ИДЕИ И ГИПОТЕЗЫ В РАМКАХ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ ПАРАДИГМЫ

DOI: 10.22363/2224-7580-2022-1-50-54

ВОЗМОЖНОСТИ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ ПАРАДИГМЫ В РАМКАХ КИРАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СКИРМА–ФАДДЕЕВА

Ю.П. Рыбаков

Российский университет дружбы народов
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Аннотация. Обсуждаются основные положения программы Эйнштейна по созданию последовательной полевой формулировки физики частиц, в основе которой лежит представление о частицах как сгустках некоторого материального поля, подчиняющегося нелинейным уравнениям. Показывается, как на основании критерия устойчивости можно выявить характерные особенности соответствующей полевой модели.

Ключевые слова: солитонные конфигурации, топологические инварианты, киральная модель Скирма–Фаддеева, теневые/темные фотоны.

Исторически идея о возможности описания частиц как сгустков электромагнитного поля была впервые высказана Густавом Ми в серии своих публикаций [1] под общим названием «Полевая теория материи». Впоследствии Эйнштейн обобщил идею Г. Ми, считая частицы сгустками некоторого материального поля, возможно, геометрического происхождения [2; 3]. Так, в своей работе «Об обобщенной теории тяготения» (см. [3. С. 725]) он пишет: «Поскольку общая теория относительности подразумевает описание физической реальности непрерывным полем, ни понятие частиц, или материальных точек, ни понятие движения не могут иметь фундаментального значения. Частица может выступать лишь как ограниченная область пространства, в которой напряженность поля или плотность энергии особенно велики».

Эйнштейн выдвинул и в течение своей жизни пытался осуществить грандиозную программу геометризации физики, основанную на изложенной выше концепции единого (первичного) материального поля (“unitary field”).

Есть обоснованная надежда, что привлечение новых математических методов исследования окажется плодотворным для реализации программы Эйнштейна [4]. Прежде всего, необходимо ответить на вопрос о природе первичного нелинейного поля, сгустками которого являются частицы.

Кстати, гипотеза об электромагнитном происхождении массы, кроме Г. Ми, поддерживалась и другими исследователями [5; 6], но оказалась противоречащей условию устойчивости. Как было установлено самим Г. Ми [1], масса такого электромагнитного сгустка – солитона оказалась отрицательной. Впоследствии, уже после открытия Дираком релятивистского уравнения для электрона, Г. Ми предположил, опираясь на чисто геометрические соображения, что таким первичным полем могут быть 8-спиноры [7]. Как мы покажем, это предвидение Г. Ми окажется верным, а условие устойчивости выполненным, если 8-спиноры войдут в состав первичных полей.

Для обоснования вышесказанного нам необходимо обратиться к знаменитой задаче Л. Эйлера об n квадратах [8]:

«Представить квадрат суммы n квадратов вещественных чисел в виде суммы n квадратов:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 ,$$

где c_i – билинейные комбинации чисел a_k ».

Оказывается, что при $n = 2$ решение этой задачи было уже известно Пифагору, Диофанту, Фибоначчи, Брахмагупте и другим античным математикам. В этом случае $c_1 = a_1^2 - a_2^2; \quad c_2 = 2a_1a_2$, и иллюстрацией применения этого решения может служить знаменитый «египетский треугольник» со сторонами 3, 4, 5. В 1748 г. Эйлер получил решение для $n = 3$ и $n = 4$, используя ортогональные матрицы размерности соответственно 3×3 и 4×4, элементы которых суть билинейные комбинации 4 и 8 произвольных чисел. Комментируя последнее полученное решение, он записал в своем дневнике [8]:

«Это решение заслуживает тем большего внимания, что я пришел к нему не при помощи какого-либо определенного метода, а как бы догадками; а так как оно к тому же содержит 8 произвольных чисел, которые после приведения к единице сводятся к семи, то едва ли можно сомневаться, что решение это универсальное и заключает в себе все возможные решения. Если кто-нибудь найдет прямой путь к проведению этого решения, то будет считаться, что он оказал анализу выдающуюся помощь. Существуют ли подобные решения для более широких квадратов, которые состоят из 25, 36 и т. д. чисел, я едва ли решусь утверждать. Тут не только обыкновенная алгебра, но и диофантов метод, кажется, получит огромный вклад».

Впоследствии выяснилось, что решение, найденное Эйлером, может быть получено при помощи кватернионов [8]. Более того, в 1838 г. немецкий алгебраист Адольф Гурвиц доказал фундаментальную теорему о существовании только *четырех нормированных алгебр*, а именно алгебр вещественных и комплексных чисел, кватернионов и бикватернионов (октав) [9; 10]. Согласно теореме Гурвица, задача Эйлера не имеет решения при $n = 5, 6, 7$, но имеет его при $n = 8$.

Изящное геометрическое решение задачи Эйлера при $n = 8$ нашел выдающийся итальянский геометр Франческо Бриоски (1824–1897) [11], который для описания 8-мерного пространства использовал *комплексные проективные координаты – спиноры*, имеющие 16 компонент. Бриоски обнаружил для 8-пространства замечательную симметрию – *принцип триальности* [12], согласно которому существуют три равноправных геометрических объекта: 8-вектор и два 8-компонентных полуспинора, линейные преобразования которых порождают вращения в 8-пространстве. При этом решение задачи Эйлера опирается на замечательное *тождество Бриоски*, справедливое для любого 8-спинора ψ:

$$j_\mu j^\mu - \tilde{j}_\mu \tilde{j}^\mu = s^2 + p^2 + \vec{v}^2 + \vec{a}^2, \tag{1}$$

где используются стандартные билинейные по спинорному полю величины:

$$s = \overline{\psi}\psi, \quad p = i\overline{\psi}\gamma_5\psi, \quad \vec{v} = \overline{\psi}\vec{\lambda}\psi, \quad \vec{a} = i\overline{\psi}\gamma_5\vec{\lambda}\psi,$$
$$j_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \tilde{j}_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad \overline{\psi} = \psi^+\gamma_0,$$

содержащие матрицы Дирака γ_μ, γ_5 и внутренние (изотопические) матрицы Паули $\vec{\lambda}$.

Структура тождества (1) идеально подходит для обеспечения устойчивости солитонов как конфигураций с минимальной энергией. В самом деле, если считать, что для искомого состояния правая часть (1) принимает некоторое фиксированное значение (*принцип спонтанного нарушения симметрии*):

$$s^2 + p^2 + \vec{v}^2 + \vec{a}^2 = const, \tag{2}$$

то уравнение (2) определяет структуру полевого многообразия, то есть соответствующее фазовое пространство, 7-сферу S^7. Нетрудно видеть, что S^7 включает в качестве подмногообразий сферы S^3 и S^2, для которых третья гомотопическая группа нетривиальна:

$$\pi_3(S^3) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}.$$

Например, в случае $s^2 + \vec{a}^2 = const$ получаем сферу S^3, порождающую состояния с нетривиальным топологическим зарядом типа *степени отображения*

$$Q = \deg\ (S^3 \Rightarrow S^3) = \mathrm{B},$$

который может быть интерпретирован как *барионное число.* К этому классу относится хорошо известная в ядерной физике *модель Скирма* [13].

Наконец, в случае подмногообразия S^2: $\vec{v}^2 = const$ получаем состояния с нетривиальным *индексом Хопфа* $Q_H = \mathrm{L}$, который, по предложению Л.Д. Фаддеева [14], может быть интерпретирован как *лептонное число*. Существование топологических солитонов в указанных моделях было строго установлено [15].

Для объединенного описания барионов и лептонов естественно использовать 16-компонентные спиноры Бриоски $\Psi = \psi_1 \oplus \psi_2$ как соединение двух 8-спиноров. Это позволяет получить 16-спинорную реализацию *киральной модели Скирма – Фаддеева* [16], в которой существует два типа внутренних *SU(2)* генераторов:

$$\Lambda_i / 2 = I_8 \otimes \sigma_i / 2; \quad \lambda_i / 2 = I_4 \otimes \sigma_i \otimes I_2 / 2; \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Если считать, что генераторы $\Lambda_i / 2$ порождают лептонный заряд, задавая многообразие S^2 в виде $\vec{V}^2 = (\overline{\Psi}\vec{\Lambda}\Psi)^2 = const$, то генераторы $\lambda_i / 2$ должны определять изотопический поворот.

Однако известно, что изотопическая симметрия нарушается при включении электромагнитного взаимодействия путем расширения производных (*калибровочный принцип*), как это следует из формулы Гелл-Манна–Нишиджимы:

$$Q_e = I_3 + < Q_e >, \tag{4}$$

где I_3 – изотопический спин частицы, а Q_e – генератор электрического заряда. При этом усреднение < > осуществляется по изотопическому мультиплету. В соответствии с (3) и (4) допустимы два способа включения взаимодействия (левый и правый изотопические повороты):

$$\partial_\mu \Psi \Rightarrow \left(\partial_\mu - ie_0 \Gamma_e A_\mu - i\tilde{e}_0 \Gamma_c C_\mu\right)\Psi, \tag{5}$$

где $e_0, \tilde{e}_0$ – константы связи с соответствующими векторными полями A_μ, C_μ. При этом структура генераторов определяется следующим образом:

$$\Gamma_e = P_3 \Lambda; \quad \Gamma_c = N_3 \Lambda; \quad P_3 = (1 - \lambda_3) / 2; \quad N_3 = (1 + \lambda_3) / 2.$$

где $\Lambda = (1 - \Lambda_3) / 2$ – проектор, убирающий вакуум: $\Lambda \Psi_0 = 0$.

Таким образом, в данной модели возможны два типа электромагнитных полей (два типа фотонов): обычные фотоны, порождаемые правым электрическим зарядом, и *теневые (темные) фотоны*, порождаемые левым электрическим зарядом [17].

Литература

1. *Mie G.* Grundlagen einer Theorie der Materie // Ann. der Physik. 1912. B. 37, S. 511–534; B. 39, S. 1–40; 1913. B. 40, S. 1–66.
2. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966.
3. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967.
4. *Faddeev L. D.* Einstein and several contemporary tendencies in the theory of elementary particles // Relativity, Quanta, and Cosmology in the Development of the Scientific Thought of Albert Einstein. Ed. F. de Finis. N. Y., S. Fr., Lond.: Johnson Repr. Corp. Vol. 1. P. 247–266.
5. *Thomson J.* Recent Researches in Electricity and Magnetism. Oxford: University Press, 1893.
6. *Bateman H.* The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave Motion on the Basis of Maxwell's Equations. Cambridge: University Press, 2015.
7. *Mie G.* Die Geometrie der Spinoren // Ann. der Physik. 1933. B. 17, S. 465–500.

8. *Граве Д. А.* Трактат по алгебраическому анализу. Т. 1: Начала науки. Киев: Изд-во АН УССР, 1938.
9. *Hurwitz A.* Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln // Nachr. Ges. der Wiss. Gött. 1898. S. 309–316.
10. *Конвей Дж. Х., Смит Д. А.* О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. М.: Изд-во МЦНМО, 2009.
11. *Nœther M.* Francesco Brioschi // Math. Ann. 1898. B. 50/ S. 477–491.
12. *Cartan E.* The Theory of Spinors. Paris: Hermann, 1966.
13. *Skyrme T. H. R.* A unified field theory of mesons and baryons // Nucl. Phys. 1962. Vol. 31, No 4. P. 556-569.
14. *Faddeev L. D.* Gauge invariant model of electromagnetic and weak interactions of leptons // Rep. Acad. Sci. USSR. 1973. Vol. 210, No 4. P. 807–810.
15. *Rybakov Yu. P.* Axially symmetric topological configurations in the Skyrme and Faddeev chiral models // Eurasian Math. Journal. 2015. Vol. 6, No 2. P. 82–89.
16. *Rybakov Yu. P.* Topological solitons in the Skyrme – Faddeev spinor model and quantum mechanics // Gravitation and Cosmology. 2016. Vol. 22, No 2. P. 179–186.
17. *Rybakov Yu. P.* Shadow/dark photons and the spinor realization of the Skyrme – Faddeev – Einstein chiral model // Materials of the All-Russia LVII-th Conference on Problems in Dynamics, Particle Physics and Optoelectronics (17–21 May 2021). Moscow: RUDN, 2021. P. 100–104.

POSSIBILITIES OF GENERALIZING FIELD THEORY PARADIGM WITHIN THE SCOPE OF THE SKYRME – FADDEEV CHIRAL MODEL

Yu.P. Rybakov

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

Abstract. Main points of the Einstein program for creating the consistent field formulation of particle physics are discussed. The basis of this program includes the representation of particles as clots of some material field satisfying nonlinear equations. It is shown how the stability criterion implies the characteristic features of the corresponding field model.

Keywords: soliton configurations, topological invariants, the Skyrme – Faddeev chiral model, shadow/dark photons