эксперименте, вопрос о роли других решений и других возможностях, вообще говоря, остаётся неизученным. В частности, в [8] сделано важное замечание: нигде не доказано, что решения общей одномерной КрЗ ГЛ должны быть симметричными, и следует изучать ОДУ (1) на интервале  $(-D, D)$  с более общими условиями

$$a'(\pm D) = h, \quad \psi'(\pm D) = 0. \quad (5)$$

Поиску асимметричных решений КрЗ (1), (5) посвящено большое число современных математических работ, авторы которых ссылаются на гипотезы [8], на чем здесь останавливаться не будем. Отметим только, что КрЗ (1), (5) имеет уже континуум  $n$ -решений  $\{a(x), \psi(x)\} = \{h(x+c), 0\}$ , где  $c$  – произвольная постоянная, причём при  $c \neq 0$  эти решения являются асимметричными.

Целью данной работы является математическое и численное исследование вспомогательной «вырожденной» однородной нелинейной КрЗ, нетривиальные решения которой описывают возможные стационарные состояния (вблизи критических значений температур) сверхпроводящей бесконечной пластины конечной толщины в отсутствие магнитного поля. Эта задача для параметра порядка, которая получается из (1), (2) при  $h = 0$ ,  $a \equiv 0$ , важна, в частности, для анализа и численных исследований множественных решений исходной нелинейной неоднородной КрЗ (1), (2). Она представляет и самостоятельный математический интерес.

## 2. Нелинейная краевая задача для сверхпроводящей пластины в отсутствие магнитного поля

### 2.1. Постановка задачи и предварительные сведения

При  $h = 0$ , когда будет  $a(x) \equiv 0$ , КрЗ (1), (2) приобретает вид:

$$\psi'' + \varkappa^2(\psi - \psi^3) = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (6)$$

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(D) = 0. \quad (7)$$

Зафиксируем некоторые достаточно очевидные свойства решений этой задачи.

**Предложение 1.** Следующие утверждения справедливы для однородной нелинейной КрЗ (6), (7) при фиксированных значениях параметров  $\varkappa \neq 0$  и  $D > 0$ :

1) задача разрешима – она имеет по крайней мере три постоянных решения,

$$\psi^\pm \equiv \pm 1, \quad \psi_{\text{zero}} \equiv 0; \quad (8)$$

2) если  $\psi(x)$  – решение задачи, то  $-\psi(x)$  – тоже решение;

3) любое решение  $\psi(x)$  КрЗ (6), (7) удовлетворяют ограничению

$$0 \leq \psi^2(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D] \quad (9)$$

и соотношению

$$\int_0^D \psi(s) (1 - \psi^2(s)) ds = 0. \quad (10)$$

Для определённости далее рассматриваем те нетривиальные решения  $\psi(x, \varkappa, D)$  КрЗ (6), (7), для которых будет

$$\psi(0, \varkappa, D) = \psi_0(\varkappa, D) > 0. \quad (11)$$

Пусть при фиксированных значениях  $\varkappa \neq 0$  и  $D > 0$  функция  $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$  есть решение нелинейной КрЗ (6), (7), которую линеаризуем на этом решении. Получим линейную однородную КрЗ относительно малого возмущения  $w(x)$  решения  $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$ :

$$w'' + \varkappa^2 (1 - 3\bar{\psi}^2(x, \varkappa, D)) w = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad w'(0) = w'(D) = 0. \quad (12)$$

Тогда, следуя [9], введём следующее определение.

**Определение 1.** Пусть  $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$  – решение однородной нелинейной КрЗ (6), (7) при фиксированных значениях параметров  $\varkappa \neq 0$  и  $D > 0$ . Это решение называем изолированным тогда, и только тогда, когда сопутствующая линейная однородная КрЗ (12) имеет только тривиальное решение; в противном случае  $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$  – неизолированное решение нелинейной КрЗ (6), (7).

В частности, полагая  $\bar{\psi}(x, \varkappa, D) \equiv \psi^+ = 1$ , получим из (12) КрЗ

$$w'' - 2\varkappa^2 w = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad w'(0) = w'(D) = 0, \quad (13)$$

которая при любом  $\varkappa \neq 0$  имеет только тривиальное решение (то же для  $\bar{\psi}(x, \varkappa, D) \equiv \psi^- = -1$ ), так что решения  $\psi^\pm \equiv \pm 1$  – изолированные решения КрЗ (6), (7) при любом  $\varkappa \neq 0$ .

**Замечание 1.** Как известно, изолированное решение нелинейной КрЗ для ОДУ, вообще говоря, можно найти итеративными методами (например, методом квазилинеаризации), исходя из достаточно хорошего начального приближения.

**Замечание 2.** Нелинейная КрЗ (6), (7), зависящая от двух параметров  $\varkappa$  и  $D$ , сводится к аналогичной КрЗ на интервале  $(0, 1)$  с одним параметром  $p = \varkappa D$  заменой независимой переменной  $x_{\text{new}} = x/D$ . Как следствие, именно этот параметр играет далее наиболее важную роль.

В соответствии с понятием бифуркации (см., например, [10]) и с учётом Замечания 2 введём следующее определение.

**Определение 2.** В пространстве параметров  $(\varkappa, D)$  точка  $(\varkappa_0, D_0)$  тогда, и только тогда, является точкой бифуркации нелинейной КрЗ (6), (7), определяя для неё критическое значение параметра бифуркации  $p_0 = \varkappa_0 D_0$ , когда существует неизолированное решение  $\bar{\psi}(x, \varkappa_0, D_0)$  этой задачи.

**О неизоллированности тривиального решения и критических значениях параметра бифуркации.** Как известно (см., например, [11]), при наличии трёх постоянных решений (8) следует, вообще говоря, ожидать существование других решений КрЗ (6), (7), меняющих знак на интервале  $(0, D)$ . Наличие таких решений и их количество зависят от величины параметра  $p = \varkappa D > 0$ . А именно, полагая  $\bar{\psi}(x, \varkappa, D) \equiv \psi_{\text{zero}} = 0$ , получим из (12) вспомогательную линейную однородную КрЗ на отыскание собственных значений (СЗ) и собственных функций (СФ) дискретного спектра:

$$w'' + \varkappa^2 w = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad w'(0) = 0, \quad w'(D) = 0. \quad (14)$$

КрЗ (14) имеет счётный набор СЗ  $\varkappa = \varkappa_l(D) : \varkappa_l^2(D) = (\pi l/D)^2$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Учитываем положительные СЗ

$$\varkappa_l(D) = \pi l/D, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

каждому из которых отвечает СФ

$$w_l(x) = w_l(x, D) = \cos(\pi l x/D), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

для определённости нормированная требованием  $w_l(0) = 1$ ; она имеет ровно  $l$  нулей на интервале  $(0, D)$ .

Тогда тривиальное решение нелинейной однородной КрЗ (6), (7) является её неизоллированным решением при значениях параметров  $\varkappa$  и  $D$ , удовлетворяющих соотношению (15), а СЗ (15) определяют критические значения параметра бифуркации  $p = \varkappa D > 0$  нелинейной КрЗ (6), (7). (Этот факт, вообще говоря, можно получить из общей спектральной теории линейных операторов: простые СЗ линейной КрЗ, полученной линеаризацией нелинейной КрЗ на её частном решении, являются точками бифуркации исходной нелинейной КрЗ.)

Отсюда, учитывая ограничение (11), получаем, что при

$$\varkappa D : l\pi \lesssim \varkappa D < (l+1)\pi, \quad 1 \leq l - \text{целое число}, \quad (17)$$

следует ожидать существования  $l$  узловых решений  $\psi^{(s)}(x)$  ( $s = 1, \dots, l$ ) нелинейной КрЗ (6), (7), таких, что  $\psi^{(s)}(x)$  имеет ровно  $s$  нулей на  $(0, D)$ ; им должны отвечать значения  $\psi^{(s)}(0) = \psi_0^{(s)}$ , где

$$0 < \psi_0^{(l)} < \psi_0^{(l-1)} < \dots < \psi_0^{(1)} < 1; \quad (18)$$

это подтверждается как последующими рассуждениями, так и в вычислениях.

Из (6), (7) следует соотношение (10), которое влечёт симметрию (антисимметрию) решений КрЗ (6), (7) относительно прямой  $x = D/2$  с чётным (нечётным) числом узлов на  $(0, D)$ . Нетрудно также проверить справедливость соотношения

$$\int_0^D \psi^{(s)}(x) \psi^{(q)}(x) \left[ \left( \psi^{(s)}(x) \right)^2 - \left( \psi^{(q)}(x) \right)^2 \right] dx = 0, \quad (19)$$

где  $s, q = 0, 1, \dots, l$  (при  $s = 0$  или  $q = 0$  подразумеваются решения (8)).

Учитывая для строгости сведения, приведённые далее в подразделе 2, окончательно получим, что справедливо

**Предложение 2.** При выполнении условия

$$0 < \varkappa D < \pi \quad (20)$$

однородная нелинейная КрЗ (6), (7) не имеет других решений, кроме постоянных (8). При выполнении условий (17) нелинейная КрЗ (6), (7), наряду с решениями (8), имеет ещё  $2l$  решений  $\pm\psi^{(s)}(x)$  ( $s = 1, \dots, l$ ), таких, что  $\psi^{(s)}(x)$  имеет ровно  $s$  нулей на  $(0, D)$ .

**Об энергетической (не)устойчивости постоянных решений.** ОДУ (6) является уравнением Лагранжа–Эйлера для неотрицательно определённого функционала

$$E(\varkappa, D) = \int_{-D}^D \left[ W_{GLH}(\psi, \varkappa)(x) + \psi'^2(x)/2 \right] dx, \quad (21)$$

где  $W_{GLH}$  – потенциал Гинзбурга–Ландау–Хиггса (ГЛХ), или потенциал «самодействия» поля  $\psi$  (см. рис. 1):

$$W_{GLH}(\psi, \varkappa) = \varkappa^2 (\psi^2 - 1)^2/4. \quad (22)$$

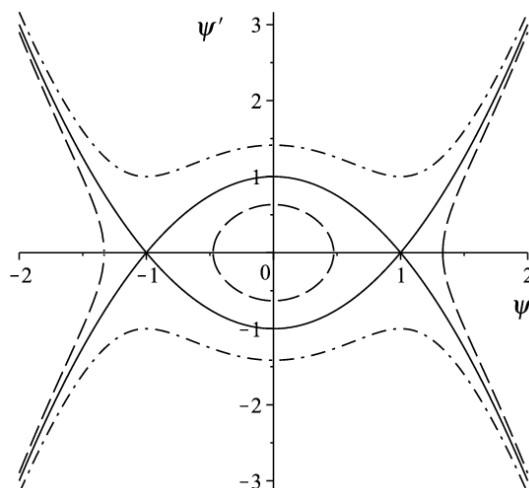


Рис. 1. Потенциал Гинзбурга–Ландау–Хиггса при  $\varkappa = \sqrt{2}$

На решениях  $\psi(x)$  КрЗ (6), (7) величина  $W_{GLH}(\psi, \varkappa)(x) + \psi'^2(x)/2$  под интегралом (21) определяет плотность свободной (потенциальной) энергии пластины в отсутствие магнитного поля, а величина (21) пропорциональна поверхностной плотности энергии – величине энергии на единицу поверхности.

Для постоянных решений (8) КрЗ (6), (7) получаем: интеграл (21) принимает нулевое значение на решениях  $\psi^{\pm} \equiv \pm 1$ , так что эти решения («истинные вакуумы» поля  $\psi$ ) являются энергетически абсолютно устойчивыми (или абсолютно устойчивыми по Лагранжу); на решении  $\psi_{\text{zero}} \equiv 0$  имеем  $E(\varkappa, D) = E^{(0)}(\varkappa, D) = D\varkappa^2/2 > 0$ , так что  $\forall \varkappa \neq 0$  это решение («ложный вакуум» поля  $\psi$ ) энергетически неустойчиво (потенциал ГЛХ (22) достигает локального максимума при  $\psi \equiv 0$ ).

**Переход к нелинейной задаче с одним неизвестным параметром как собственным значением дискретного спектра.** Для поиска решений КрЗ (6), (7),

отличных от (8), будем решать задачу с неизвестным параметром  $\psi_0$ :

$$\psi'' + \varkappa^2 (\psi - \psi^3) = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (23)$$

$$\psi(0) = \psi_0 \quad (0 < \psi_0 < 1), \quad \psi'(0) = 0, \quad (24)$$

$$\psi'(D) = 0. \quad (25)$$

При фиксированных значениях  $\varkappa$  и  $D$  требуется определить значения  $\psi_0, \psi_0 \in (0, 1)$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (23)–(25), и определить их число.

Вспомогательную задачу (23)–(25) можно трактовать как нелинейную спектральную задачу со спектральным параметром  $\psi_0$  на отыскание дискретных точек спектра на  $(0, 1)$ .

## 2.2. О связи решения задачи с эллиптическими функциями Якоби

Как замечено в [8], при каждом фиксированном значении  $\psi_0 \in (0, 1)$  задача Коши (ЗК) (23), (24) имеет аналитическое решение:

$$\psi(x) = \psi_0 \operatorname{sn} \left( \varkappa x \sqrt{1 - \psi_0^2/2 + c_0} \right). \quad (26)$$

Здесь  $\operatorname{sn}(u + c_0, k)$  – эллиптический синус с модулем  $k$ ,

$$k = \psi_0 / \sqrt{2 - \psi_0^2}, \quad k^2 < 1, \quad (27)$$

$c_0$  – постоянная сдвига,

$$\operatorname{sn}(c_0, k) = 1, \quad c_0 = \operatorname{sn}^{-1}(1, k) = K(k), \quad (28)$$

где показатель степени « $-1$ » понимается в смысле обратной функции,  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл I рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \quad k^2 < 1 \quad (29)$$

(определения и свойства эллиптических функций и интегралов см., например, в [12]).

**Замечание 3.** В [8] допущена опечатка в формуле (26) – под знаком корня стоит  $\psi_0^2$  вместо  $\psi_0^2/2$ ; относительно  $c_0$  указано только, что значение этой постоянной связано с выбором начала.

В справедливости формул (26)–(28) легко убедиться, учитывая первый интеграл («закон сохранения») для решений ОДУ (23):  $\psi'^2/2 + \varkappa^2 (\psi^2/2 - \psi^4/4) = \operatorname{const}$ . Тогда для решения  $\psi(x)$  ЗК (23), (24) справедливо соотношение

$$\psi'^2 + \varkappa^2 (\psi^2 - \psi_0^2 - \psi^4/2 + \psi_0^4/2) = 0, \quad 0 \leq x \leq D. \quad (30)$$

Осуществив в (30) замены переменных

$$u = \varkappa x \sqrt{1 - \psi_0^2/2}, \quad \hat{\psi} = \psi/\psi_0 \quad (31)$$

и учитывая обозначение (27), получим ОДУ для эллиптического синуса (см. [12]):

$$\left(\frac{d\widehat{\psi}}{du}\right)^2 = (1 - \widehat{\psi}^2)(1 - k^2\widehat{\psi}^2). \quad (32)$$

Согласно [8, 12], период колебаний  $\Pi$  для решения (26) выражается формулой

$$\Pi = 4K(k) / \left[ \varkappa \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \right], \quad (33)$$

где полный эллиптический интеграл I рода  $K(k)$  и модуль  $k > 0$  определены в (29) и (27), соответственно.

Можно приближённо найти  $\Pi(k) = \widetilde{\Pi}(\psi_0)$ , используя разложения (см. [12, 13]):

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right), \quad k^2 < 1; \quad (34)$$

$$K(k) = \widetilde{K}(m) = \frac{\pi}{2} (1 + m) \left( 1 + \frac{1^2}{2^2} m^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} m^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^6 + \dots \right), \quad (35)$$

где

$$m = (1 - k')/(1 + k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad m^2 < k^2, \quad (36)$$

и разложение (35) сходится быстрее.

**Замечание 4.** При  $D \rightarrow \infty$  решение ЗК (23), (24) при любом значении  $\psi_0 \in (0, 1)$  определяет периодическое ограниченное на всей вещественной оси решение ОДУ (23) – эллиптическую функцию Якоби, т.е. значения  $\psi_0$  образуют непрерывный спектр на  $(0, 1)$ , а функции (26) являются СФ непрерывного спектра ОДУ (23) (ср. с п. 1.3). Мы вернёмся к этому замечанию в подразделе 5.

### 3. Численный метод решения краевой задачи

Пусть выполнено условие (17), и пусть  $\psi^{(s)}(x, \psi_0^{(s)})$  – решение КрЗ с параметром (23)–(25), т.е. при найденном значении  $\psi_0^{(s)} > 0$  ( $1 \leq s \leq l$ ). Тогда для периода колебаний этого решения, как нетрудно понять, получаем точную формулу:

$$\Pi = \Pi_s = 2D/s, \quad s = 1, \dots, l, \quad (37)$$

где  $s$  – число нулей функции  $\psi^{(s)}(x)$  на  $(0, D)$ .

В результате, при выполнении требования (17), для нахождения нетривиального решения  $\psi^{(s)}(x)$  нелинейной однородной КрЗ (6), (7) с помощью вспомогательной задачи с параметром (23)–(25) условие (25) достаточно заменить условием

$$\psi^{(s)}(\Pi_s/4) = \psi^{(s)}(D/(2s)) = 0, \quad s = 1, \dots, l. \quad (38)$$

Это условие существенно удобнее тем, что сразу фиксируется число нулей искомой функции, а вычисления осуществляются на меньшем отрезке  $[0, D/(2s)]$  стрельбой по условию (38) с параметром стрельбы  $\psi_0 = \psi_0^{(s)}$ . Особенно это облегчает нахождение сильно осциллирующих решений для больших значений  $\varkappa$  и  $D$ .

Из (33), используя точную формулу (37), удобно находить значения полного эллиптического интеграла I рода  $K_s(k_s)$  для различных значений  $k_s$ , определяемых



по формуле (27), где  $\psi_0 = \psi_0^{(s)}$ :

$$K_s(k_s) = \frac{D\kappa}{2s} \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2}, \quad s = 1, \dots, l. \quad (39)$$

Решение  $\psi^{(s)}(x)$  КрЗ (6), (7) в результате можно представить в виде:

$$\psi^{(s)}(x) = \psi_0^{(s)} \operatorname{sn} \left( \kappa \left( x + D/(2s) \right) \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2} \right), \quad s = 1, \dots, l. \quad (40)$$

Кроме того, заметим, что при выполнении условия (17) и найденных значениях  $\psi_0^{(s)} > 0$  должны выполняться соотношения

$$\operatorname{cn} \left( \kappa D \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2} + K(k) \right) = 0, \quad s = 1, \dots, l, \quad (41)$$

где  $\operatorname{cn}(u + c_0, k)$  – эллиптический косинус с модулем  $k$ , определённым в (27).

Если учесть, в каких точках эллиптический косинус обращается в нуль (см. [12]), то из (41) получим соотношения

$$\kappa D \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2} + K(k) = (2s + 1)K(k), \quad s = 1, \dots, l. \quad (42)$$

Как нетрудно проверить, соотношения (42) при  $K(k) = K_s(k_s)$ , определённых в (39), обращаются в тождества. С другой стороны, использование соотношений (42) для нахождения самих значений  $\psi_0^{(s)} > 0$  является, на наш взгляд, менее удобным по сравнению с описанным выше численным методом, так как на каждой итерации требует пересчёта  $k$  и  $K(k)$ .

**Замечание 5.** На наш взгляд, решение ЗК (23), (24) есть удобный способ нахождения эллиптического синуса и полного эллиптического интеграла I рода: при заданном  $k > 0$  вычисляем  $\psi_0$  по формуле:

$$\psi_0 = k\sqrt{2}/\sqrt{1+k^2}; \quad (43)$$

решаем ЗК (23), (24) с так полученным значением  $\psi_0$  до первого нуля  $x_1$  функции  $\psi(x)$ ; учитываем, что

$$x_1 = \Pi/4 = K(k) / \left[ \kappa \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \right], \quad (44)$$

откуда получаем

$$K(k) = x_1 \left[ \kappa \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \right] \quad (45)$$

и представление решения в виде

$$\psi(x) = \psi_0 \operatorname{sn} \left( \kappa x \sqrt{1 - \psi_0^2/2} + K(k) \right). \quad (46)$$

В [12, Табл. 30, с. 115] для набора значений  $k^2 = 0, 0.02, 0.04, \dots, 1.0$  приведены величины  $K(k)$ , которые могут служить контролем правильности вычислений по алгоритму этого замечания.

**Замечание 6.** Эллиптические функции Якоби (в общем случае это двоякопериодические мероморфные функции комплексного аргумента) обычно вычисляют разложениями в ряды (см. такие разложения, например, в [13]), а для ускорения сходимости рядов используют представления этих функций через тэта-функции Якоби (см. [12, 14]), что, на наш взгляд, является довольно громоздкой процедурой. Но имеется ли альтернатива этому подходу в случае комплексного аргумента, нам пока неизвестно.

#### 4. Результаты расчётов

Расчёты осуществлялись в программной среде пакета Maple 14.01 (лицензия ВЦ РАН) с задаваемой точностью вычислений и дополнительными приёмами контроля количества верных знаков. Примеры расчётных данных приведены в табл. 1.

Таблица 1

Примеры расчётных данных

$\kappa$	$D$	$\kappa D$	$\psi_0^{(1)}$	$\psi_0^{(2)}$	$\psi_0^{(3)}$	$\psi_0^{(4)}$	$\psi_0^{(5)}$
0.5	6.4	3.2	0.21944				
	8	4	0.70593				
	15	7.5	0.97987	0.62511			
	20	10	0.99657	0.87298	0.38498		
	27	13.5	0.99971	0.96549	0.81006	0.42061	
	34	17	0.99998	0.99011	0.92363	0.76507	0.43999
$1/\sqrt{2}$	4.7	3.32...	0.37576				
	7	4.95...	0.86788				
	9	6.36...	0.95433	0.18329			
	13	9.19...	0.99395	0.82457			
	13.7	9.68...	0.99573	0.85632	0.26671		
	16	11.31...	0.99858	0.92307	0.63312		
	20	14.14...	0.99981	0.97262	0.84060	0.52681	
	26	18.38...	0.99999	0.99393	0.94573	0.82457	0.59550
0.8	4.5	3.6	0.56027				
	7	5.6	0.91972				
	8	6.4	0.95552	0.21944			
	11	8.8	0.99203	0.79345			
	12	9.6	0.99548	0.85123	0.21944		
	13	10.4	0.99744	0.89124	0.48602		
	17	13.6	0.99973	0.96672	0.81525	0.43999	
	21	16.8	0.99997	0.98941	0.91972	0.75455	0.40830
1.0	4.5	4.5	0.81007				
	5	5	0.87298				
	6.38	6.38	0.95486	0.20027			
	8	8	0.98592	0.70593			
	11	11	0.99832	0.91345	0.59105		
	13	13	0.99959	0.95864	0.78139	0.29532	
	16	16	0.99995	0.98592	0.90179	0.70593	0.21944

Таблица 1

Примеры расчётных данных (продолжение)

$\varkappa$	$D$	$\varkappa D$	$\psi_0^{(1)}$	$\psi_0^{(2)}$	$\psi_0^{(3)}$	$\psi_0^{(4)}$	$\psi_0^{(5)}$
1.2	2.7	3.24	0.28205				
	3.5	4.2	0.75455				
	5.5	6.6	0.96153	0.35270			
	7	8.4	0.98941	0.75455			
	10	12	0.99917	0.94037	0.70593		
	12	14.4	0.99984	0.97505	0.85123	0.56027	
	15.5	18.6	0.99999	0.99441	0.94852	0.83211	0.61335
1.5	2.2	3.3	0.35270				
	4	6	0.94037				
	4.3	6.45	0.95711	0.26062			
	5.5	8.25	0.98822	0.73763			
	6.38	9.57	0.99538	0.84944	0.20027		
	7.8	11.7	0.99898	0.93337	0.67681		
	10	15	0.99990	0.97988	0.87298	0.62511	
	11.5	17.25	0.99998	0.99097	0.92824	0.77745	0.47519

Дополнительным контролем точности вычислений могут служить следующие правила и соотношения: 1) для фиксированного  $j \geq 1$  при одинаковых значениях параметра  $p = \varkappa D$  должны быть одинаковыми величины  $\psi_0^{(j)}$  (с учётом Замечания 2, величины  $\psi_0^{(j)}$  зависят только от произведения параметров  $\varkappa D$ ); 2) если  $D_2/s_2 = D_1/s_1$  при  $D_2 > D_1$  и  $s_2 > s_1$ , то решение  $\psi^{(s_2)}(x, D_2)$  при  $x \in [0, D_1]$  совпадает с решением  $\psi^{(s_1)}(x, D_1)$ , являясь его продолжением до значения  $x = D_2$  с увеличением числа нулей; 3) должны выполняться соотношения (10), (19).

Пример графиков решений КрЗ (6), (7) см. на рис. 2.

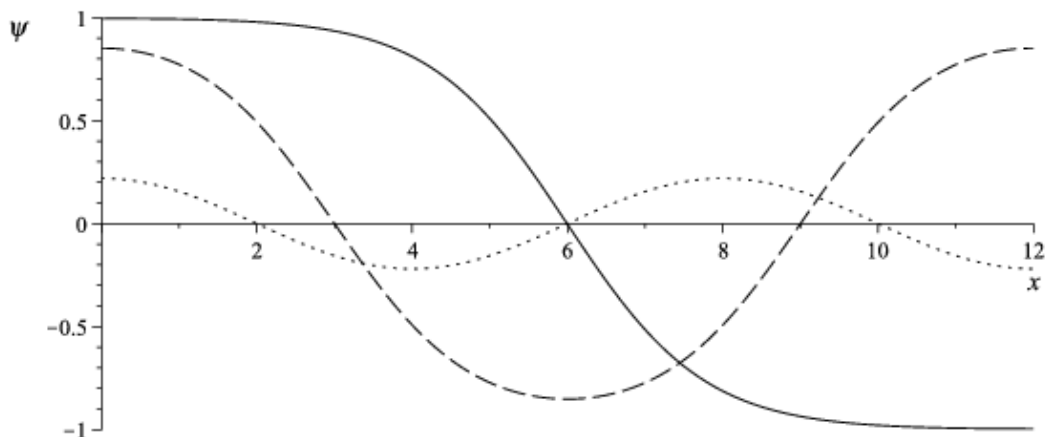


Рис. 2. Графики узловых решений  $\psi^{(s)}(x)$  при  $D = 12, \varkappa = 0.8, s = 1, 2, 3$

С учётом формул (8) и ограничения (11) всего здесь имеется 4 нетривиальных решения КрЗ (6), (7) – одно основное  $\psi^+ \equiv 1$  и три узловых (см. табл. 1).

Важно заметить, что для исходной нелинейной КрЗ ГЛ (1), (2) (при  $h > 0$ ) значения  $\pm\psi_0^{(s)}$  из приведённой выше табл. 1 будут определять «коридор» существования решений, у которых  $\psi$ -компонента имеет  $s$  нулей на  $(0, D)$ .

## 5. Дополнение: об одной задаче нелинейной теории поля

ОДУ (6), рассматриваемое на всей оси  $\mathbb{R}$ , известно в нелинейной теории поля и космологии как одномерное стационарное уравнение для нейтрального скалярного поля Хиггса в пространстве Минковского (см., например, [15] и цитированную там литературу). В общем случае  $(N + 1)$ -мерного пространства Минковского с координатами  $x_0 = t, x_1, \dots, x_N$  ( $N \geq 1$ ) лагранжиан  $L$  для такого поля  $\psi(\vec{r}, t)$  имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2 - W_{GLH}(\psi), \quad (47)$$

где  $W_{GLH}(\psi)$  – потенциал ГЛХ, определённый в (22).

Уравнение Лагранжа–Эйлера для лагранжиана (47) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta_N \psi + \frac{dW_{GLH}(\psi)}{d\psi} = 0, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (48)$$

где  $\Delta_N$  –  $N$ -мерный оператор Лапласа и

$$\frac{dW_{GLH}(\psi)}{d\psi} = \kappa^2 \psi (\psi^2 - 1). \quad (49)$$

Здесь используется система единиц, в которой  $c = \hbar = 1$  ( $c$  – скорость света в вакууме,  $\hbar$  – постоянная Планка). В этой системе единиц нетривиальной остаётся только размерность массы ( $[m] = M$ ), а длина и время имеют размерность  $1/M$ . Тогда  $[\kappa] = M$ , а  $\psi$  – величина безразмерная.

Уравнение (48) обладает, в частности, известными одномерными решениями, которые называют «доменными стенками» (они соединяют два «истинных вакуума»). В общем случае эти стенки движутся с постоянной скоростью  $v$ ,  $0 < v < 1$ , направленной перпендикулярно их поверхности:

$$\psi_{w\pm}(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0, \vec{n}, v) = \pm \tanh \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \left[ (\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) \pm v(t - t_0) \right] / \sqrt{1 - v^2} \right), \quad (50)$$

где  $t_0, v$  – параметры,  $\vec{r}_0$  – вектор параметров,  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении распространения волны.

Для стационарных одномерных решений, имеющих вид

$$\psi_{w\pm}(x - x^0) = \pm \tanh \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (x - x^0) \right), \quad (51)$$

где  $x, x^0 \in \mathbb{R}$  ( $x^0$  – параметр сдвига), получаем

$$E_w = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi_{w\pm}}{dx} \right)^2 + W_{GLH}(\psi_{w\pm}) \right] dx = 2\kappa\sqrt{2}/3, \quad (52)$$

где  $E_w$  – поверхностная плотность энергии стенки, сконцентрированная, вообще говоря, в тонком слое. Значение

$$\delta_w = \left[ \frac{d^2 W_{GLH}}{d\psi^2}(\psi_{w\pm}) \right]^{-1/2} = 1 / (\varkappa\sqrt{2}) \approx 0.7071068/\varkappa \quad (53)$$

связано с понятием толщины стенки (или плёнки), а значение  $E_w$  совпадает со значением

$$\sigma_w = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d\psi_{w\pm}}{dx}(x) \right]^2 dx = 2\varkappa\sqrt{2}/3 \approx 0.942809 \varkappa, \quad (54)$$

которое определяет поверхностное натяжение плёнки (см., в частности, [15], где изучаются более общие задачи с потенциалами типа ГЛХ с «перекошенными вакуумами», возникающие как в нелинейной теории поля, так и в нелинейной физике сложных сред для моделей типа «пузырей» и «капель»).

В стационарном одномерном случае ( $N = 1$ ,  $x = x_1$ ) из (48), (49) следует ОДУ (6) при  $x \in \mathbb{R}$ ; фазовый портрет для решений этого ОДУ см. на рис. 3.

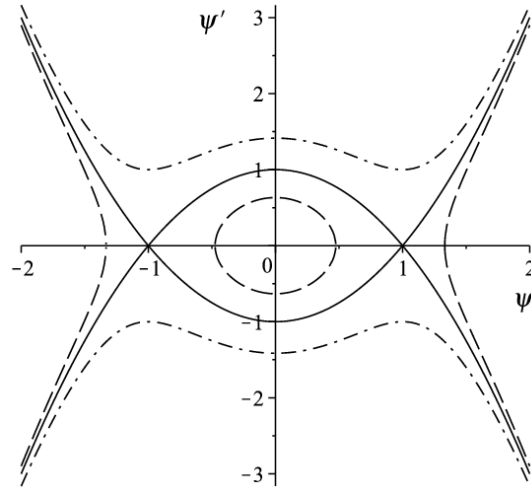


Рис. 3. Фазовый портрет для решений ОДУ (1) при  $\varkappa = \sqrt{2}$

Здесь гомоклиническая орбита, образованная двумя гетероклиническими орбитами между точками  $\{\psi, \psi'\} = \{-1, 0\}$  и  $\{\psi, \psi'\} = \{1, 0\}$ , отвечает решениям (51); внутри этой «ячейки» замкнутые орбиты образованы периодическими эллиптическими функциями Якоби (см. Замечание 4); «усы» из точек  $\{\psi, \psi'\} = \{-1, 0\}$  и  $\{\psi, \psi'\} = \{1, 0\}$  отвечают точным сингулярным решениям ОДУ (6):

$$\psi_{\text{sing}\pm}(x - x^0) = \pm \coth \left( \frac{\varkappa}{\sqrt{2}} (x - x^0) \right). \quad (55)$$

Можно также показать, что для любого фиксированного значения  $x = x_p > 0$  ОДУ (6) обладает однопараметрическим семейством сингулярных решений («blow-up solutions»), имеющих в главном представлении

$$\psi_{\text{sing}\pm}(x - x_p) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\varkappa|x - x_p|} [1 + o(1)], \quad |x - x_p| \rightarrow 0. \quad (56)$$

Этим решениям отвечают неограниченные кривые на рис. 3. О способах выделения и изучения таких решений см., в частности, в [15].

При больших значениях  $\varkappa D > 0$  одноузловое решение  $\psi^{(1)}(x)$  нелинейной КрЗ (6), (7), с учётом ограничения (11), вообще говоря, будет близко к функции

$$\psi_{w-}(x - D/2) = \tanh\left(\varkappa(D/2 - x)/\sqrt{2}\right)$$

(см. (51)). В частности, при  $D = 7$  и  $\varkappa = 1.5$  графики этих функций практически совпадают.

## 6. Заключение

В заключение отметим, что хотя ОДУ (6) хорошо известно в нелинейной теории поля и космологии, подробное изучение КрЗ (6), (7) на конечном интервале нам неизвестно. На наш взгляд, исследования данной работы могут также представлять интерес для специалистов по изучению и применению эллиптических функций Якоби вещественного аргумента.

## Литература

1. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1950. — Т. 20, № 12. — С. 1064–1082.
2. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1982. — 238 с.
3. Zharkov G. F. First and Second Order Phase Transitions and Magnetic Hysteresis in a Superconducting Plate // Journal of Low Temperature Physics. — 2003. — Vol. 130, No 1/2. — Pp. 45–67.
4. Жарков Г. Ф. Сверхпроводящие состояния и магнитный гистерезис в сверхпроводниках конечного размера // Успехи физических наук. — 2004. — Т. 174, № 9. — С. 1012–1017.
5. Аналитико-численные исследования нелинейной краевой задачи для сверхпроводящей пластины в магнитном поле / А. Л. Дышко, Г. Ф. Жарков, Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 9. — С. 1651–1676.
6. Konyukhova N. B., Kurochkin S. V. On Nonlinear Ginzburg–Landau Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field // International Scientific Journal Spectral and Evolution Problems. — 2007. — Vol. 17. — Pp. 125–136. — (Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University; e-print: <http://www.kromsh.info/>).
7. Kwong M. K. On the One-Dimensional Ginzburg–Landau BVPs // Differential and Integral Equations. — 1995. — Vol. 8, No 6. — Pp. 1395–1405.
8. Marcus P. M. Exact Solution of the Ginzburg–Landau Equations for Slabs in Tangential Magnetic Fields // Reviews of Modern Physics. — 1964. — Pp. 294–299.

9. Keller H. B., White A. B. JR. Difference Methods for Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1975. — Vol. 12, No 5. — Pp. 791–802.
10. Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990. — 128 с.
11. Rachůnková I. Multiple Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems and Topological Degree // Proc. Conf. on Differential Equations and Their Applications (EQUADIFF 9; held in Brno, August 25–29, 1997). — Brno: Masaryk Univ., 1997. — Pp. 147–158.
12. Янке М. Ф., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1977. — 344 с.
13. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1977. — 224 с.
14. Лаврентьев М. Ф., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1956. — 716 с.
15. Bubbles and Droplets in Nonlinear Physics Models: Analysis and Numerical Simulation of Singular Nonlinear Boundary Value Problem / N. B. Konyukhova, P. M. Lima, M. L. Morgado, M. B. Soloviev // Comput. Math. Math. Phys. — 2008. — Vol. 48, No 11. — Pp. 2018–2058. — (Pleiades Publishing, Ltd., 2008).

UDC 519.63

## On an Auxiliary Nonlinear Boundary Value Problem in the Ginzburg–Landau Theory of Superconductivity and its Multiple Solutions

N. B. Konyukhova, A. A. Sheina

*FRC CSC of RAS, Moscow, Russia*

We realize analytic-numerical investigation of a homogeneous boundary value problem (BVP) for a second-order ordinary differential equation (ODE) with cubic nonlinearity and two real parameters which arises from the Ginzburg–Landau theory of superconductivity. Multiple non-trivial solutions to this problem depending on the specified parameters are expressed through the Jacobi elliptic functions and describe the stationary states (near the critical values of temperature) of a superconducting infinite plate of a finite thickness without magnetic field. It is a “degenerate” problem with respect to the original nonlinear BVP for a superconducting plate in a magnetic field and is important to construct algorithm for finding all the solutions to the indicated input problem in a wide range of the parameters. Studied problem is of separate mathematical interest by itself.

**Key words and phrases:** The Ginzburg–Landau theory of superconductivity, stationary states of a superconducting plate without magnetic field, nonlinear second-order ordinary differential equation (ODE), homogeneous boundary value problem (BVP) and its multiple solutions

### References

1. V. L. Ginzburg, L. D. Landau, On the Theory of Superconductivity, Journal of Experimental and Theoretical Physics 20 (12) (1950) 1064–1082, [English transl. in: Men of Physics: L.D. Landau. Ed. D. ter Harr. — Oxford: Pergamon, 1965. Pp. 138–167].
2. V. V. Schmidt, Introduction in Physics of Superconductors, FIZMATLIT, Moscow, 1982, in Russian.
3. G. F. Zharkov, First and Second Order Phase Transitions and Magnetic Hysteresis in A Superconducting Plate, Journal of Low Temperature Physics 130 (1/2) (2003) 45–67.

4. G. F. Zharkov, Superconducting States and Magnetic Hysteresis in Finite Superconductors, *Physics–Uspekhi* 47 (9) (2004) 944–949.
5. A. L. Dyshko, G. F. Zharkov, N. B. Konyukhova, S. V. Kurochkin, Analytic-Numerical Investigation of the Nonlinear Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field, *Comput. Maths Math. Phys.* 45 (9) (2005) 1593–1617.
6. N. B. Konyukhova, S. V. Kurochkin, On Nonlinear Ginzburg–Landau Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field, *International Scientific Journal Spectral and Evolution Problems* 17 (2007) 125–136, (Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University; e-print: <http://www.kromsh.info/>).
7. M. K. Kwong, On the One-Dimensional Ginzburg–Landau BVPs, *Differential and Integral Equations* 8 (6) (1995) 1395–1405.
8. P. M. Marcus, Exact Solution of the Ginzburg–Landau Equations for Slabs in Tangential Magnetic Fields, *Reviews of Modern Physics* (1964) 294–299.
9. H. B. Keller, A. B. White JR., *Difference Methods for Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 12 (5) (1975) 791–802.
10. V. I. Arnold, *Theory of Catastrophes*, Nauka, Moscow, 1990, in Russian.
11. Rachůnková, I., Multiple Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems and Topological Degree, in: *Proc. Conf. on Differential Equations and Their Applications (EQUADIFF 9; held in Brno, August 25–29, 1997)*, Masaryk Univ., Brno, 1997, pp. 147–158.
12. E. Jahnke, F. Emde, F. Lesch, *Tables of Functions with Formulae and Curves*, Stechert, New York, 1938.
13. H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, The Macmillan Company, New York, 1961 (4th ed.).
14. M. F. Lavrent'ev, B. V. Shabat, *Methods of Theory of Complex Variable Functions*, FIZMATLIT, Moscow, 1956, in Russian.
15. N. B. Konyukhova, P. M. Lima, M. L. Morgado, M. B. Soloviev, Bubbles and Droplets in Nonlinear Physics Models: Analysis and Numerical Simulation of Singular Nonlinear Boundary Value Problem, *Comput. Math. Math. Phys.* 48 (11) (2008) 2018–2058, (Pleiades Publishing, Ltd., 2008).