DOI: 10.22363/2224-7580-2025-3-119-145
EDN: GSIABJ

МАТЕМАТИКА И МЕТАФИЗИКА БЕСКОНЕЧНОГО

С.А. Векшенов
Российская академия образования
Российская Федерация, 119121, Москва, ул. Погодинская, д. 8

Аннотация. В современных теоретических построениях можно проследить взаимодействие двух ключевых абстракций: геометрической (материальной) точки и некой целостности, идейным источником которых являются монады Г.В. Лейбница. Идея точки, восходящая к геометрии Евклида, получила фундаментальный импульс в теории множеств благодаря введению актуальной (завершенной) бесконечности. Вместе с тем эксперименты А. Аспекта убедительно показали, что на фундаментальном уровне точечные объекты не могут существовать. Таким образом, целостные монады становятся основной абстракцией квантового уровня материи. Как и в случае материальной точки, дальнейшее развитие этого подхода требует определяющего идейного импульса, который может дать только актуальная бесконечность. Это уже другая, порядковая бесконечность, принципиально отличающаяся от теоретико-множественной, количественной бесконечности. Развитию данного подхода посвящен ряд работ автора. Данная статья является, по сути, кратким конспектом этих работ, в котором сформулированы исходные положения и основные результаты, без обсуждения частных вопросов и следствий.

Ключевые слова: метафизика бесконечного, геометрическая точка, целостные монады, актуальная бесконечность, абстракция квантового уровня материи

Введение

Математическая практика показывает, что наиболее значимые продвижения возникают в процессе решения так называемых «неразрешимых» проблем. Классическим примером является возникновение теории групп.

Как известно, она возникла в процессе поиска формулы решения в радикалах алгебраического уравнения n-й степени. Для $n = 2$ формула была известна с Античности. Для $n = 3$ и 4 такие формулы были найдены Д. Кардано и Л. Феррари соответственно. Естественное продолжение состояло в том, чтобы найти такую формулу для $n = 5$. Если бы это удалось, формула получила бы собственное имя и встала в ряд с формулами Кардано и Феррари. Однако формула упорно не находилась, что заставило искать внутренний механизм получения решений алгебраических уравнений. Из анализа этого механизма и возникло понятие группы. Именно на основе группы был получен ответ: общее уравнение 5-й степени и выше неразрешимо в радикалах.

1

Обрисованная в данной статье концепция и ее ключевые понятия – порядковой бесконечности и ее носителя – фундаментального вращения также возникли на основе анализа конкретной проблемы – так называемой континуум-проблемы, которая была сформулирована Г. Кантором в 1877 году. Суть ее состояла в том, чтобы указать место континуума на шкале мощностей или, совсем просто, – подсчитать число элементов континуума. Задача оказалась исключительно сложной и идеологически заряженной. Успешный подсчет элементов континуума превращал его автора в подобие царя Соломона, который «все измерил весом, числом и мерою» (это отчетливо понимал и сам Кантор, и наследующие ему математики). Сам Кантор считал, что мощность континуума с = $2^{\aleph_0}$ равна первому несчетному кардиналу $\aleph_1$, $c = \aleph_1$, что составило содержание континуум-гипотезы.

Значимость континуум-гипотезы и более общей континуум-проблемы в глазах современников была столь велика, что Д. Гильберт в своем знаменитом списке 23 проблем, представленном международному математическому конгрессу 1900 года, поместил ее на первое место.

Дальнейшее продвижение в этом направлении свелось практически к трем шагам.

1. Переход от «наивной» теории множеств к аксиоматической теории. Фактически теория множеств была заменена конкретной аксиоматической системой Цермело – Френкеля (с аксиомой выбора) ***ZFC***. Проблема континуума приобрела в этом контексте характер утверждения (или его отрицания), которые можно вывести из аксиом ***ZFC*** или, что то же самое, – построить соответствующие модели.

2. В 1939 году, К. Гёдель, основываясь на идеях Д. Гильберта, построил модель ***ZFC*,** в которой $c = \aleph_1$, тем самым как бы подтвердив догадку Кантора.

3. Следующий шаг в осмыслении континуум-проблемы сделан в 1963 году П. Коэном. С помощью созданного им «метода форсинга» – тонкой разработки диагонального метода – он показал, что при выполнении естественных условий можно построить модель ***ZFC*,** в которой $c = \aleph_2$, $c = \aleph_3$… .

На основании этих двух результатов делается вывод, что континуум-гипотеза не зависит от остальных аксиом ***ZFC***, или, другими словами, ресурсов аксиоматической системы ***ZFC*** не хватает, чтобы указать место континуума на кардинальной шкале.

Возможность построения названных моделей (прежде всего, моделей Коэна) опирается на теоретико-категориальную трактовку понятия мощности множества, о которой следует сказать отдельно.

В рамках «наивной» теории множеств, множество (*Menge*) имеет естественную характеристику – «мощность» (*Mäglichkeit*) или «*Cardinalzal»,* которая в случае конечного множества означает число его элементов. В случае бесконечного множества ситуация сложнее.

В работе *«Beiträge zur Begründung der transfiniten»* Кантор дает следующее *определение: «Mäglichkeit oder Cardinalzahl von M nennen wir den Allgemeinbegriff, weleher mit Hülfe unseres action Dennkvermögens dadurch aus* *der Menge M hervorgeht, dass von der Bashaffenheit ihrer vershhiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird»* (Мощностью или кардинальным числом множества *M* мы называем общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из *M*, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов *m* и от порядка из задания).

В этом случае, как говорил Н.Н. Лузин: «Мощность continuum'а, если только мыслить его как множество точек, есть некая единая реальность и она должна находиться на алефической шкале, где она есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы Ж. Адамар (*J. Hadamard*), „даже невозможно для нас, людей“» [10].

Определение Кантора очень естественно, но трудно формализуемо. В рамках системы ***ZFC*** принята другая трактовка: *Cardinalzahl* может быть определено как класс равномощных множеств (то общее, что содержится во всех равномощных множествах). Мощность (*Cardinalzahl*) данного множества определяется через принадлежность множества данному классу.

Это далеко не эквивалентные формулировки. Во втором определении ключевым понятием становится 1-1 соответствие, то есть простейший морфизм. Это привносит в теорию множеств элементы теоретико-категорной идеологии. Вместе с тем в рамках теории множеств такой морфизм сам является множеством, которое может принадлежать или не принадлежать модели ***ZFC***. Варьируя такой принадлежностью (технически это достаточно сложно), можно менять *Cardinalzahl* континуума в рамках этой модели.

На бытовом уровне эту ситуацию можно проиллюстрировать следующим образом.

Предположим, некий исследователь теории множеств получил важные результаты. Однако если у него нет телефона, адреса электронной почты, *Scopus Author ID* и иных средств связи («морфизмов»), то тогда с точки зрения современного научного собщества такого исследователя просто нет, независимо от качества и важности его работ.

Возвращаясь к теории множеств, можно сказать, что, работая с морфизмами, можно управлять отношением принадлежности, то есть строить множества с заданными свойствами.

Общий итог вышесказанному таков.

Переход от наивной теории множеств к аксиоматической системе ***ZFC*** (или какой-либо иной системе, хотя в них ситуация еще сложнее), определение *Cardinalzahl* как класса равномощных множеств, то есть вводя в определение числа весь универсум, радикальным образом искажает изначальную теоретико-множественную онтологию. Можно ли в этом случае рассматривать результаты К. Гёделя и П. Коэна как решение проблемы континуума? Ответ зависит от принятой точки зрения на проблему и общего философского контекста. Лучше всего об этом сказал Ю.И. Манин: «Какова мощность континуума? После всего, что мы узнали о языке и аксиоматике Цермело – Френкеля, возвращение к этому вопросу может показаться наивным, но оно неизбежно, если считать основной ценностью смысл» [9].

Таким образом, мы имеет два уровня решения проблемы континуума: формально-логический (а), смысловой (b):

(а) континуум-гипотеза не зависит от остальных аксиом ZFC, в этом плане континнум-гипотеза приравнивается к 5-му постулату Евклида;

(b) наличие возможности непротиворечивым образом присваивать континууму ***c*** различные мощности $c = {}_1\aleph$, $c = {}_2\aleph$, $c = {}_3\aleph$… говорит о том, что теоретико-множественная модель континуума *P(N)* в реальности ***не*** является множеством и включает в себя некий внутренний абстрактный процесс. В этом случае у континуума нет места на шкале мощностей. Соответственно, континуум-гипотеза $c = {}_1\aleph$ не может быть выведена из аксиом **ZFC.**

Выбор решения предопределяет дальнейшие действия.

Решение (а) не приводит к каким-либо значимым изменениям в математическом универсуме, кроме факта решения очень трудной задачи.

Решение (b), напротив, требует существенного переосмысления всей теоретико-множественной парадигмы, но одновременно приводит к глубоким и красивым результатам.

Разделение уровней (а) и (b) является отправной точкой всех дальнейших рассуждений, поэтому мы остановимся на нем более подробно.

Мейнстрим математики XX века определялся парадигмой: ***«Die Grenzen der Sprache sind die Grenzen der Welt»***. Сам же язык строится в соответствии с выделенными аксиомами и правилами логики. Математические объекты, в свою очередь, получались как модели аксиом, реализуемые в универсальном носителе – множестве. Это открывало для математики, казалось бы, неограниченные возможности в конструировании новых объектов. Более того, поскольку аксиоматика фиксирует только отношения между объектами, возникает множество моделей, удовлетворяющих этим отношениям. Как заметил Д. Гильберт: «Нужно всегда уметь говорить – вместо точек, прямых линий и плоскостей – столы, стулья и пивные кружки». При этом может возникнуть более тонкая ситуация – эти модели могут оказаться не изоморфными. Появление подобных моделей ведет к релятивизации утверждений, поскольку «в одной модели – одно, в другой – другое». Такая релятивизация является эффективным инструментом доказательства независимости конкретного утверждения от остальных аксиом, но никак не проясняет природу этой независимости.

В отношении проблемы континуума эта общая ситуация преломляется следующим образом.

Как известно, континуум *P(N)* невозможно вполне упорядочить (теорема Кёнига), поэтому желаемое упорядочение вносится волевым путем, с помощью аксиомы выбора. Полученное упорядочение не конструктивно, то есть не дает никаких представлений, например, о том, будет ли в нем *2 > 1.* Поскольку *P(N) a'priori* предполагается множеством, у нее должно быть определенное место на кардинальной шкале. Результаты Гёделя – Коэна фактически говорят о том, что это место нельзя зафиксировать. Для каждого кардинального числа $\aleph_\lambda$ существует модель **ZFC,** в которой $\mathbf{c} = \aleph_\lambda$**.** Это не артефакт, привнесенный формализмом, а некое глубинное свойство самого континуума

P(N), которое раскрывается в рамках формализма. В чем состоит это свойство? Очевидность в том, что мощность континуума ***c*** – это переменная величина, а сам континуум – это процессный объект. С другой стороны, одно из важнейших достижений теории множеств – это развитие теории континуума как завершенного объекта. В результате возникает, казалось бы, неустранимое противоречие:

– континуум как объект;

– континуум как неограниченный абстрактный процесс.

Простейшее и уже известное решение этого противоречия – традиционно считать континуум только объектом и остаться на логическом уровне решения континуум-проблемы.

Альтернативное решение – найти способ совместить эти, внешне противоречивые, утверждения. Возникает вопрос: есть ли резоны для такого совмещения, кроме чисто теоретических? Оказывается, есть.

Объекты, одновременно являющиеся абстрактными процессами, являются ключевыми в современной теоретической физике.

Волна де Бройля представляет собой периодический процесс, не переносящий энергию, то есть является процессной абстракцией. Трансформация волны де Бройля в вектор состояния превращает процессный объект в геометрический. Аналогичную ситуацию можно наблюдать в проективной геометрии и теории относительности. Проективные прямые – это изначально лучи света, а бесконечно удаленные точки являются «точками» стабилизации движения этого луча. Отождествление луча света с геометрическим лучом наблюдается в пространстве Минковского.

Все приведенные выше примеры показывают, что континуум-проблема высвечивает фундаментальную особенность современной теоретической мысли: подверстывание процессных объектов под теоретико-множественные структуры.

Причину этого можно увидеть в глубоко укоренной в научном сознании философии платонизма, где неизменные сущности являются единственно возможными абстракциями. Всякая изменчивость видится как нечто случайное, которое не может претендовать на такую роль.

Имеется и технический момент такой приверженности. Начиная с середины XIX века было осознано, что симметрия является универсальным инструментом установления фундаментальных взаимосвязей самой различной природы. Более того, крупнейший отечественный историк физики В.П. Визгин вообще выделял идею симметрии как ведущий методологический принцип физики XX века. Реализация этой методологии подразумевает наличие статических абстракций – множеств, на которых действуют группы преобразования. Именно этой тенденцией можно объяснить появление ключевых абстракций современной физики – пространства-времени Минковского и, соответственно, группы Лоренца. Эти абстрактные структуры реализуются в среде непрерывности, то есть в модели *P(N),* где каждое подмножество *N* отождествляется с точкой. Как было отмечено выше, *P(N)* является процессным образованием.

До определенного момента этот факт можно не принимать во внимание, оставаясь в рамках теоретико-множественной модели ради, прежде всего, теоретико-групповых дивидендов. Вместе с тем количество артефактов, в рамках этих моделей, перевалило порог, когда имеет смысл учитывать процессный характер ключевых теоретико-множественных структур.

Реализация этой программы, предпринятая в работах [2–6], включает в себя три концентра.

Первый концентр – метаматематический, который составляет идейный базис всего построения. Он содержит определение порядковой бесконечности и ее носителя – фундаментального вращения. Эти понятия дополняют фундаментальные концепты современной математики: количественной бесконечности и ее носителя – множества. Взаимодействие количественной и порядковой парадигм дает ряд принципиально важных теорем.

Второй концентр условно можно назвать «физическим». Фундаментальное вращение, периодический процесс, реализуется вне теоретико-множественного универсума. В этом качестве его можно рассматривать как базовую абстракцию квантовой теории. Соединение в одно целое двух противоположно направленных фундаментальных вращений можно отожествить со спинором. Это позволяет построить «нестандартный» квантовый формализм и получить нетривиальные результаты, касающиеся представлений группы Лоренца и их физических интерпретаций.

Третий концентр содержит конструкцию континуума как процессной среды, источником этого процесса является парное фундаментальное вращение – спинор. Данная конструкция приводит к очень важному следствию. В рамках теоретико-множественной модели имеет место следующая редукционная цепочка чисел: натуральные числа – действительные числа – комплексные числа. Процессная модель полностью оборачивает эту цепочку: комплексные числа – действительные числа – натуральные числа.

1.

Доминирующая в XX веке теоретико-множественная парадигма не является универсальной. Её взаимно-дополняющей альтернативной является процессная, порядковая парадигма.

Сущность этих парадигм заложена в самой природе числа.

Всякое число (прежде всего, натуральное) есть единство количественной и порядковой составляющих. Например, число «семь» – это может быть обозначение семи предметов или «седьмого» предмета в некотором пересчете. В теоретико-множественной парадигме седьмой предмет в пересчете моделировался семью упорядоченными элементами. В этом месте мы отойдем от этой парадигмы, и будем мыслить порядковую составляющую числа именно как пересчет, то есть некоторый **процесс,** состоящий из семи шагов.

На первый взгляд, такой разворот мало что дает. Действительно, если ограничиться только пересчетом, мы попадаем в контекст идеи «потенциальной бесконечности», все возможности которой на данный момент хорошо известны. Чтобы сделать решительный шаг к «новым берегам», необходимо изменить общее направление мысли: не «бежать» от бесконечности Кантора, а идти дальше, к ***новым видам*** актуальной бесконечности. Это значит, что необходимо найти подходы, позволяющие ввести принципиально новый тип бесконечности – ***порядковую*** бесконечность.

Отношение к понятию бесконечного в современной математике и, особенно, теоретической физике крайне неоднозначно. С одной стороны, бесконечность является неотъемлемым компонентом подавляющего большинства теоретических построений. С другой стороны, именно бесконечность постоянно находится в фокусе самой разнообразной критики и желания заменить ее чем-то более «осязаемым»: «недостижимостью», «неосуществимостью» и т.п. С особой силой этот процесс стал развиваться в контексте использования компьютера и сопутствующей ему финитной математики.

Как представляется, этот подход является контрпродуктивным. Бесконечность – не просто важнейший инструмент математики, это во многом её сущность (об этом неоднократно говорили самые выдающиеся математики). Бесконечности не стоит избегать, напротив, необходимо развивать аналитику бесконечного. Только таким путем можно получить существенное продвижение в принципиальных для математики областях.

В частности, введение принципиально нового вида бесконечности, позволяющего трансфинитным образом реализовать порядковую составляющую числа, видится нам «царским путем» преодоления очевидного кризиса современной математики.

Рассмотрим, каким образом может быть рассмотрена такая бесконечность.

В математике сложилось, по крайней мере, два способа введения новых объектов: прямая конструкция, предъявляющая объект, и аксиоматика, когда формулируется некоторое характеристическое свойство объекта и обосновывается возможность его существования.

В теории Кантора реализован конструктивный подход – количественная бесконечность непосредственно предъявляется. Для определения порядковой бесконечности такой способ не годится. Однако оказалось возможным построить аксиоматику, в рамках которой можно определить как количественную, так и порядковую бесконечность. Для этого необходимо, прежде всего, выделить характерное свойство бесконечного. Таким свойством может стать свойство «растворения» конечного в бесконечном. Иными словами, конечное полностью *теряется* в бесконечном, так что конечное в бесконечном *неразличимо*.

Формальное определение бесконечного в «аксиоматической» трактовке выглядит следующим образом.

Рассмотрим некоторый неограниченный процесс γ(при этом мы хорошо понимаем, что этим символом обозначается именно процесс, *dureé* в смысле А. Бергсона). Шаги этого процесса мы можем различать или не различать в зависимости от набора имеющихся у нас предикатов.

Предположим, что шаги процесса γразличаются некоторым предикатом $T(x,y)$, в результате чего мы видим некоторый дискретный неограниченный процесс (если шаги этого процесса не различимы никаким предикатом, то мы видим некоторую целостность, но не видим движения, а только априори знаем, что оно есть). Будем обозначать такой видимый процесс как γ_T.

Определим объект α, на котором стабилизируется процесс γ в смысле предиката $T(x,y)$, то есть шаги процесса неотличимы друг от друга в смысле предиката T. Если все объекты, порожденные процессом γ, являются *конечными*, то объект α можно считать *бесконечным относительно предиката T* (релятивизация бесконечности).

В применении к натуральному ряду данное определение работает следующим образом.

Согласно сложившимся представлениям каждое натуральное число n является единством количества n_R и порядка n_Z: $n = (n_R; n_Z)$. Введем два предиката $T_R\ (x,y)$ и $T_Z\ (x,y)$, которые различают числа n и m, в количественном и порядковом смысле. В этом случае можно образовать два бесконечных числа $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, на которых натуральный ряд стабилизируется в смысле количества и порядка соответственно, то есть $\boldsymbol{\omega}+1 =_R \boldsymbol{\omega}$, но $\boldsymbol{\omega}+1 \neq_Z \boldsymbol{\omega}$. Вместе с тем $\boldsymbol{\Omega}+1 =_Z \boldsymbol{\Omega}$, что влечет $\boldsymbol{\Omega}+1 =_R \boldsymbol{\Omega}$.

Числа $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ были определены с помощью формальной конструкции, которая требует интерпретации. Бесконечное число $\boldsymbol{\omega}$ может быть интерпретировано как первый бесконечный ординал, то есть теоретико-множественным образом.

Для интерпретации бесконечного числа $\boldsymbol{\Omega}$ требуется иной подход.

Во-первых, очевидно, что $\boldsymbol{\Omega}$ не может быть множеством. Действительно, в противном случае порядок $\boldsymbol{\Omega}$ в области множеств должен совпадать с ординальным числом (принцип соответствия). Однако в силу неограниченности шкалы ординалов $\boldsymbol{\Omega}$ допускает увеличение в смысле порядка, что противоречит его определению.

Соотношения $\boldsymbol{\Omega} + 1 =_Z \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega} + 2 =_Z \boldsymbol{\Omega}$, ... можно рассматривать как своеобразное проявление «периодичности» относительно «кванта времени» «*1*» = «→». Вне теоретико-множественного универсума все шаги «→» сливаются и $\boldsymbol{\Omega}$ становится числом, содержащим внутреннее вращение. Мы будем называть такое вращение **фундаментальным.** Оно будет играть ведущую роль во всем дальнейшем построении. Фундаментальное вращение не обладает никакими физическими характеристиками: осью вращения, частотой и пр., точно так же, как и последовательность, определяющая действительное число, не является физическим процессом.

Рассмотрим кардинальную шкалу: $0, 1, 2 \ldots n, \ldots \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \ldots \aleph_\lambda \ldots$ **(*).**

Она неограниченна, и завершить ее в рамках теории множеств невозможно (парадокс Бурали – Форти). Такая ситуация во всех существенных чертах воспроизводит парадокс несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, что в свое время послужило источником введения иррациональностей. Действительно, последовательность: 1; 1,4; 1,41; …(**) идейно похожа на последовательность (*). Для завершения последовательности (**) числом √2 потребовалось преодолеть *horror infinity* (страх бесконечного). Точно так же для завершения последовательности (*) необходимо преодолеть «страх сверхбесконечного», то есть бесконечности **Ω** более высокого уровня по сравнению с количественной бесконечностью. Однако, как будет показано ниже, бесконечность **Ω** оказалось существенно более «приземленной», чем бесконечность **ω.**

Ситуация становится более понятной, если принять во внимание следующие соображения. Легко видеть, что всякое кардинальное число $\aleph_\lambda$, являясь *бесконечным в* смысле количества, является *конечным* в смысле порядка, то есть $\aleph_\lambda+1 \neq_Z \aleph_\lambda$. Это значит, что в порядковом смысле кардинал $\aleph_\lambda$ «ведет себя» так же, как и любое конечное натуральное число. Иными словами, как порядковые, процессные, сущности последовательность кардинальных чисел (*) и последовательность натуральных чисел: *0, 1, 2… n, ..* эквивалентны. Это значит, что последовательность (*) также стабилизируется на числе **Ω.**

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. $\mathbf{\Omega} > \boldsymbol{\omega}$ *и для любого наперед заданного кардинала* $\aleph_\lambda$, $\mathbf{\Omega} > \aleph_\lambda$.

Доказательство. Поскольку каждый кардинал $\aleph_\lambda$ *одновременно является порядковым числом,* $\mathbf{\Omega} > \aleph_\lambda$.

Примечание. Неравенство $\mathbf{\Omega} > \aleph_\lambda$ является полным аналогом неравенства $\boldsymbol{\omega} > k$, где k – конечное число. Смысл последнего неравенства состоял в том, что шаг **ω** так велик, что он больше всех конечных шагов.

В свободном толковании данная теорема означает, что *порядковых чисел больше, чем количественных*. В метафизическом плане можно сказать, что сосчитываемых объектов, меньше, чем объектов нумеруемых. Это значит, что существует объект, про который можно сказать, что он «*n*-й» в некотором пересчете, но нельзя сказать, что он имеет *n* элементов (это все равно, что можно сказать «второй», но нельзя сказать «два»).

Принимая также во внимание известные философские традиции связывать количество с пространством, а бесконечность со временем, можно заключить, что *бесконечность пространства меньше, чем бесконечность времени*. Подобные утверждения не отличаются точностью, но дают повод для развития многих плодотворных образов.

Неравенство $\mathbf{\Omega} > \aleph_\lambda$ говорит о том, что области количества и порядка, вопреки интуиции, **не симметричны**. Это неожиданный и исключительно важный факт. Соединение в одном объекте несимметричных вещей должно порождать внутреннее движение и закономерности, обусловленные этим движением. Вместе с тем области количества и порядка естественным образом дополняют друг друга, как это имеет место в числе. Соединение этих качеств является источником многих нетривиальных результатов.

1.1

Объединение количества и порядка в единую концепцию означает, прежде всего, создание единой теории бесконечного.

Единая теория бесконечности – это теория о свойствах бесконечных объектов как результата стабилизации процесса $\boldsymbol{\gamma}$ *относительно предикатов* T_i *и о свойствах носителей этих бесконечностей.*

В рамках этой теории доказываются следующие ключевые теоремы.

Теорема 2. Для того чтобы из процесса γ можно было бы выделить множество, необходимо, чтобы его шаги различались, по крайней мере, двумя предикатами, T_Z и T_R.

Следствие 1. Если шаги процесса γ не различимы никаким иным предикатом, кроме предиката T_Z, их невозможно объединить в множество.

Следствие 2. Если шаги процесса γ различимы только одним предикатом T_i, он совпадает с предикатом T_Z..

Теорема 3. Если шаги процесса γ различимы предикатом T_R и если из условия, что шаги x и y различимы предикатом T_R, следует, что они различимы и предикатом T_Z и, наоборот, если они различимы T_Z, то они различимы T_R, то есть $T_R \sim T_Z$, и этот процесс эквивалентен процессу порождения натуральных чисел.

Как уже подчеркивалось, аксиома выбора определяет на континууме *P(N)* линейный порядок (фактически процесс), то есть предикат T_Z. Вместе с тем никаких иных предикатов на *P(N)* ввести невозможно, и если *a'priori* не считать *P(N)* множеством, то мы находимся в условиях следствия *1* из теоремы *2*. Таким образом, континуум *P(N)* **не является** множеством**,** что соответствует приведенным выше интуитивным рассуждениям.

1.2

Следующий важный вопрос: где «находится» носитель порядковой бесконечности – фундаментальное вращение ↻?

Очевидно, что фундаментальное вращение ↻ является процессным объектом и поэтому находится вне теоретико-множественного универсума, поскольку $\mathbf{\Omega} > \aleph_\lambda$ для любого кардиального числа. Таким образом, носитель порядковой бесконечности ↻ можно рассматривать как предельно широкое обобщение бесконечно удаленной точки, но по отношению уже ко всему теоретико-множественному универсуму *M*. Однако имеется существенное различие. Бесконечно удаленные точки принадлежат некоторому геометрическому многообразию – *абсолюту,* в то время как ↻ принадлежит многообразию процессных сущностей. Будем называть такое многообразие термином *Wirklichkeit,* противопоставляя его области *Realität* – универсуму множеств. Сами термины заимствованы из работы В. Гейзенберга *Ordnung der Wirklichkeit.* Область *Wirklichkeit* может быть спроецирована на абсолют, причем не единственным образом.

Конкретный пример.

Рассмотрим геометрический луч *l* с началом в точке *O.* Любая точка на этом луче находится на конечном расстоянии от *O.* В проективной геометрии рассматриваются также точки, находящиеся на бесконечном расстоянии от *O*, – бесконечно удаленные точки, принадлежащие абсолюту.

Рассмотрим теперь луч света *s*, который бежит вдоль луча *l.* Очевидно, что никакая причина геометрического свойства не в состоянии «остановить» движение луча *s*. Единственная возможность – замкнуть луч на себя – превратить его в процессный объект – фундаментальное вращение ↻.

В данном примере очередной раз возникает ситуация двойственности «количества» и «порядка». Эта двойственность традиционно разрешается в пользу «количества»: луч света *s* отождествляется с геометрическим лучом *l,* а фундаментальное вращение $\circlearrowright$ – с бесконечно удаленной точкой. Однако возможно и более интересное отображение, когда $\circlearrowright$ представляется, например, ориентированной окружностью.

Понятие порядковой бесконечности и ее носителя – фундаментального вращения – это понятия метаматематического уровня (как, например, понятия счетного и несчетного множества). Чтобы эти понятия стали инструментами математики и теоретической физики, необходимо определить «окна», через которые они могут подняться на более высокие «этажи» и стать рабочим инструментом этих дисциплин (предполагается, что метаматематический уровень является «нулевым» уровнем всего здания математики).

Начнем с теоретической физики.

В подавляющем большинстве физики считают, что появление бесконечности является свидетельством неблагополучия теории, и стремятся всеми силами от неё избавиться. Тем не менее именно бесконечность в форме абсолюта играет ключевую роль в теоретических построениях.

Рассмотрим это на конкретном примере.

В основополагающей статье *Zur Eiektrodynamik der beivegter Korper* А. Эйнштейн сформулировал два постулата, один из которых звучит так: «Свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью *V*, не зависящей от состояния движения излучающего тела», то есть *c* (скорость света) + $v = c$ для любой скорости *v*. Иными словами, мы имеем дело с бесконечным объектом *c*. Противоречие заключалось в том, что *c* – конечная величина и необходимо было сделать ее величиной, подобной $\pm\infty$. Есть различные пути решения этой проблемы, и они хорошо известны.

В контексте приведенного примера можно предположить, что глубинной причиной релятивистской трансформации явилась потребность в смене абсолюта. Физика изучает изменения в самом широком смысле, и в качестве инструмента изучения необходимо иметь нечто абсолютное. В механике Ньютона такими абсолютами являлись пространство и время. Но ни то ни другое не наблюдаемо само по себе, и, следовательно, их роль в качестве искомых инструментов с определенной точки зрения видится проблемной. Альтернативным инструментом может выступать физический процесс, наделенный качествами абсолюта. Этим качеством обладает (или наделен?) свет. Разумеется, это не единственный аргумент в пользу релятивизма, но весьма примечательный. Следует подчеркнуть, что идея абсолюта, как таковая, оказалась погруженной в теоретико-групповую концепцию, что восходит к идее А. Кэли, что абсолют пространства совпадает с инвариантом группы всех его преобразований. Вместе с тем изучение абсолюта (и его процессного расширения *Wirklichkeit*) *per se* открывает неизвестные ранее степени свободы. Например, фундаментальное вращение описывает периодический процесс, который реализуется в отсутствии какой-либо среды. Квантовая теория как раз имеет дело с такими процессами.

Что касается математики, то, как было подчеркнуто выше, теоретико-множественная модель континуума *P(N)* в реальности оказалась процессной и задача состоит в том, чтобы представить структуру континуума как процессного образования. Будем рассматривать ее как *сверхзадачу* всего представленного исследования. При её решении возникает множество вопросов, рассмотрение которых представляет самостоятельный интерес.

2.

Сформулируем простой математический принцип, который аккумулирует приведенные выше идеи – принцип двойственности.

В самом общем виде принцип двойственности утверждает, что каждый математический объект *A* является единством количественно и порядковой составляющей: $A = \langle A_R, A_Z \rangle$. Данный принцип является отражением фундаментальной двойственности нашего мира: каждый объект одновременно находится в пространстве (*Raum)* и времени (*Zeit*). Парадоксальным фактом является абсолютное доминирование в настоящее время количественной структурной составляющей, которое нашло свое воплощение в теории множеств. В то же время сложилось устойчивое представление, что ресурсы теоретико-множественного подхода (и его концептуального продолжателя – теории категорий) в идейном и техническом плане практически исчерпаны и требуются принципиально новые идеи. Принцип двойственности, в этом контексте, естественен и логичен, и, как будет ясно из дальнейшего, обладает большими техническими возможностями.

2.1

Рассмотрим, как применяется этот принцип к числовым системам.

а) Принцип двойственности, применительно к ***натуральным числам*** означает, что число *n* является единством количества n_R и порядка n_Z $n = \langle n_R, n_Z \rangle$, $7 = \langle 7$ элементов; 7-й по счету$\rangle$. Можно сказать также, что пересчет натуральных чисел не меняет их количества.

б) Двойственный характер ***вещественного числа*** *r* имеет несколько аспектов.

Во-первых, его можно записать как двойственность: $r = \langle$*вектор (0, r),* $\{r_n\} \to r \rangle$.

Единство количественной и порядковой составляющей обеспечивается аксиомой Кантора: «расстояние подлежащее определению точки от начала *0* равно *r,* где *r* – числовая величина, соответствующая последовательности… Чтобы взаимосвязь числовых величин с геометрией прямой линии стала полной, нужно еще добавить аксиому, состоящую просто в том, что и, обратно, каждой числовой последовательности соответствует определенная точка прямой… Я называю это утверждение аксиомой, поскольку оно недоказуемо по самой ее природе».

Во-вторых, сама последовательность r_n двойственна: она включает в себя как порядковый, так и количественный аспекты: шаги «$\to$» и длину шагов r_n. Как уже отмечалось, количественный аспект традиционно связан с пространством, в то время как в порядковом аспекте отражается идея времени (длительности). Исключительно важным обстоятельством является возможность построения изоморфной модели вещественных чисел, в которой длина шага постоянна: $r_n = constant$. Для этого необходимо рассматривать последовательности, включающие шаги противоположного направления «←», и определенным образом задать операцию сложения этих последовательностей.

Полученная модель вещественных чисел известна под названием сюрреальных чисел. Эти числа были предложены Дж. Конвеем в 70-х годах XX века по совершенно иному поводу и рассматривались как одна из экзотических конструкций, которых в математике достаточно много. В этой модели $\uparrow \sim 1$, $\downarrow \sim -1$; $\uparrow\downarrow \sim ½$ и т.д. (вертикальная запись стрелок выбрана для удобства). Названная модель обладает следующими принципиально значимыми свойствами.

1. Рассматриваемая модель целиком построена на идее порядка и, следовательно, отражает только интуицию времени, но не пространства.

2. Особенность названной модели заключается в том, что в ней появляется *идея квантования.* В самом деле, действительное число γ определяется исключительно своей структурой и характеристикой $|\uparrow|$ шага $\uparrow(\downarrow)$. В этом случае $\gamma = |\uparrow| \cdot \delta$. Фактически это и есть квантование γ, однако поскольку $|\uparrow| = 1$, ничего существенного не происходит и квантование остается на уровне идеи.

Следует сказать, что сюрреальные числа, построенные на «стрелках», интерпретируемых как «шаг влево», «шаг вправо», еще не обладают качествами, позволяющими применить в широком контексте, в частности, в квантовой теории. Ситуация принципиально изменяется, если заменить линейное движение на круговое с интерпретацией: «вращение по часовой стрелке», «вращение против часовой стрелки».

в) Рассмотрим применение принципа двойственности к комплексным числам.

Существуют различные формы представления комплексного числа z: $a + ib$, (a,b), $re^{i\varphi}$. Остановимся на экспоненциальной форме. Представим ее в следующем виде:

$$z = \langle r, e^{i\varphi} \rangle. \qquad (*)$$

Будем понимать эту запись как вращение, сохраняющее длину вектора r:

$$z = \langle |\vec{r}|, e^{i\lambda\varphi} \rangle. \qquad (**)$$

Формула (**), строго говоря, не определяет число, поскольку в него входит вращение в непрерывной среде. Чтобы сделать эту структуру числом, необходимо изъять из рассмотрения эту среду (совершенно аналогично тому, как для сложения 5 яблок и 2 башмаков необходимо изъять из рассмотрения «башмаки» и «яблоки» и осуществить сложение двух абстрактных количеств: 2 и 5). В результате такого изъятия получается соотношение

$$z = \langle|\vec{r}|,\ \circlearrowleft(\lambda)\rangle, \qquad (***)$$

где $\circlearrowleft(\lambda)$ – последовательность фундаментальных вращений, которая в десятичной записи соответствует числу λ. Введем естественные аксиомы, связывающие векторную и процессную часть числа:

$$\circlearrowleft \sim \vec{r},\ \circlearrowright \sim -\vec{r},\ \circlearrowleft\circlearrowleft = \vec{r}+\vec{r}.$$

Формула (***) ассоциируется с парой действительных чисел и, таким образом, в точности соответствует комплексному числу. В более свободной форме будем записывать это число в виде $z = \langle\vec{r},\ \circlearrowleft(\lambda)\rangle$.

Фундаментальное вращение $\circlearrowleft(\circlearrowright)$ можно рассматривать как абстракцию кругового движения и, следовательно, как упомянутой выше формы сюрреальных чисел, где стрелки $\uparrow(\downarrow)$ заменены фундаментальными вращениями $\circlearrowleft(\circlearrowright)$. Будем называть эти числа $\mathscr{P}$-числами.

2.2

$\mathscr{P}$-числа позволяют предельно компактно представить основные структуры клиффордовых алгебр. В частности, $\mathscr{P}$-число $\circlearrowright\circlearrowleft$, соотносится с $e^{i\frac{1}{2}\varphi}$, следовательно фундаментальное вращение $\circlearrowleft\circlearrowright$ соотносится с 4π-периодичностью, то есть является спинором. Опираясь на аксиомы, связывающие векторную и процессную часть комплексного числа, можно показать, что $\mathscr{P}$-число $\circlearrowright\circlearrowleft$ генерирует изотропный вектор $\vec{r} \in R^3$, а следовательно, вектор Паули $\vec{\sigma}$.

Особенность приведенного подхода к определению спинора заключается в следующем. В теоретико-множественном мире (область *Realität*) для определения спинора нужен некий «пробный» объект, который при вращении на 4π возвращается к себе, а при вращении на 2π перейдет в противоположный объект. В области *Wirklichkeit* все существенно проще: свойство «иметь период 4π» в этой области становится объектом – «периодом 4π», то есть $\mathscr{P}$-числом $\circlearrowright\circlearrowleft$.

В целом соответствие между важными для физики структурами Cl_n и $\mathscr{P}$-числами выглядит следующим образом.

Комплексное число z: $z = \langle\vec{r},\ \circlearrowleft)\rangle$.

Спинор Картана *s: s* $= \langle\vec{\sigma},\ \circlearrowright\circlearrowleft)\rangle$, где σ-вектор Паули.

Спинор Дирака *d: d* $= \langle\vec{\gamma}, \circlearrowleft\circlearrowright\circlearrowright\circlearrowleft\rangle$, где γ-вектор, составленный из γ-матриц Дирака.

Спинор Ми (восьмикомпонентный спинор) δ: $\delta = \langle\vec{\theta}, \circlearrowleft\circlearrowright\circlearrowright\circlearrowleft\circlearrowleft\circlearrowright\circlearrowright\circlearrowleft\rangle$, где $\vec{\theta}$ – вектор, составленный из матриц 8×8 и т.д.

Данная цепочка обладает примечательными свойствами:

– согласно правилам модели Конвея, каждое $\mathscr{P}$-число является квадратным корнем из предыдущего $\mathscr{P}$-числа: $\sqrt{}$ ↺ = ↻↺, $\sqrt{}$ ↻↺ = ↺↻↻↺, $\sqrt{}$ ↺↻↻↺ = ↺↻↻↺↺↻↻↺ и т.д.;

– начиная со спиноров Картана, структура $\mathscr{P}$-числа определяет соответствующую «векторную» структуру: $\vec{\sigma}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\theta}, \ldots$. Например, структура ↺↻↻↺ является парой противоположных по знаку спиноров Картана, которые вращаются независимо друг от друга. Каждый такой спинор определяется вектором $\vec{\sigma}$, следовательно, структуру ↺↻↻↺ можно представить матрицей $\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \vec{\gamma}$.

2.3

Приведенные выше идеи и соотношения позволяют по-иному взглянуть на сущность формализма квантовой теории. Остановимся на ключевых моментах.

Основой традиционного формализма квантовой теории, как известно, является гипотеза де Бройля, который, по выражению А. Эйнштейна, «подняла полог Великого занавеса». Суть этой гипотезы такова. «Пусть при $t = 0$ движущийся объект совмещен в пространстве с некой волной частотой ν и, как определено выше, распространяющейся в том же направлении со скоростью β/c. Такая волна, со скоростью больше *c,* не может быть связана с переносом энергии. Мы рассматриваем ее лишь как фиктивную волну, ассоциируемую с движением объекта».

Главным моментом здесь является наличие фиктивной волны $\psi(t)$ (*onde fictive*) – периодического процесса, протекающего внутри частицы. Строго говоря, фиктивная волна $\psi(t)$ – это принципиальная новая, динамическая, абстракция, с помощью которой можно описать явления на фундаментальном уровне. Однако эта абстракция половинчатая. В частности, она требует наличия на фундаментальном уровне непрерывной среды, что априори не очевидно. Тем не менее с помощью этой абстракции можно объяснить, рассчитать и предсказать множество феноменов, прежде всего, сам феномен квантования.

Дальнейшая логика развития гипотезы де Бройля следующая.

Фиктивная волна $\psi(t)$ трансформируется в вектор состояния $\psi(t)\rangle$ гильбертова пространства *H, где* $\psi(t)\rangle = e^{i\nu t}\rangle$.

Частота ν – это числовая характеристика $e^{i\nu t}\rangle$. Но $e^{i\nu t}\rangle$ – это вектор, то есть некоторая целостность и для извлечения ν из $e^{i\nu t}\rangle$ нужен некоторый «ритуал». Это можно сделать, взяв производную по t и получить соотношение

$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi\rangle = \nu\psi\rangle$. Это соотношение может быть интерпретировано как действие оператора $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi\rangle$ на вектор $\psi\rangle$. В этом случае частота ν становится собственным значением этого оператора. Данная интерпретация определила магистральное развитие формализма квантовой теории. С полной определенностью оно было сформулировано Э. Шредингером и вынесено в заглавие его основополагающей статьи: «*Quantisierung als Eigenwertproblem*» (квантование как проблема собственных значений). Важность этого предположения столь велика, что логично назвать её парадигмой Шредингера. Глубинный смысл этой парадигмы состоит в том, что частота ν, будучи характеристикой периодического процесса, одновременно является геометрическим понятием – собственным вектором оператора $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi\rangle$. Иными словами, парадигма Шрёдингера утверждает тождество геометрической и процессной характеристики. Аналогичное тождество составляет содержание аксиомы Кантора, которая была сформулирована в п. 2. Таким образом, в парадигме Шрёдингера отражается общая тенденция теоретико-множественной математики: подверстывание процессной составляющей под теоретико-множественные, геометрические структуры.

Очевидно, что в процессной модели действительных чисел, построенной с помощью стрелок ↑(↓) потребность в подобных аксиомах не возникает.

В случае парадигмы Шрёдингера такой альтернативой являются $\mathscr{P}$-числа, состоящие из последовательностей фундаментальных вращений. В этом случае экспонента $e^{i\lambda\varphi}$ заменяется последовательностью ↺↻↻↺↺… = ↺ (λ). Можно сказать, что фундаментальное вращение ↺ (λ) является «упакованной волной». Необходимость непрерывной среды в этом случае отпадает.

Соотношение геометрического и процессного подходов можно хорошо видеть в следующем.

Как известно, состояние квантовой системы $\psi\rangle$ не изменится, если домножить его на комплексное число $e^{i\varphi}$, то есть состоянием системы является лучом в гильбертовом пространстве. Вместе с тем, умножение на $\psi\rangle$ на $e^{i\varphi}$– это просто поворот $\psi\rangle$. Таким образом мы имеем соответствие между лучами в H и простейшими $\mathscr{P}$-числами. Этот фундаментальный факт реализуется, в частности, в конструкции Пенроуза.

Особенностью $\mathscr{P}$-чисел является то, что они одновременно являются и структурной периодического процесса и вещественными числами.

Очень важный момент.

$\mathscr{P}$-числа ↺ (λ) = ↺↻↻↺↺… можно понимать как «протокол» вращения (в различных направлениях) первого элемента последовательности ↺. Можно сказать, что вращение ↺ оставляет «следы»: ↺, ↺↻, ↺↻↻, ↺↻↻↺… При определенных условиях эти следы можно собрать в множество [4]. Каждому такому следу можно приписать число, в общем случае, вещественное. Например, приведенную выше последовательность следов вращения ↺ можно записать в виде $k,\ \frac{1}{2}k,\ \frac{1}{4}k,\ \frac{3}{8}k, \dots$, где k – некоторая числовая характеристика фундаментального вращения ↺ *и* $k \neq 1$. В дальнейшем будет показано, что коэффициент k численно равен постоянной Планка $\hbar$. Таким образом, если с физической величиной ξ соотнести $\mathscr{P}$-число, то его «следы» зададут спектр квантования этой величины.

В простейших случаях «следы» можно однозначно генерировать из первого элемента. Будем обозначать эту возможность как $\mathscr{P}(\lambda+)$, где λ – десятичная запись начального $\mathscr{P}$-числа. Например, $\mathscr{P}$(1/2+) = ↻↺, ↻↺↻↺, ↻↺↻↺↻↺… В десятичной записи этой последовательности выглядит так: $\frac{1}{2}\hbar,\ \hbar,\ \frac{3}{2}\hbar, \dots$

Таким образом, вырисовывается новая парадигма квантования, которую можно, по аналогии с парадигмой Шрёдингера, формулировать так: *«Quantisierung als Prozessschrittproblem»* (квантование как проблема следов процесса).

2.4

Всякий квантово-механический формализм должен, так или иначе, выходить на уравнение Шрёдингера и другие уравнения. Логика получения этих уравнений хорошо известна, однако в отсутствии среды непрерывности и, собственно, функции ψ необходим иной подход.

Пользуясь конструкцией, аналогичной конструкции А.П. Ефремова, предложенной для обеспечения стабильности алгебр [8], можно показать, что $\mathscr{P}$-число (спинорная структура) ↻↺ определяет математическую форму уравнения Шрёдингера, которую легко дополнить до канонической формы:

$$↻↺ \Rightarrow \hbar i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi.$$

Принимая во внимание тот факт, что двухкомпонентный спинор является первичным «кирпичиком» ключевых структур квантовой теории, то же самое относится и к уравнению Шрёдингера.

Квадратный корень из $\mathscr{P}$-числа ↻↺ является $\mathscr{P}$-числом ↺↻↻↺. Эта также спинорная структура, и, следовательно, ей соответствует уравнение, структурно эквивалентное уравнению Шрёдингера, то есть в левой части должно стоять выражение $\hbar i \frac{\partial \psi}{\partial t}$. Вместе с тем это уравнение можно считать «квадратным корнем из уравнения Шрёдингера», то есть уравнением вида $\hbar i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{H}\psi$. Принимая во внимание связь структуры ↺↻↻↺ с γ-матрицами, получаем уравнение Дирака.

2.5

Ценность всякого формализма определяется его возможностями решать возникающие задачи. Рассмотрим схему применения нестандартного формализма к построению представлений группы Лоренца. Важность этой задачи заключается в следующем. Согласно концепции В. Гейзенберга, на фундаментальном уровне единственной наблюдаемой является энергия, представленная в дискретном виде. Эта дискретность определяется симметриями, реализованными в представлениях группы вращений.

В свою очередь, гипотеза Ю. Вигнера утверждает, что, элементарная частица определяется неприводимым унитарным представлением группы Пуанкаре. Можно показать, что достаточно рассмотреть неприводимые унитарные представления группы Лоренца. Соединяя концепцию Гейзенберга и гипотезу Вигнера, можно заключить, что унитарные неприводимые представления группы Лоренца определяют спектр энергетических состояний, которые можно интерпретировать как элементарные частицы.

Для построения этого спектра используется специальная техника, предложенная, например, Ван дер Вардененом. Названный спектр представляется в виде диаграммы Вейля.

Далее мы приведем схему построения диаграммы Вейля, опираясь только на структуру из $\mathscr{P}$-чисел. Основные шаги этого построения таковы.

Как известно, специальная группа Лоренца $O(1,3)$ изоморфна группе $SL(2,C)$, которая представляет собой комплексификацию группы $SU(2)$: $SL(2,C) \sim SU(2) + iSU(2)$.

Зададимся вопросом: как можно охарактеризовать представление группы вращений? По определению представления группы – это любое действие группы на каком-либо множестве. Действие группы вращения – это вращение, причем неважно, какого объекта. Иными словами, представление группы вращений характеризуется структурой вращений как таковых, то есть умозрительных, фундаментальных вращений.

Как было показано выше, $\mathscr{P}$-число ↻↺ ассоциируется с двухкомпонентным спинором. Согласно арифметике , $\mathscr{P}$-чисел, $\mathscr{P}$-число ↻↺ ~ ½ (константу $\hbar$ в данном случае положим равной *1*).

Будем рассматривать ↻↺ как базовое представление $SU(2)$.

Опираясь на сформулированный выше принцип: «*Quantisierung als Prozessschrittproblem*», можно заключить, что каждый поворот ↻↺ формирует новый «след» ↻↺, который в соединении с предыдущими следами дает представление $SU(2)$. Отметим, что поворот может осуществляться как по часовой, так и против часовой стрелки. Общая структура всех «следов» (представлений $SU(2)$) изображена на рис. 1:

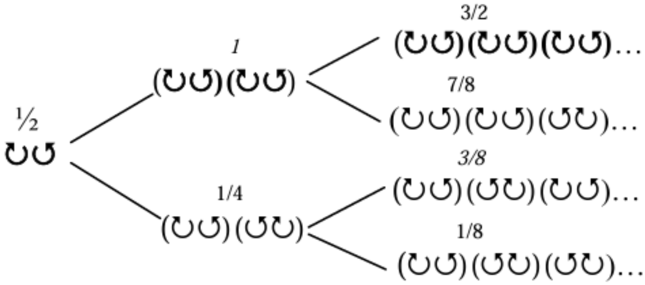

Рис. 1
Источник: составлено автором.

Нас будет интересовать самая верхняя ветвь, то есть последовательность поворотов одного направления:

↻↺, (↻↺)(↻↺), (↻↺)(↻↺)(↻↺)…
1/2 *1* 3/2

Соединим две такие последовательности в единую диаграмму Вейля, отражающую спектр представления группы $SL(2,C) \sim SU(2) + iSU(2)$. Принцип построения этой диаграммы напоминает работу кодового замка:

(↻↺, 0) ~ базис *1* ~ $\left(\frac{1}{2},0\right)$;

(0, ↻↺) ~ базис *2* ~ $\left(0,\frac{1}{2}\right)$;

(↻↺,↻↺) ~ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

(↻↺↻↺,↻↺) ~ $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ и т.д.

Диаграмма Вейля выглядит следующим образом (рис. 2).

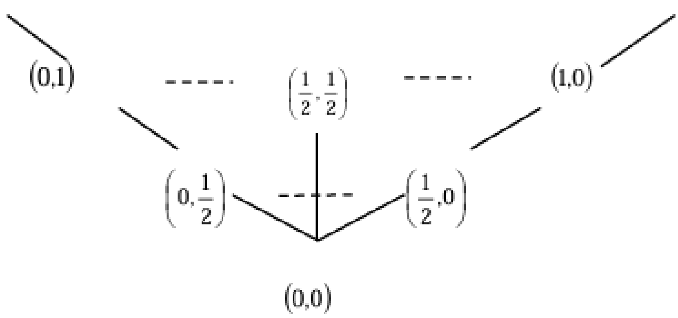

Рис. 2
Источник: составлено автором.

Полезно сравнить способы построения диаграммы Вейля с помощью «кодового замка» и тензорного произведения представлений группы Лоренца [1]:

$$\tau_{\frac{k}{2},\frac{r}{2}} = \tau_{\frac{k}{2},0} \otimes \tau_{0,\frac{r}{2}} \cong \underbrace{\tau_{\frac{1}{2},0} \otimes \tau_{\frac{1}{2},0} \otimes \tau_{\frac{1}{2},0} \ldots \otimes \tau_{\frac{1}{2},0}}_{k-раз} \otimes \underbrace{\tau_{0,\frac{1}{2}} \otimes \tau_{0,\frac{1}{2}} \otimes \tau_{0,\frac{1}{2}} \ldots \otimes \tau_{0,\frac{1}{2}}}_{r-раз}.$$

Очевидны параллели:

– представления $\tau_{\frac{1}{2},0}$ и $\tau_{0,\frac{1}{2}}$ соответствуют базисам (↻↺, 0) и (0, ↻↺);

– тензорное произведение ⊗ реализуется через повороты структуры ↻↺.

Сформулируем полезные соотношения.

Пусть k и r – число оборотов, считая от базиса, каждого из $\mathscr{P}$-чисел ↻↺. Образуем два числа:

а) $s = |k - r|$ – относительное число оборотов;

б) $m = (k+1)(r+1)$ – общее число оборотов.

Учитывая все вышесказанное, число m можно отожествить с числом неприводимых представлений группы $SL(2,C)$ (по верхней ветви), что соотносится с числом состояний некоторой физической величины.

Основываясь на концепции Гейзенберга, что на фундаментальном уровне нет иной величины, кроме энергии, можно считать, что $E \sim (k+1)(r+1)$. Напомним, что речь пока идет только о верхней ветви структуры, представленной на рис. 1. Таким образом, диаграмма Вейля определяет спектр энергии на фундаментальном уровне. Каждый элемент этой диаграммы определяет неприводимое представление группы Лоренца и, согласно гипотезе Вигнера, определяет «элементарную частицу». Тогда относительное вращение s определяет ее спин. Поскольку один оборот ↻↺ дает вклад ½, k *и* r необходимо заменить на $\frac{k}{2}$ и $\frac{r}{2}$. Таким образом, возникают две формулы:

а) формула спина $s = \left|\frac{k}{2} - \frac{r}{2}\right|$, где k и r означают соответствующее число оборотов (которые совпадают с числом соответствующих представлений группы Лоренца);

б) формула энергии $E \cong (\frac{k}{2}+1)(\frac{r}{2}+1)$ или $E = E_0(\frac{k}{2}+1)(\frac{r}{2}+1)$. Соответственно, масса m элементарной частицы с параметрами k и r определяется как $m = m_0(\frac{k}{2}+1)(\frac{r}{2}+1)$. Последняя формула с необходимыми уточнениями физического характера, в частности, $m_0 = e_0$, где e_0 – заряд электрона, была впервые выведена В.В. Варламовым в 2015 году на основе достаточно тонкой разработки традиционных для квантовой механики формализмов.

2.6

Приведенный выше механизм «кодового замка» был привязан к группе $SL(2,C)$. Однако это вполне самостоятельный способ получения мультиплетов, который может дать крайне интересные результаты. Сделаем несколько шагов в этом направлении.

Рассмотрим еще раз соотношение

$$\sqrt{}\ ↺ = ↻↺,\ \sqrt{}\ ↻↺ = ↺↻↻↺,\ \sqrt{}\ ↺↻↻↺ = ↺↻↻↺↻↺↺↻\ldots$$

Извлечение квадратного корня из $\mathscr{P}$-числа ↺ дает спинор ↻↺, что можно рассматривать как появление новой степени свободы физического объекта. Спинор ↻↺ описывает нерелятивистский электрон, более того, в полностью математизированном подходе, можно считать, что спинор ↻↺ и есть электрон.

Извлечение квадратного корня из $\mathscr{P}$-числа ↻↺, $\sqrt{}$ ↻↺ = ↺↻↻↺ дает новую степень свободы – это уже релятивистский электрон. Применение «кодового замка» к $\mathscr{P}$-числу ↺↻↻↺ дает многообразие объектов, которые можно отождествить с элементарными частицами. Можно сказать, что элементарные частицы – это энергетический спектр релятивистского электрона.

Пойдем дальше. Извлечем квадратный корень из $\mathscr{P}$-числа ↺↻↻↺,

$\sqrt{\ }$ ↺↻↻↺ = ↺↻↻↺↻↺↺↻. Получившийся восьмикомпонентный спинор отождествим с атомом водорода. Применим «кодовый замок» к $\mathscr{P}$-числу ↺↻↻↺↻↺↺↻, полученный спектр действительно дает в хорошем приближении энергетический спектр водорода. Далее, еще Э. Маделунг отметил, что энергетический спектр водорода схож с периодической системой Менделеева, что дало основания применять для нумерации элементов этой системы «водородные» числа *n, l, m, s*.

Отметим два момента.

Спинор ↻↺ входит в структуру спинора ↺↻↻↺↺↻↻↺. Это можно трактовать как включение электрона в структуру атома водорода. Более того, энергетические уровни атома водорода определяются, в частности, набором $\mathscr{P}$-чисел ↻↺. Используя аналогию Маделунга, можно сказать, что набор электронов является одном из факторов, влияющих на вид химического элемента. Таким образом, идея Бора о роли электронов в построении химических элементов получает формальное подкрепление. Несомненно, физический редукционизм, когда физическая система полностью определяется её элементами, имеет крайне ограниченную область применения и, заведомо, не имеет место в квантовом мире. Однако математический редукционизм, когда конструкции строятся, в частности, на основе спинора конкретного вида, не только допустим, но и необходим.

Второй момент связан с пониманием спинора как вращения с периодом 4π. Есть глубокое убеждение, что именно такое вращение является основным содержанием этого понятия. В области *Wirklichkeit* вращение с периодом 4π столь же естественно, как и вращение с периодом 2π. в области *Realität* (универсуме множеств). Все имеющиеся подходы к определению спинора: многолистность, удвоение и т.п. – это способы проекции *Wirklichkeit* в *Realität* с целью представления вращения с периодом 4π.. При этом объект «период 4π.» трансформируется в свойство теоретико-множественного объекта X «иметь период вращения 4π.. Работать с периодами как с объектами исключительно просто и понятно. Существенно проще и естественнее, чем с представлениями групп вращения.

В заключении сделаем еще один шаг.

Извлечем квадратный корень из восьмикомпонентного спинора (водорода):

$\sqrt{\ }$ ↺↻↻↺↻↺↺↻. В результате получится 16-компонентный спинор. Можно предположить, что за этим спинором стоит конкретный физический объект, включающей в себя атом водорода и имеющей дополнительные степени свободы. Применение «кодового замка» к этому спинору дает некоторый спектр чисел, которые можно отождествить с энергетическим спектром названного физического объекта. Возможно, это имеет место в реальности.

3

Перейдем к выяснению процессной структуры континуума.

Согласно следствию *1* теоремы *2* теоретико-множественная модель континуума *P(N)* в действительности **не** является множеством. Однако это следствие не предлагает никакой конкретной структуры, процессов, реализующих эту **не**-множественность. К выяснению этой структуры мы и переходим. Более того, необходимо выявить источники и механизмы, обеспечивающие реализацию этих процессов. В рамках теории множеств последняя задача, понятно, не возникает.

В более общем контексте задачу можно поставить так.

Континуум как теоретико-множественная структура соединяет в себе все три базовые структуры по Бурбаки: алгебраическую структуру, топологическую структуру, структуру порядка. Задача состоит в том, чтобы трансформировать структуру порядка в полноценную процессную структуру.

Выявить эту структуру достаточно просто.

Все элементы континуума в модели Конвея – последовательности из ↑ и ↓ получаются путем «перемешивания» двух последовательностей {↑} и {↓}, при этом все последовательности реализуются *одновременно*. Это очень похоже на суперпозицию двух противоположностей {↑} и {↓}, а сам континуум становится неким подобием кубита.

Это наблюдение, однако, мало что добавляет к теоретико-множественной модели континуума, пока не будут выявлены источники внутреннего движения, реализованные в этих процессах.

Как уже упоминалось выше, *P(N)* содержит в себе неустранимое внутреннее движение, обусловленное возможностью осуществления диагональной процедуры, позволяющей получить новый элемент множества, после того как все его элементы собраны в одно целое. Это процедура, а в реальности – диагональный процесс, является фундаментальной характеристикой непрерывности как таковой. Именно диагональный процесс является инструментом построения моделей континуума в доказательстве Коэна. Более того, в хрестоматийном определении топологического пространства можно увидеть обобщение принципа вложенных отрезков Кантора, который, в свою очередь, эквивалентен диагональному процессу.

Все это вместе взятое говорит о том, что именно диагональный процесс является системообразующим процессом, генерирующим все остальные процессы континуума.

Приведем основные этапы построения континуума как процессной структуры.

3.1

Рассмотрим диагональный процесс:

$a_1, a_2, a_3\ldots, a_n\ldots; p_1 \neq a_n;$

$a_1,\ldots, a_k, p_1\, a_{k+1}\ldots, a_n\ldots; p_2 \neq a_n, p_1.$

На каждом шаге к последовательности $\{\{a_n\}, p_n\}$(*) добавляется элемент $p_{n+1} \neq a_n, p_1, p_2 \ldots p_n$, при этом место p_{n+1} в последовательности (*) априори не известно.

Перейдем к порядковой, процессной, составляющий. Рассмотрим процесс $\gamma^{\to} =$

$\{\to \to \to \to \to \to \to \ldots\}$. Воспользуемся неравенством $\mathbf{\Omega} > \aleph_0$ и представим диагональный процесс как «отражение» процесса $\gamma^{\to}$ от «стенки» на расстоянии $\aleph_0$ от начала процесса (рис. 3).

Рис. 3
Источник: составлено автором.

Суть диагональной процедуры проявляется здесь в том, что номера шагов процесса заняты и чтобы найти место шагу противоположного направления $\leftarrow$ надо «раздвинуть» стрелки. Полученная последовательность будет «несчётной» в том смысле, что в ней присутствует шаг противоположного направления, в то время как «счёт» идет в одном направлении.

Итогом работы диагонального «метапроцесса» (процесса который генерирует другие процессы) являются многообразие последовательностей из $\uparrow$ и $\downarrow$.

Можно привести два образа, иллюстрирующих эту конструкцию:

а) течение реки, перегороженной плотиной, – поток изменяет направление и образуется озеро. На поверхности штиль, внизу – течение;

б) отражение волны от стенки «ящика», образование стоячей волны. Именно этот образ ближе всего соответствует процессной структуре континуума.

3.2

Перейдем к более точным определениям.

При отражении процесса $\gamma^{\to}$ от «стенки» $\aleph_0$ он пополняется отражёнными шагами противоположного направления следующим образом:

а) «вставка»: между стрелками $\to \to$ вставляется стрелка $\leftarrow$;

б) «слияние»: две стрелки противоположного направления соединяются в одно целое $\leftrightarrows$. В том и другом случае реализуется основная идея диагональной процедуры.

в) «полное слияние»: $\leftrightarrows \leftrightarrows \leftrightarrows \ldots \leftrightarrows \ldots \leftrightarrows \ldots$.

Конечным результатом работы диагонального процесса являются следующие модели:

а) многообразие последовательностей из $\uparrow$ и $\downarrow$. Эти шаги можно интерпретировать:

- как элементы двоичной записи и получить тем самым стандартную по структуре и семантике модель действительных чисел *Q;*

- как шаги процессов. Введя арифметическими операциями определенные «по Конвею», получается изоморфная Q модель, но уже с процессной семантикой. Это очередной пример реализации принципа двойственности.

б) модель Q, в которой некоторые числа имеют внутренние «не публичные» связи. Это возможно только в рамках процессной модели. Данная модель интересна как инструмент описание квантовой запутанности;

в) Структура ⇆ ⇆ ⇆ … ⇆… ⇆…, согласно теореме 3 п. 1.1, изоморфна натуральному ряду. Интуитивно: шаги → различаются только в порядковом смысле, движение в обратную сторону ⇆ дает возможность собрать все предыдущие шаги в одно целое, то есть шаги ⇆ можно считать элементами множества, которые можно различать количественно.

3.3

Отражение процесса $\gamma^{\rightarrow}$ *от «стенки»* $\aleph_0$ можно заменить трансфинитным поворотом, в результате которого образуется процесс $\gamma^{\leftarrow}$, который начинается в $\aleph_0$ и завершается там, где процесс $\gamma^{\rightarrow}$ начинается. Далее, процессы $\gamma^{\rightarrow}$ и $\gamma^{\leftarrow}$ «перемешиваются» с помощью операций «вставки» и «слияния». В результате получается уже упомянутая выше «кубитоподобная» структура, изоморфная Q. Важен следующий момент. В эту «кубитоподобную» структуру входит структура ⇆ ⇆ ⇆ … ⇆… ⇆…. Это значит, что образ этой структуры как стоячей волны получает еще одно подкрепление. С точки зрения модели Конвея ⇆ равняется ½, если → принять за *1*. Тогда имеем ½, *1*, *3/2, 2, 5/2* и т.д. Если считать, что → указывает направления движения некоторой волны, длина которой – это «длина» стрелки →, то аналогия между узлами стоячей волны будет полной. Разумеется, это не случайный факт.

3.4

Последний этап позволяет связать процесс генерации континуума со спинорной структурой – $\mathscr{P}$-числом ↻↺. Действительно, процесс $\gamma^{\rightarrow}$ в порядковом смысле завершается числом ↻, число ↺ генерирует процесс $\gamma^{\leftarrow}$ (можно образно сказать, что процесс $\gamma^{\leftarrow}$ завершается числом ↺). Объединению $\mathscr{P}$-чисел ↻ и ↺ в единое $\mathscr{P}$-число ↻↺ соответствует «перемешивание» процессов $\gamma^{\rightarrow}$ и $\gamma^{\leftarrow}$ и образование континуума. Очевидно, что сам континуум находится в области *Realität* – в то время, как генерирующее его $\mathscr{P}$-число ↻↺ – области *Wirklichkeit.*

Построенная процессная модель приводит к крайне интересному соотношению между основными числами.

Как известно, теоретико-множественная модель континуума определяет следующую редукционную цепочку чисел: *натуральные числа – действительные числа – комплексные числа.* Процессная модель полностью обращает эту цепочку: *комплексные числа – действительные числа – натуральные числа.*

Следствия этого обращения многочисленные и принципиальны.

Последний из рассмотренных в данной статье вопросов состоит в том, чтобы понять, каким образом $\mathscr{P}$-числа проявляются в физическом мире, то есть в мире, в котором присутствует материя. Дадим краткий ответ на этот вопрос.

Рассмотрим фазовое пространство и формулу Бора – Зоммерфельда:

$$\oint pdq = \hbar.$$

Величина интеграла не зависит от выбора контура, важна только сама идея периодического движения. Эта идея представляется некоторым абстрактным (фундаментальным) вращением ↻ (простейшим $\mathscr{P}$-числом ↻). Таким образом, в физическом мире $\mathscr{P}$-число ↻ проявляется как постоянная Планка $\hbar$.

Заключение

Напомним сформулированный подход к определению бесконечного.

Предположим, что шаги процесса γ различаются некоторыми предикатами $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Определим объект α, на котором стабилизируется процесс γ в смысле предиката T_k, то есть шаги процесса неотличимы друг от друга в смысле предиката T. Если все объекты, порожденные процессом γ, являются *конечными*, то объект α можно считать *бесконечным относительно предиката* T_k. При этом относительно других предикатов этот объект вполне может быть конечным.

Этот подход позволяет построить широкий спектр бесконечных объектов, включая объект **Ω,** который по всем мыслимым предикатам является бесконечным. Напомним, что бесконечные кардинальные числа $\aleph_\lambda$ являются таковыми по предикату количества, одновременно являясь конечными по предикату порядка. Тем не менее даже объект **Ω,** как показано выше, вполне «физичен» и является стержневым компонентом содержательного формализма.

Следует отметить, что первые бесконечные объекты появились в математике достаточно давно. В 1639 году Ж. Дезарг опубликовал труд «Черновой набросок попытки разобраться в том, что получается при пересечении конуса плоскостью», где ввел в оборот понятие бесконечно удаленной точки, то есть пополнил евклидово пространство несобственными точками. Фактически это был первый пример, когда *трансцендентное* по отношению к универсуму понятие (бесконечности) было реализовано в конкретном *трансфинитном* понятии (бесконечно удаленной точки). В дальнейшем понятие бесконечно удаленной точки было расширено до понятия абсолюта, которое стало ключевым в формировании идеологии «Эрлангенской программы».

Понятие фундаментального вращения как носителя порядковой бесконечности **Ω** можно рассматривать как предельно возможное обобщение понятия бесконечно удаленной точки. Здесь тоже имеет место пополнение – пополнение теоретико-множественного универсума немножественными объектами. Очевидно, что все такие несобственные объекты одновременно являются процессами. Возможности использования фундаментальных вращений в решении конкретных проблем были продемонстрированы выше.

Несмотря на имеющий место *horror infiniti* (страх бесконечного), бесконечные объекты и величины являются необходимыми инструментами познания окружающего мира. В современной теоретической физике скорость света в пустоте полагается бесконечной величиной в пространстве скоростей, но конечной – в координатном пространстве. Ровно таким свойством, как уже неоднократно подчеркивалось, обладают кардиальные числа $\aleph_\lambda$. Подобные примеры далеко не единственны.

Сфера применения подобных объектов может быть очень широкой. Например, если когда-нибудь будет обосновано, что постулат постоянства скорости света не состоятелен, то ситуация, подобная проблеме эфира, повторится. Снова нужно будет искать объект или процесс X, бесконечный по предикату A, но конечный по предикатам B, C, … . В ином случае, все теоретические построения перестанут работать.

Просматриваются и другие применения.

Например, возможна ситуация, когда имеется конечное вещественное число r, имеющее бесконечное расстояние от начала координат. Если рассмотреть шар радиуса r, то движение субъекта внутри шара к его границе будет сопровождаться уменьшением длины, его шагов, так, что граница никогда не будет достигнута. Этим, в частности, можно объяснить эффект красного смещения (Ю.С. Владимиров и др.) [7].

Более того, неевклидова метрика пространства обусловлена наличием таких бесконечных объектов «в конечном». Например, как было показано выше $\mathscr{P}$-число (фундаментальное вращение) находится вне теоретико-множественного универсума, в области *Wirklichkeit.* Соответственно, оно находится вне теоретико-множественной, точечной, модели пространства. Предположим, что у нас появилась возможность перенести фундаментальное вращение в теоретико-множественную модель пространства (в греческой мифологии спуск с Олимпа в земную жизнь был обычной процедурой). Предположим, что при таком «спуске» фундаментальное вращение теряет процессные качества и сохраняет только геометрическую форму. В этом случае фундаментальное вращение превращается в абсолют-множество бесконечно удаленных точек, имеющих форму круга (эллипса). Этот абсолют определяет два пространства: внутреннее – пространство постоянной отрицательной кривизны и внешнее – пространство постоянной положительной кривизны. В отсутствии такого абсолюта (и любых других бесконечных объектов «в конечном») пространство остается евклидовым.

В целом можно предположить, что изучение подобных объектов и их применение к осмыслению реальности в обозримым будущем может стать ведущим трендом теоретических исследований.

Литература

[1] *Варламов В. В.* Спектр материи Гейзенберга в абстрактно-алгебраическом подходе // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3 (39). С. 5–23.

[2] *Векшенов С. А.* Нестандартный формализм квантовой теории I: спектр масс // Метафизика. 2022. № 4 (46). С. 22–50.

[3] *Векшенов С. А.* Нестандартный формализм квантовой теории II: фундаментальное вращение, порядковая парадигма. Часть 1 // Метафизика. 2024. № 2 (52). С. 35–51.

[4] *Векшенов С. А.* Нестандартный формализм квантовой теории II: фундаментальное вращение, порядковая парадигма. Часть 2 // Метафизика. 2024. № 4 (54). С. 77–96.

[5] *Векшенов С. А.* Нестандартный формализм квантовой теории III: «квантовый континуум», фундаментальная цепочка чисел. Часть 1 // Метафизика. 2025. № 2 (56). С. 76–92.

[6] *Векшенов С. А*. Нестандартный формализм квантовой теории III: «квантовый континуум», фундаментальная цепочка чисел». Часть 2 (в работе)

[7] *Владимиров Ю. С.* и др. К вопросу об интерпретации космологического красного смещения // Ярославский педагогический вестник. 2010. Вып. 2. С. 53–62.

[8] *Ефремов А. П.* Предгеометрическая структура ассоциативных алгебр и кватернионные пространства как математическая среда обитания физических законов // Пространство-время и фундаментальные взаимодействия. 2014. Вып. 1. С. 5–19.

[9] *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое. Москва : Советское радио, 1979.

[10] *Адамар Ж.* Исследование психологии изобретения в области математики. Москва : Советское радио, 1945. 121 с.

MATHEMATICS AND METAPHYSICS OF INFINITY

S.A. Vekshenov
Russian Academy of Education
8 Pogodinskaya St, Moscow, 119121, Russian Federation

Abstract. In modern theoretical constructions, one can trace the interaction of two key abstractions: a geometric (material) point and a certain integrity, the ideological source of which are the monads of G.V. Leibniz. The idea of a point, dating back to Euclidean geometry, received a fundamental impetus in set theory due to the introduction of actual (completed) infinity. On the other hand, A. Aspect’s experiments convincingly showed that point objects cannot exist at the fundamental level. Thus, integral monads become the main abstraction of the quantum level of matter. As in the case of a material point, further development of this approach requires a defining ideological impulse, which can only be given by actual infinity. This is already a different, ordinal infinity, fundamentally different from the set-theoretic, quantitative infinity. A number of the author's works are devoted to the development of this approach. This article is, in essence, a brief summary of these works, in which the initial provisions and main results are formulated, without discussing particular issues and consequences.

Keywords: metaphysics of the infinite, geometric point, integral monads, actual infinity, abstraction of the quantum level of matter