

К 200-ЛЕТИЮ ПАФНУТИЯ ЛЬВОВИЧА ЧЕБЫШЕВА

Р.А. Бисенгалиев, В.С. Тугульчиева

*Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова
Российская Федерация, 358000, г. Элиста, ул. А.С. Пушкина, д. 11*

Аннотация. Эта небольшая статья посвящена 200-летию выдающегося российского математика – П. Л. Чебышеву. П.Л. Чебышев родился в мае 1821 г. в селе Окатово Боровского уезда. П.Л. Чебышев один из основателей петербургской, или, как ее называют, чебышевской математической школы. Математик внес существенный вклад в развитие теории чисел, теории вероятностей, математического анализа и является одним из основоположников конструктивной теории функции. В данной работе обсуждаются некоторые результаты П.Л. Чебышева, связанные с задачей о распределении простых чисел. Как известно, эта задача тесно связана с наиболее известной на сегодняшний день математической проблемой – гипотезой Римана.

Ключевые слова: простые числа, функция распределения простых чисел, гипотеза Римана

С точки зрения арифметики большинство чисел отличается, так сказать, «хорошим поведением». Четные числа всегда чередуются с нечетными, каждое третье число всегда кратно трем, квадраты чисел подчиняются определенному закону. Поэтому мы можем составить длинный ряд чисел, которые ведут себя так, как им положено, независимо от длины этого ряда и величины самих чисел. Но простые числа похожи на неуправляемую толпу. Они появляются там, где им захочется, без предварительного предупреждения, на первый взгляд, совершенно хаотично, без какой-либо закономерности. А самое главное – их нельзя проигнорировать: простые числа необходимы для арифметики и для математики в целом. Они имеют фундаментальное значение для математики. Каждое число может быть представлено уникальным способом в виде простых чисел, умноженных друг на друга. Это значит, что простые числа – это «атомы умножения», маленькие частички, из которых может быть построено что-то большое.

Как известно еще с времен Евклида, простых чисел бесконечно много. Однако математикам, естественно, хотелось получить некоторый закон распределения таких чисел, узнать глубинную природу данных объектов. Задача о распределении простых чисел привлекала крупнейших математиков. Например, можно отметить Л. Эйлера, А. Лежандра, К. Гаусса, Б. Римана, Ж. Адамара, Ш. Валле-Пуссена и многих других. Среди них и Пафнутий Львович Чебышев, который получил ряд фундаментальных результатов при решении данной задачи. Он внес существенный вклад в решение проблем,

связанных с распределением простых чисел. Из его двух мемуаров 1848 и 1852 гг. берут своё начало «элементарные методы» теории распределения простых чисел, то есть методы, не использующие теорию функций комплексного переменного и др. П.Л. Чебышев доказал пять замечательных теорем, связанных с функцией распределения простых чисел.

Определение. Функция $\pi(x)$ есть количество простых чисел, не превосходящих x . Эта функция называется функцией распределения простых чисел. Например, $\pi(10) = 4$ (4 простых числа, меньших 10, – это 2, 3, 5, 7).

Таблица

Функции распределения простых чисел

| x | $\pi(x)$ | $\frac{x}{\pi(x)}$ | $\ln(x)$ | $\frac{\ln(x)}{x/\pi(x)}$ |
|--------|----------|--------------------|----------|---------------------------|
| 10^2 | 25 | 4 | 4,6 | 1,15 |
| 10^3 | 168 | 5,95 | 6,9 | 1,15 |
| 10^4 | 1226 | 8,15 | 9,2 | 1,12 |
| 10^5 | 9592 | 10,42 | 11,5 | 1,1 |
| 10^6 | 78498 | 12,73 | 13,8 | 1,08 |

Один из асимптотических законов функции распределения простых чисел утверждает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$ или $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ (А.М. Лежандр, 1798).

Далее К.Ф. Гаусс, составляя таблицы простых чисел, пришел к выводу, что интегральный логарифм $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ дает большее приближение функции $\pi(x)$.

Отметим один из результатов, полученный П.Л. Чебышевым.

Теорема (Чебышев). Функция $\pi(x)$ удовлетворяет неравенствам:

$$Li(x) - \frac{\alpha x}{\ln^n x} < \pi(x) < Li(x) + \frac{\alpha x}{\ln^n x}$$

как бы $\alpha > 0$ ни было мало, а n ни было велико.

Новые идеи в теорию распределения простых чисел внес Б. Риман. Он рассматривал дзета-функцию $\zeta(s)$ с комплексными s и нашел связь между нулями $\zeta(s)$ и функцией $\pi(x)$. При изучении дзета-функции Б. Риман формулирует гипотезу, известную сегодня как **гипотеза Римана**, которая в классической формулировке утверждает:

Все нетривиальные нули дзета-функции имеют вещественную часть, равную $\frac{1}{2}$.

При этом имеются и другие формулировки данной гипотезы в терминах функции распределения простых чисел. Отметим одну из них.

Гипотеза Римана (эквивалентная формулировка):

$$\left| \pi(x) - Li(x) \right| < \frac{1}{8\pi} \cdot \sqrt{x} \cdot \ln(x) \quad \forall x \geq 2657.$$

В заключение хотелось бы отметить, что помимо теории чисел П.Л. Чебышев занимался и другими проблемами математики. Можно, например, отметить его работы «Об интегрировании иррациональных дифференциалов», «Об одном арифметическом вопросе» и др. Многие утверждения носят его имя. Это неравенство Чебышева, закон больших чисел Чебышева, многочлены Чебышева и др. Другая область интересов ученого связана с теорией машин и механизмов. Чебышеву удалось сконструировать паровую машину, арифмометр, самокатное кресло, сортировальную машину, гребной механизм. Его работы по интерполированию стали теоретической основой для составления таблиц и формул в артиллерийской практике. Научные заслуги Чебышева создали ему мировую славу. Он был почетным членом многих академий наук: Российской, Парижской, Итальянской, Шведской, Лондонского Королевского общества.

Литература

1. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1987.
2. Чебышев П.Л. Избранные труды. М.: АН СССР, 1956.
3. Риман Б. Сочинения. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
4. Ингам. А.Э. Распределение простых чисел. М.-Л.: ОНГИ, 1936.

DEDICATED TO THE 200th ANNIVERSARY OF PAFNUTI LVOVICH CHEBYSHEV

R.A. Bisengaliev, V.S. Tugulchieva

*Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov
11 A.S. Pushkin St, Elista, 358000, Russian Federation*

Abstract. This short article is dedicated to the 200th anniversary of the outstanding Russian mathematician – P.L. Chebyshev. P.L. Chebyshev was born in May 1821 in the village of Okatovo, Borovsk district. P.L. Chebyshev is one of the founders of the St. Petersburg or, as it is called, the Chebyshev mathematical school. The mathematician made a significant contribution to the development of number theory, probability theory, mathematical analysis and is one of the founders of the constructive theory of function. This paper discusses some of the results of P.L. Chebyshev related to the problem of the distribution of prime numbers. As you know, this problem is closely related to the currently most famous mathematical problem – the Riemann hypothesis.

Keywords: prime numbers, distribution function of prime numbers, Riemann hypothesis