

## **ПРИНЦИП МАХА И УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПЕКТР ПЕРИОДОВ: КОМПЛЕМЕНТАРНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ЧАСТЯМИ ЦЕЛОСТНОЙ СИСТЕМЫ**

**В.А. Панчелюга<sup>\*</sup>, М.С. Панчелюга**

*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН  
Российская Федерация, 142290, Московская обл., Пущино,  
ул. Институтская, д. 3*

**Аннотация.** В работе обосновывается предположение, что выполнимость принципа Маха должна иметь своим следствием существование универсального спектра периодов (УСП). Показано, что фрагменты такого спектра обнаружены во временных рядах флуктуаций процессов различной природы. Рассмотрен общий подход, демонстрирующий возникновение дискретных состояний в спектрах периодов систем различной природы, который основывается на двух исходных понятиях: резонанса как рационального отношения и грубости физической системы. Такой подход ведет к существованию двух комплементарных фрактальных распределений, связанных с множествами рациональных и иррациональных отношений между элементами целостной системы. Приведен краткий обзор работ, в которых также рассматриваются универсальные фрактальные спектры периодов.

**Ключевые слова:** принцип Маха, отношения, резонанс, универсальный спектр периодов, классы эквивалентности, цепные дроби, золотое сечение, фракталы

### **Введение**

#### **Принцип Маха и универсальный спектр периодов**

Принцип всеобщей взаимосвязи – один из основных принципов диалектики – нашёл своё отражение и получил развитие в трудах многих философов разных эпох [1] – Античности (Анаксагор – «все во всем» [2]), Возрождения (Николай Кузанский – «Бог во всём и всё в Боге» [3]), начало Нового времени (Лейбниц: «...всякое тело более или менее, смотря по расстоянию, действует на всякое другое тело и в свою очередь подвергается воздействию со стороны последнего» [4]) и др. Конкретное физическое наполнение данный принцип получает в работах Э. Маха. Как отмечается в [5]: «Под принципом Маха наиболее часто понимается его определение, данное Эйнштейном [6], – обусловленность сил инерции (масс) тел воздействием на них со стороны всей окружающей материи мира» [5. С. 136]. Но со временем становится понятным, что не только силы инерции, а и многие другие локальные

---

\* E-mail: victor.panchelyuga@gmail.com

свойства физического мира зависят от его глобальных свойств. Поэтому в работах [5; 7–8] была предложена более общая формулировка принципа Маха как обусловленности локальных свойств материальных образований закономерностями и распределением всей материи мира. То есть в данной формулировке принцип Маха предполагает связь, соотнесенность между любыми физическими объектами Вселенной и может рассматриваться как «физическая часть» принципа всеобщей взаимосвязи.

Говоря о связи, необходимо отметить, что ее наличие между некоторыми объектами синонимично наличию между ними взаимодействий, спектр которых, как показано в [9–12], связан с типами элементарных отношений, возможных между этими объектами.

Одним из важных моментов всеобщей взаимосвязи, привлекающим в последние годы все большее внимание научного сообщества, является ее нелокальный характер. Физические основы такой нелокальной взаимосвязи нашли свое наиболее последовательное выражение в работах [13–14], основанных на теории прямого межчастичного взаимодействия.

Очевидно, что динамика любых природных систем, как правило, имеет периодический, колебательный характер. То есть они могут рассматриваться как автоколебательные системы. Выполнимость принципа Маха означает, что все такие автоколебательные системы от микро- до мегамира являются связанными между собой. «Автоколебательный» характер динамики и наличие связи между такими автоколебательными системами являются условиями для возникновения синхронизации – вхождения таких систем в синхронный кооперативный режим колебаний [15–16].

Синхронизация астрономической системы, между телами которой существуют слабые диссипативные силы, рассмотрена в ряде работ А.М. Молчанова [17–19]. Им было сформулировано представление о Солнечной системе как о совокупности слабо связанных, длительное время эволюционировавших осцилляторов, которые в процессе своей эволюции выходят на некоторый кооперативный режим движения, когда между стабильными частотами устанавливаются целочисленные соотношения. Все колебания в такой системе оказываются синхронизованными. Такой выход на кооперативный, синхронный режим часто называют «принцип максимальной резонансности», который гласит, что любая динамически зрелая система всегда выходит на синхронный режим колебаний.

Следуя принципу максимальной резонансности и исходя из выполнимости принципа Маха, мы можем предположить, что любые тела во Вселенной должны находиться в некотором кооперативном колебательном режиме. Наличие такого колебательного режима имеет своим немедленным следствием возникновение единого универсального спектра пространственно-временных структур, частным случаем которых будет существование универсального спектра периодов, который 1) должен проявлять себя на различных масштабах от микро- до мегамира; 2) должен быть универсальным, то есть проявлять себя для систем различной качественной природы (физических, химико-биологических, астрономических и т.д.); 3) должен демонстрировать

свойство самоподобия или фрактальности, что является следствием единого, кооперативного режима колебаний.

Необходимо отметить, что в ряде работ были обнаружены спектры, которые по имеющимся признакам, в первую очередь – универсальности, могут рассматриваться как отдельные «фрагменты» такого универсального спектра. Рассмотрим пример одного из таких «фрагментов».

### **Универсальный спектр периодов в диапазоне 1–120 мин**

В серии работ [21–22] было показано существование спектра периодов во флуктуациях скорости альфа-распада и продемонстрирован его универсальный характер: периоды, найденные во временных рядах флуктуаций параметров процессов различной природы, всегда совпадали с частью данного спектра [21–22]. Его универсальность была дополнительно подтверждена в серии специальных исследований флуктуаций температуры мелких млекопитающих и птиц [23–24], хемилюминесценции планарий [25]. Также она проявляется в совпадении спектра [21–22] со спектрами периодов ряда астрофизических систем: периодами в спектрах астрофизических мазеров [26] и вращательными периодами астероидов [27]. Результаты работ [21–27] в совокупности позволяют не только говорить об универсальности рассматриваемого спектра периодов, но и сделать предположение о его глобальной, космофизической обусловленности.

Второй особенностью УСП [21–27] является его фрактальный характер. Свойство фрактальности, в приложении к спектру периодов, говорит о том, что набор частот данного спектра составляет единую согласованную (сфазированную) систему, то есть в данном случае имеет место некоторый единый колебательный процесс. Так, например, спектр собственных колебаний Земли (показано его совпадение с УСП [21–27]), который обладает свойством фрактальности, можно рассматривать как единый колебательный процесс, приводящий к существованию системы стоячих волн, экспериментально подтвержденной в [28]. В силу отмеченного выше глобального характера спектра периодов [21–22], его фрактальности, мы можем рассматривать данный спектр как следствие некоторого единого глобального колебательного процесса. Необходимо отметить, что существует большое число работ, также отмечающих существование универсальных спектров периодов, аналогичных УСП [21–27]. Часть этих работ будет рассмотрена в заключительной части настоящей статьи.

Существование такого единого колебательного процесса, как правило, всегда связано с явлением резонанса. Предметом настоящей статьи является достаточно общая модель возникновения универсального спектра периодов, основанная на двух очевидных положениях: 1) определении резонанса как рационального отношения; 2) предположения о том, что любая реальная физическая система является грубой, то есть такой, параметры которой всегда подвержены неустранимым флуктуациям и поэтому принципиально не могут быть определены с бесконечной точностью.

## Определение резонанса

Рассмотрим небольшую подборку определений резонанса, даваемых различными авторами:

— «Резонанс – относительно большой селективный (избирательный) отклик колебательной системы (осциллятора) на периодическое воздействие с частотой, близкой к частоте её собственных колебаний» [29. С. 629].

— «Резонанс (франц. *résonance*, от лат. *resono* – откликаюсь) – частотно-избирательный отклик колебательной системы на периодическое внешнее воздействие, при котором происходит резкое возрастание амплитуды стационарных колебаний. Наблюдается при приближении частоты внешнего воздействия к определенным, характерным для данной системы значениям. В линейных колебательных системах число таких резонансных частот соответствует числу степеней свободы, и они совпадают с частотами собственных колебаний» [30. С. 308].

— «Совпадение частоты возмущающей силы с собственной частотой системы и сопровождающие его явления носят название резонанса» [31. С. 81].

— «В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) возникает явление резонанса. При отсутствии сил вязкого сопротивления в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний, нарастая во времени, стремится к бесконечности» [32. С. 42].

— «...При  $\omega/\omega_n = 1$  частота вынужденных колебаний, а следовательно, и частота изменения возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний. Поэтому возмущающая сила действует на массу в такт ее движениям, вследствие чего амплитуда может расти безгранично. Таков, например, случай маятника, которому при каждом размахе сообщается легкий толчок в направлении его движения; тогда с помощью незначительной силы можно получить колебания с очень большой амплитудой. Описанное явление, имеющее исключительно важное значение, носит название *резонанса*, а частота собственных колебаний называется также *резонансной частотой*» [33. С. 65–66].

— «С увеличением отношения  $m/p$  амплитуда вынужденных колебаний увеличивается и становится бесконечно большой при  $m/p = 1$ , то есть когда частота возмущающей силы становится равной частоте независимых колебаний системы. Когда это происходит, мы имеем *состояние резонанса...*» [34. С. 15].

— «Таким образом, при  $p = k$  отклонения материальной системы от положения равновесия будут неограниченно возрастать с течением времени. Такое явление носит название *резонанса*» [35. С. 46].

— «При частоте возмущения, равной частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности – имеет место *явление резонанса*» [36. С. 93].

— «...Резонанс возникает при совпадении частоты возмущения с любой из собственных частот системы» [37. С. 54].

— Неограниченное увеличение амплитуды вынужденных колебаний по мере приближения частоты внешней силы, действующей на систему, к частоте ее собственных колебаний, называется резонансом [38].

— Резонанс – когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы [39].

Как следует из приведенных выше определений [10-20], общим для них является факт совпадения двух параметров  $p$  и  $q$ , имеющих смысл собственной частоты системы и частоты вынуждающей силы. Обычно это совпадение рассматривают как совпадение частот:  $p/q = 1$ , хотя в действительности это не является обязательным. Резонанс возникает также в случаях, когда, например,  $p/q = 0.5$  или  $p/q = 0.25$ . Для возникновения резонанса важно, чтобы «толчки» вынуждающей силы происходили в такт собственным колебаниям системы, как это отмечено в [33]. Это возможно только в случае, когда отношение  $p/q$  является рациональным числом. В этом случае периоды  $p$  и  $q$  являются соизмеримыми и «толчки» вынуждающей силы всегда приходятся на одну и ту же фазу колебаний системы. В случае, когда отношение  $p/q$  является иррациональным числом, колебания  $p$  и  $q$  являются несоизмеримыми, «толчки» приходятся на разные фазы колебаний системы и вследствие этого резонанс невозможен.

Суммируя, определим резонанс как такое отношение  $r$  частот двух колебаний  $p$  и  $q$ , которое выражается рациональным числом:

$$r = \frac{p}{q}, \quad p, q \in N, \quad r \in Q, \quad (1)$$

где  $N$  – множество натуральных чисел, а  $Q$  – множество рациональных чисел. Если  $r \in Q'$ , где  $Q'$  – множество иррациональных чисел, резонанс невозможен.

Представленное определение резонанса, очевидно, является максимально общим. Но в то же время оно немедленно приводит к следующему парадоксу. Как известно, любая физическая система является «грубой» в том смысле, что значения ее параметров всегда подвержены неустранимым флуктуациям. Поэтому для реальной физической системы  $r$  не может соответствовать единственному рациональному числу, так как в силу флуктуаций параметров  $p$  и  $q$  выбранное изначально рациональное отношение  $r$  невозможно выдерживать точно. Вместе с тем известно, что распределение иррациональных чисел на числовой оси всюду плотно и, следовательно, в окрестности любого рационального числа имеется бесконечно большое количество иррациональных чисел. В силу этого малейшая флуктуация параметров физической системы приведет к нарушению условия  $r \in Q$  и, как следствие, к невозможности резонанса. Тем не менее, несмотря на грубость реальных физических систем, явление резонанса существует. Возникает вопрос, как этот факт согласуется с определением резонанса как  $r \in Q$ ?

Второй парадокс, который, как будет показано в дальнейшем, тесно связан с первым и является его логическим следствием – почему в реальных физических системах резонанс намного легче возникает при таких  $r$ , для

которых  $p$  и  $q$  малые числа? Здесь уместно привести широко известный пример с фигурами Лиссажу [40]: как известно, устойчивые изображения этих фигур возникают только при определенном соотношении частот:  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $4/5$ ,  $5/7$  и т.д. При этом между этими значениями есть бесконечно много других рациональных чисел, для которых очень трудно получить устойчивую картинку.

### Распределение плотности рациональных чисел

В [40] была высказана идея, что рациональные и иррациональные числа распределены вдоль числовой оси неравномерно. Рассмотрим распределение рациональных чисел. Для этого нам, очевидно, необходимы: 1) алгоритм построения множества рациональных чисел; 2) способ учета грубости физической системы, основанный на 1).

Для целей 1) удобно использовать предложенную в [41] процедуру построения множества рациональных чисел  $Q$  как вполне упорядоченного множества вполне упорядоченных множеств, выстроенных в однозначно-определенную систему, основанную на следующей цепной дроби:

$$\{Q_i^{a_i}\} = \frac{1}{a_1 \pm \frac{1}{a_2 \pm \frac{1}{\dots a_i \pm \frac{1}{\dots}}}}, \quad (2)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_i = \overline{1, \infty}$ ,  $i \rightarrow \infty$ . Выражение (2) дает рациональные числа, принадлежащие отрезку  $[0, 1]$ . Известно, что между  $[0, 1]$  и  $[1, \infty)$  существует взаимно однозначное соответствие, то есть любые закономерности, полученные на основе (2) для  $[0, 1]$ , будут справедливы и для  $[1, \infty)$ . Для  $i \rightarrow \infty$  выражение (2) дает [41]:

$$\{Q_i^{a_i} | i \rightarrow \infty\} \rightarrow Q. \quad (3)$$

Очевидно, что в случае (3) невозможно говорить о каком-либо распределении, так как рациональные числа расположены вдоль числовой оси всюду плотно. Условие  $i \rightarrow \infty$  означает, что параметры  $p$  и  $q$  должны быть определены с бесконечной точностью, что, как уже отмечалось выше, принципиально невозможно для реальных физических систем. Поэтому при рассмотрении резонанса (1) в случае реальных физических систем условие  $i \rightarrow \infty$  должно быть заменено на  $i = \overline{1, L}$ , где  $L$  – достаточно большое, но конечное натуральное число. Переход к  $i = \overline{1, L}$  в (2) является искомой моделью «грубости» физической системы. В качестве примера рассмотрим случай  $i = 3$ :

$$\{Q_i^{a_i}\} = \frac{1}{a_1}, i = 1, a_1 = \overline{1, N}; \quad (4)$$

$$\{Q_i^{a_i}\} = \frac{1}{a_1 \pm \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_1 a_2 \pm 1}, i = 1, 2, a_1, a_2 = \overline{1, N}; \quad (5)$$

$$\{Q_i^{a_i}\} = \frac{1}{a_1 \pm \frac{1}{a_2 \pm \frac{1}{a_3}}} = \frac{a_2 a_3 \pm 1}{a_1 (a_2 a_3 \pm 1) \pm a_3}, i = \overline{1, 3}, a_1, a_2, a_3 = \overline{1, N}. \quad (6)$$

На рис. 1а и рис. 1б представлены результаты вычислений, основанные на (4) и (5) при  $N = 100$ . Ограниченность графического разрешения не позволяет отобразить случай, описываемый выражением (6). На рис. 1в показана функция распределения плотности рациональных чисел для  $[0, 1]$ . Как можно видеть учет грубости физической системы приводит к наличию острых рациональных максимумов, показанных на этом рисунке.

Распределение, показанное на рис. 1, выявляет еще одну важную особенность, следующую из рассмотренного способа (2) построения множества  $Q$ . Как следует из приведенных изображений, множество (4), показанное на рис. 1а, воспроизводится на каждом шаге построения множества (5), рис. 1б. То есть окрестности точек  $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ , на рис. 1б) воспроизводят вид множества, показанного на рис. 1а. Аналогично, каждая точка множества (5), показанная на рис. 1б, на следующем шаге (6) будет окружена множеством, подобным показанному на рис. 1а. Следовательно, процедура построения  $Q$ , основанная на цепной дроби (2), приводит к самоподобному, фрактальному множеству. Использованный нами способ введения грубости физической системы аналогичен ограничению минимального масштаба этого фрактального множества, обрезанию его «снизу». Эта процедура делает полученное фрактальное множество подобным природным фракталам, которые, как известно, всегда имеют минимальный и максимальный масштабы, между которыми существует самоподобная, фрактальная структура.

### Резонанс и мощность классов эквивалентности

Условие резонанса (1) нельзя понимать в том смысле, что резонанс это единственная пара чисел  $p$  и  $q$ , отношение которых  $r$  выражается рациональным числом. В действительности одному и тому же рациональному отношению (1) в общем случае соответствует бесконечное множество пар  $p$  и  $q$ , отношение которых равно  $r$ . Если предположить, что каждое натуральное число – это частота некоторого осциллятора, то мощность данного множества или класса эквивалентности для некоторого  $q$  дает число осцилляторов, которые будут с ним в резонансе.

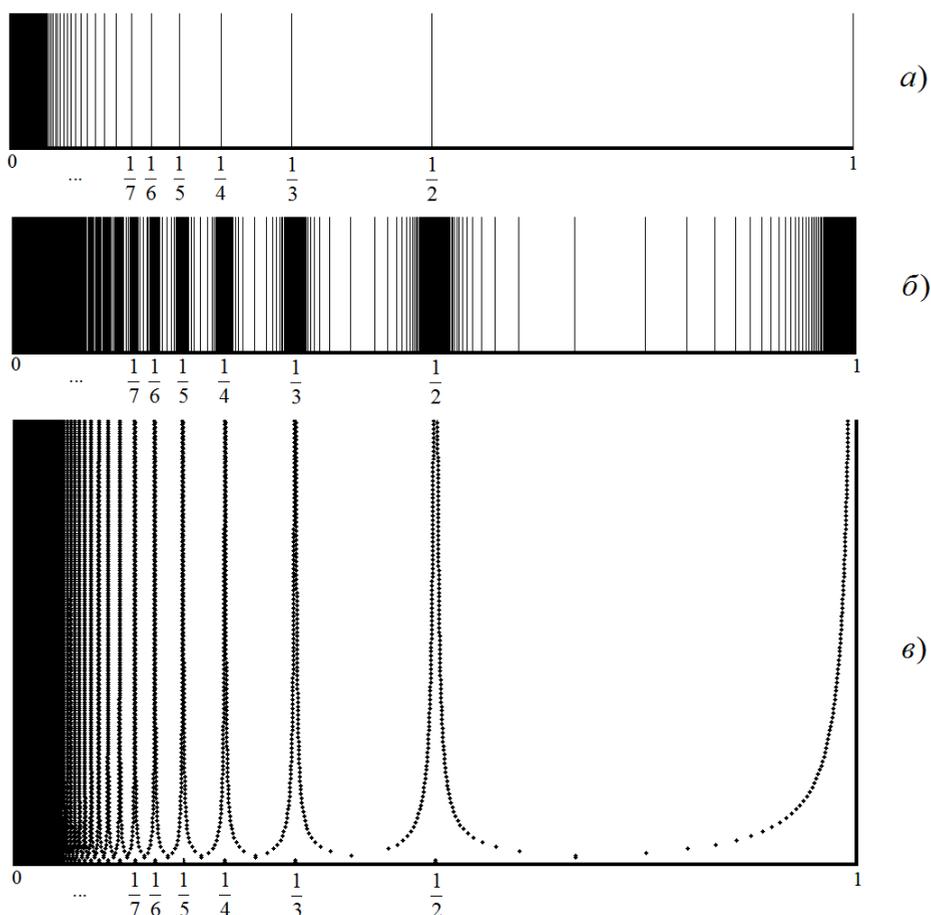


Рис. 1. Распределения рациональных  $a$  –  $b$  чисел

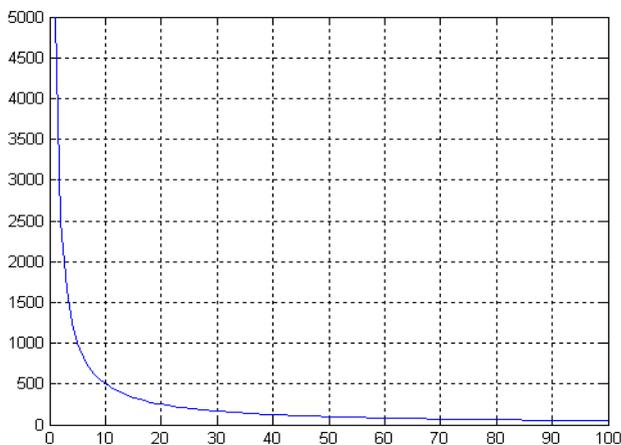
Оценим, следуя [1], мощности классов эквивалентности. Для этого условие резонанса (1) для  $p, q \in [1, \infty) \in N$  представим в форме

$$p \bmod q = 0. \tag{7}$$

Пусть  $p > q$ , тогда все  $q$ , удовлетворяющие условию (7), будут целыми делителями  $p$ . Выражение (7) при учете грубости физической системы:  $p, q \in [1, L] \in N$ , где, как отмечалось,  $L$  – достаточно большое, но конечное натуральное число, позволяет оценить мощность классов эквивалентности (детали – см. [20]). Результаты соответствующих вычислений приведены на рис. 2.

Как можно видеть из рис. 2, мощность классов эквивалентности очень быстро уменьшается с ростом  $q$ . Из рис. 2 очевидно, что мощность классов эквивалентности, соответствующим начальным числам натурального ряда, на порядки превосходит мощность классов эквивалентности для остальных чисел. Именно это обстоятельство, на наш взгляд, объясняет тот факт, что резонанс наиболее «охотно» возникает для таких  $r$ , для которых  $p$  и  $q$  – начальные числа натурального ряда.

Очевидна также прямая связь между мощностью классов эквивалентности и площадью под пиками на рис. 1.



**Рис. 2. Мощность классов эквивалентности для  $L = 5000$ :**  
ось  $X$ : значения  $q(1)$ ; ось  $Y$ : мощность классов эквивалентности

### Распределение плотности рациональных чисел и иррациональные последовательности

Аналогично представленным на рис. 1 рациональным максимумам можно рассмотреть задачу нахождения максимумов плотности иррациональных чисел. В отличие от рациональных максимумов, которым соответствует максимальное взаимодействие между частями некоторой системы, иррациональным максимумам, наоборот, соответствуют минимальное взаимодействие, максимальная устойчивость системы, ее стабильность. В [40] высказано предположение, что иррациональные максимумы соответствуют минимумам в распределении плотности рациональных чисел. В этой работе предполагается, что в роли «наиболее иррациональных чисел» можно использовать алгебраические числа, являющиеся корнями уравнения

$$\alpha^2 + \alpha b + c = 0. \quad (8)$$

Примем  $c = -1$ . Тогда

$$\alpha = \frac{1}{b + \alpha} = \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \dots}}} = \frac{\sqrt{b^2 + 4} - b}{2}. \quad (9)$$

Бесконечная цепная дробь дает тем худшую аппроксимацию иррационального числа  $\alpha$ , чем меньше ее  $a_i$  компонента. Следовательно, наихудшая аппроксимация будет в случае  $b = 1$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180339. \quad (10)$$

Случай (10) соответствует так называемому «золотому сечению». Дальнейшие вычисления на основе (9) дают значение  $\alpha_2$  :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = \frac{\sqrt{8}-2}{2} = 0,4142135. \quad (11)$$

Выражение (11) дает так называемое «серебряное сечение» [43]. Следующее, «бронзовое сечение», дается выражением (12)

$$\alpha_3 = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}} = \frac{\sqrt{13}-3}{2} = 0,3027756. \quad (12)$$

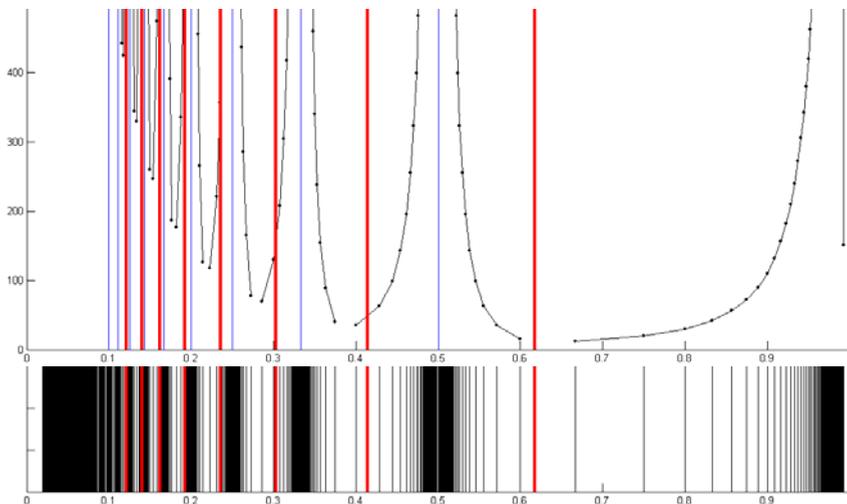
Цепные дроби вида (10) – (12) называются периодическими и обозначаются как  $\alpha_1 = [\overline{1}]$ ,  $\alpha_2 = [\overline{2}]$ ,  $\alpha_3 = [\overline{3}]$ . Приведем значения  $\alpha_4 - \alpha_8$  :

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= [\overline{4}] = 0,2360679, \\ \alpha_5 &= [\overline{5}] = 0,1925824, \\ \alpha_6 &= [\overline{6}] = 0,1622776, \\ \alpha_7 &= [\overline{7}] = 0,1400549, \\ \alpha_8 &= [\overline{8}] = 0,1231056. \end{aligned} \quad (13)$$

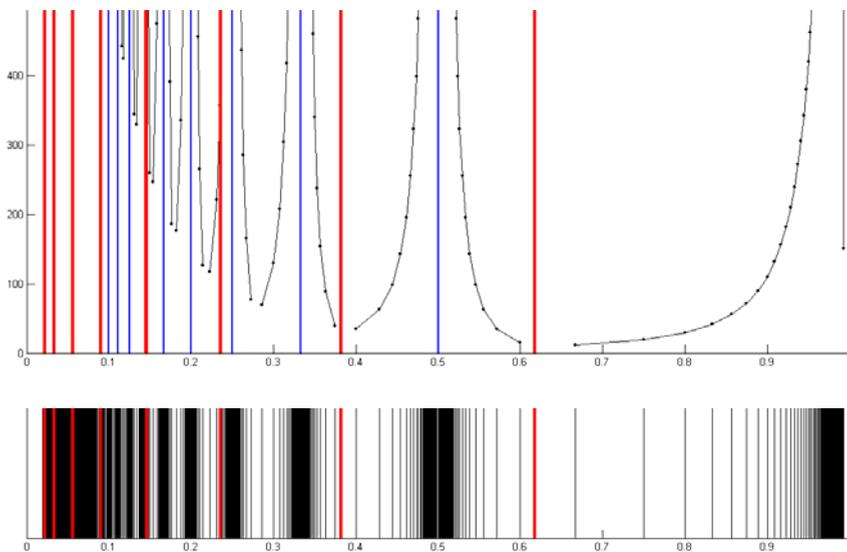
Выражения (10) – (13) представляют так называемые металлические пропорции [43] и представлены на рис. 3. Черные линии на этом рисунке относятся к распределению рациональных чисел, приведенному на рис. 1. Красные вертикальные линии соответствуют (10) – (13) для  $b = 1,8$ . Значение иррациональной последовательности (9) для  $b > 8$  на рис. 3 не приводится в силу недостаточного графического разрешения.

Как следует из рис. 3а, алгебраические числа с ростом  $b$  имеют тенденцию приближаться к рациональным максимумам. Это говорит о том, что данные числа в действительности не являются лучшими кандидатами на роль «наиболее рациональных чисел». На рис. 3б дан другой вариант построения иррациональных максимумов, основанный на числах вида  $\varphi^n$  – степенях золотой пропорции [42], а на рис. 3в – числа вида  $\varphi/n$ . Как можно видеть из рис. 3, во всех случаях результат далек от ожидаемой комплементарности рациональных и иррациональных максимумов. Это свойство неизменно выполняется только для первого рационального минимума, который соответствует золотому сечению – иррациональному максимуму.

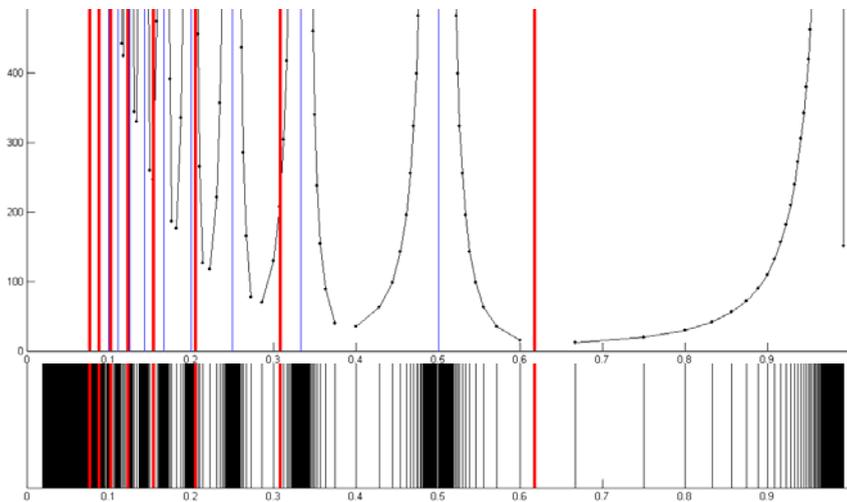
*a*



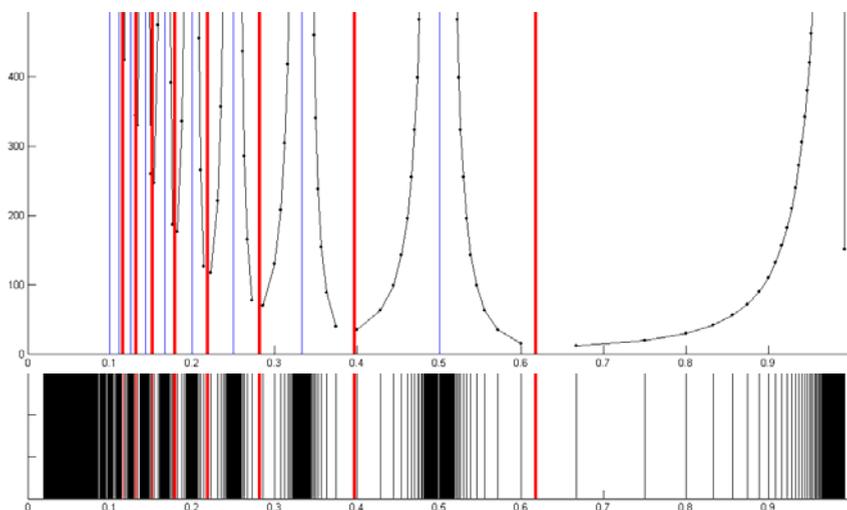
*б*



*в*



**Рис. 3. Алгебраические числа (а);  $\varphi^n$  – степени золотой пропорции (б); числа вида  $\varphi/n$  (в)**



**Рис. 4. Деление отрезка в пропорции золотого сечения**

Хотелось бы особо отметить, что все иррациональные последовательности, представленные на рис. 3, начинаются с числа, соответствующего золотому сечению. Это же справедливо и для других последовательностей, имеющих в многочисленной литературе, посвященной золотому сечению.

Последовательность иррациональных чисел, точно соответствующих рациональным минимумам, можно получить в случае, когда отрезки между членами последовательности (4) на рис. 1а или расстояния между рациональными максимумами будут поделены в пропорции золотого сечения. Результат численной реализации такой процедуры показан на рис. 4. Видно, что в этом случае члены иррациональной последовательности всегда совпадают с рациональными минимумами. Следовательно, мы можем рассматривать полученную иррациональную последовательность как обладающую минимальной резонансностью.

### **Комплементарные спектры периодов**

Все результаты, описанные выше, основаны на понятиях резонанса и грубости физической системы. Эти понятия в приложении к множеству действительных чисел приводят к двум, связанным между собой распределениям – рациональных и иррациональных чисел, имеющих самоподобный, фрактальный характер. Мы полагаем, что данные распределения являются комплементарными друг другу и в приложении к анализу некоторой физической системы должны рассматриваться вместе, как единое распределение, две части которого описывают разные свойства одной и той же системы.

Максимумы распределения рациональных чисел (рис. 1) соответствуют максимальной чувствительности системы к внешним воздействиям, максимальному взаимодействию между ее частями. Явление резонанса является более стабильным и возникает с большей легкостью, если отношения резонансных частот принадлежат одному из рациональных максимумов, для которых значения  $p$  и  $q$  – небольшие целые числа, расположенные в начале

натурального ряда, так как с такими максимумами связаны намного большие мощности соответствующих классов эквивалентности.

Вследствие отмеченной комплементарности минимумы в плотности распределения рациональных чисел соответствуют максимумам в плотности распределения иррациональных чисел (рис. 4). Иррациональным максимумам соответствует минимальная резонансность и, как следствие, минимальная чувствительность к любым внешним воздействиям, минимальное взаимодействие между частями системы и, следовательно, максимальная стабильность ее структуры. Первый максимум в распределении иррациональных чисел, имеющий наибольшую мощность, связан с золотым сечением. Именно это обстоятельство, очевидно, обуславливает повсеместную распространенность данного отношения в параметрах самых различных природных систем: некоторая структура будет наиболее стабильна, наименее подвержена любым внешним воздействиям, когда ее структура и динамика будут построены по принципу золотой пропорции.

Существует многочисленная литература, посвященная золотому сечению. Первые упоминания об этой пропорции встречаются у древних египтян. Наличие золотого сечения в параметрах той или иной системы традиционно связывается с понятием гармонии. Считается, что первым это понятие ввел Пифагор (учение о «гармонии сфер», о единстве микро- и макрокосмоса, учение о пропорциях). Оно присутствует в философских системах Платона, Птолемея, Витрувия, Августина, Боэция («мировая» музыка Боэция – аналог музыки сфер Пифагора) [42; 44]. В эпоху Возрождения одними из наиболее значительных можно считать работы Леонардо да Винчи (поиски идеальных пропорций человеческого тела – «Витрувийский человек»), который способствовал введению в употребление термина «золотое сечение», а также сочинение итальянского математика Луки Пачоли «О божественной пропорции», проиллюстрированное Леонардо да Винчи.

Золотое сечение укоренено в особенностях человеческого восприятия [46] и, возможно, в силу этого широко применяется в изобразительном искусстве [47], музыке [48], архитектуре [49]. Также эта пропорция повсеместно встречается в живой природе (законы филотаксиса, «золотые» спирали в строении многих растений и животных) и неживой природе («золотые» спирали в форме галактик, распределение частот обращения планет Солнечной системы и их разностей образуют спектр с интервалом, равным золотому сечению [44]). Отклонение параметров некоторой природной системы от ее золотых пропорций может служить сигналом развивающейся патологии, и на этой основе могут быть основаны методы диагностики, например, сердечных аритмий [50] или некоторых заболеваний, осложненных токсической формой перитонита [45; 51].

В ряде работ отмечается, что золотое сечение не является единственным аттрактором природных и социальных систем – существуют и другие отношения, чаще всего описываемые металлическими пропорциями (9) [42; 44–45]. Такое представление полностью согласуется с результатами настоящей работы.

## З а к л ю ч е н и е

### Универсальные фрактальные спектры периодов

Идеи, близкие рассмотренным выше, использовались в большом цикле работ, суммированных в книге [52] Хартмута Мюллера в рамках концепции, названной Global Scaling. Эти работы интересны, в первую очередь, тем, что используют систему, состоящую из двух комплементарных фракталов, которые изначально вводились исходя из свойств цепных систем [53], но в дальнейшем, под влиянием [20, 40] использовался подход, близкий к представленному в настоящей статье. В [52] рассмотрено большое количество примеров анализа параметров реальных физических систем: распределение масс и орбитальных периодов небесных тел Солнечной системы, масс и орбитальных периодов спутников Сатурна, Юпитера и Урана, биофизических и геофизических систем, а также ряда технических систем.

В серии работ бразильских авторов [54–59], инспирированных работой [53], анализируются массы элементарных частиц и химических элементов, значения времен жизни возбужденных электронных состояний атомов H, He и Li, а также иона  $Li^+$ , исследуются основное и возбужденные состояния атома водорода. Так, например, в [56] отмечается, что подход [53] позволяет описать массы 117 наиболее точно измеренных (ошибка < 0,13%) элементарных частиц. За исключением единственного случая ошибка такого описания не превышает точность определения массы. В работе [57] анализируются параметры тел Солнечной системы.

В статье [60] рассматриваются циклы, наблюдаемые в системах различной природы (геологических, астрономических, биологических), с периодами от 57,3 года до 1,64 млрд лет. Авторы обнаружили синхронность в поведении проанализированных циклов, которая, по их мнению, предполагает общую причину астрономического происхождения. Наряду с синхронностью говорится о наличии самоподобной универсальной шкалы, причиной которой считается фрактальное распределение материи во Вселенной.

В работах [61–62] проанализированы спектры ряда природных процессов (колебания температуры поверхности Земли и геомагнитного поля, изменения ширины колец деревьев, урожайности сельскохозяйственных культур и т.д.), а также проведен спектральный анализ флуктуаций параметров различных процессов (скоростей биохимических реакций, скорости распада препаратов  $^{239}Pu$ , размеров годовых колец деревьев, радиоизлучения Солнца ( $\lambda = 10,7$  см), годовых сумм осадков и приземных температур в заданных районах России и др.) на основе временных рядов, полученных в ИТЭБ РАН, ИРЭ РАН и других организациях. Временные интервалы исходных рядов менялись от сотен и десятков тысяч лет до часов и минут. Показано, что характерные частоты изученных в [61–62] процессов образуют широкомасштабную, жестко детерминированную самоподобную иерархическую структуру.

Не только временные, но и пространственные размеры обнаруживают дискретные самоподобные распределения. Так, в работе [63] такие распределения показаны для размеров твердых отдельных частей как природного

происхождения, так и получаемых в процессе дробления горных пород. В [64] фрактальные структуры прослеживаются на космологических масштабах.

Выявленные в работах [21–27; 52–64] закономерности, с одной стороны, подтверждают наличие универсальных спектров периодов, имеющих «глобальный» характер и обладающих фрактальным устройством. С другой стороны, предлагаемые в [33–43] способы описания различных спектров могут быть сведены к предлагаемой в настоящей работе модели, что служит дополнительным свидетельством «резонансного» происхождения универсальных спектров.

Возвращаясь к связи между принципом Маха и универсальным спектром периодов, хотелось бы отметить, что рассмотренные выше примеры можно рассматривать как фрагменты единого УСП, пока еще рассыпанные на шкале от микро- до мегамасштабов. Собираение таких фрагментов воедино, восстановление УСП, его теоретическое описание, на наш взгляд, возможно на основе рассмотренной в настоящей статье модели. Одним из следствий данной модели является утверждение о том, что единая, целостная система, части которой соотносятся по принципу «все со всеми», будет со временем эволюционировать в динамически зрелое, упорядоченное состояние, параметры которого могут быть описаны при помощи представленных выше комплементарных фрактальных распределений.

### Литература

1. *Коротич Г.В.* «Все – во всём»: принцип всеобщей взаимной связи у Анаксагора, Николая Кузанского и Лейбница // Вестник Приазовского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 1998. № 5. С. 77–79.
2. Фрагменты ранних греческих философов. М.: 1989.
3. *Кузанский Н.* Сочинения. М.: 1979. Т. 1.
4. *Лейбниц Г.В.* Сочинения. М., 1982. Т. 1.
5. *Владимиров Ю.С.* Реляционная картина мира. Кн.1: Реляционная концепция геометрии и классической физики. М.: ЛЕНАНД, 2021. 224 с.
6. *Эйнштейн А.* Принципиальное содержание общей теории относительности // Собр. научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 613–615.
7. *Владимиров Ю.С.* Метафизика. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009.
8. *Владимиров Ю.С.* Основания физики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008.
9. *Панчелюга В.А.* Основы теории элементарных отношений // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009. 2 (12). Т. 6. С. 176–195.
10. *Панчелюга В.А.* Основания физики и теория элементарных отношений // Метафизика. 2018. № 1 (27). С. 86–92.
11. *Панчелюга В.А., Панчелюга М.С.* Типы элементарных отношений и варианты их применения // Метафизика. 2019. № 1 (31). С. 89–108.
12. *Панчелюга В.А.* Элементарные отношения и базовые философские и физико-математические категории // Метафизика. 2020. № 2 (36). С. 82–106.
13. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.
14. *Владимиров Ю.С.* Геометрофизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
15. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.

16. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 352 с.
17. *Молчанов А.М.* О резонансной структуре Солнечной системы // Современные проблемы небесной механики и астродинамики. М., 1973. С. 32–42.
18. *Molchanov A.M.* The resonant structure of the Solar system. The law of planetary distances // *Icarus*. 1968. Vol. 8. N1/3. P. 203–215. DOI: 10.1016/0019-1035(68)90074-2.
19. *Молчанов А.М.* Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы // *Пространство и время*. 2013. № 1 (11). С. 34–48.
20. *Panchelyuga Victor A., Panchelyuga Maria S.* Resonance and fractals on real numbers set // *Progress in physics*. 2012. Vol. 4. P. 48–53.
21. *Панчелюга В.А., Панчелюга М.С.* Локальный фрактальный анализ шумоподобных временных рядов методом всех сочетаний в диапазоне периодов 1-115 мин // *Биофизика*. 2015. Т. 60. Вып. 2. С. 395–410.
22. *Панчелюга В.А., Панчелюга М.С.* Некоторые предварительные результаты локального фрактального анализа шумоподобных временных рядов методом всех сочетаний // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. 2014. Т. 11. Вып. 1. № 21. С. 134–156.
23. *Диатроптов М.Е., Панчелюга В.А., Панчелюга М.С.* Динамика температуры тела у мелких млекопитающих и птиц в 10–120-минутном диапазоне периодов // *Бюллетень экспериментальной биологии и медицины*. 2020. Т. 169. № 6. С. 706–711.
24. *Диатроптов М.Е., Панчелюга В.А., Панчелюга М.С., Сузов А.В.* Околочасовые ритмы температуры тела у млекопитающих и птиц с разным уровнем обмена веществ // *Доклады российской академии наук. Науки о жизни*. 2020. Т. 494. № 1. С. 472–476.
25. *Панчелюга В.А., Тирас Х.П., Новиков К.Н., Панчелюга М.С., Нефёдова С.Е.* О совпадении спектра периодов во временных рядах хемолюминесценции планарий со спектром периодов, найденным во временных рядах флуктуаций скорости альфа-распада // *Материалы XV Международной конференции «Финслеровы обобщения теории относительности» (FERT-2019)* / ред. Д.Г. Павлов, В.А. Панчелюга. М.: 11-й формат, 2019. С. 36–41.
26. *Siparov S., Samodurov V., Laptev G.* Origin of observed periodic components in astrophysical maser's spectra // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. 467. P. 2813–2819.
27. *Панчелюга В.А., Панчелюга М.С.* О совпадении спектра периодов в флуктуациях скорости альфа-распада со спектром вращательных периодов астероидов // *Материалы XV Международной конференции «Финслеровы обобщения теории относительности» (FERT-2019)* / ред. Д.Г. Павлов, В.А. Панчелюга. М.: 11-й формат, 2019. С. 27–29.
28. *Селюков Е.И., Стигнеева Л.Т.* Краткие очерки практической микрогеодинамики. СПб.: Питер, 2010. 176 с.
29. *Физический энциклопедический словарь*. М.: Советская энциклопедия, 1984. 944 с.
30. *Физическая энциклопедия*. Т. 4. М.: Научное изд-во «Большая Российская энциклопедия». 1994. 704 с.
31. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 591 с.
32. *Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С.* Теория колебаний. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 272 с.
33. *Ден-Гартог Дж.П.* Теория колебаний. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1942. 465 с.
34. *Тимошенко С.П.* Теория колебаний в инженерном деле. М.-Л.: Государственное научно-техническое издательство, 1932. 344 с.
35. *Бутенин Н.В.* Теория колебаний. М.: Государственное издательство «Высшая школа», 1963. 187 с.

36. Смолин И.Ю., Каракулов В.В. Аналитическая динамика и теория колебаний: учебное пособие. Томск: Томский государственный университет, 2012. 172 с.
37. Смолин И.Ю. Теория колебаний. Томск: ТГУ, 2011. 78 с.
38. Баев В.К. Теория колебаний: учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2015. 348 с.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 224 с.
40. Kyril Dombrowski Rational Numbers Distribution and Resonance // Progress in Physics. 2005. Vol. 1. P. 65–67.
41. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М., 1978.
42. Stakhov A.P. Codes of golden proportion. М., 1984.
43. Куликова Т.А. Математика золотого сечения. М.: Изд-во МЭИ, 2018. 76 с.
44. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Питер, 2006. 320 с.
45. Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: введение в общую теорию гармонии систем. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 264 с.
46. Лефевр В.А. Формула человека: Контуры фундаментальной психологии. М.: Прогресс, 1991. 108 с.
47. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. К.: Выща школа, 1989. 143 с.
48. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. М.: Мол. гвардия, 1990. 238 с.
49. Зарудко В.В. Золотое сечение: Традиция и современность. М.: Наука, 2003. 211 с.
50. Добрых В.А. Аритмии сердца: симметрия, золотое сечение. Хабаровск: Антар, 2011. 138 с.
51. Симонян К.С. Перитонит. М., 1971.
52. Muller H. Global Scaling. The fundamentals of interscalar cosmology. New York: New Heritage Publishers, 2018.
53. Muller H. Fractal Scaling Models of Resonant Oscillations in Chain Systems of Harmonic Oscillators // Progress in physics. 2009. Vol. 2. P. 72–76.
54. Ries A., Fook M.V.L. Fractal structure of nature's preferred masses: Application of the model of oscillations in a chain system // Progress in physics. 2010. Vol. 4. P. 82–89.
55. Ries A., Fook M.V.L. Excited electronic states of atoms described by the model of oscillations in a chain system // Progress in physics. 2011. Vol. 4. P. 20–24.
56. Ries A. The radial electron density in the hydrogen atom and the model of oscillations in a chain system // Progress in physics. 2011. Vol. 4. P. 20–24.
57. Ries A. Atomic Weights confirm bipolar model of oscillations in a chain system // Progress in physics. 2013. Vol. 4. P. 63–67.
58. Ries A. A bipolar model of oscillations in a chain system for elementary particle masses // Progress in physics. 2012. Vol. 4. P. 20–28.
59. Ries A., Fook M.V.L. Application of the model of oscillations in a chain system to the solar system // Progress in physics. 2011. Vol. 1. P. 103–111.
60. Puetz S.J., Prokoph A., Borchardt G., Mason Ed.W. Evidence of synchronous, decadal to billion year cycles in geological, genetic, and astronomical events // Chaos. Solitons&Fractals. 2014. 62–63. P. 55–75.
61. Шабельников А.В. Воздействие космофизических факторов на климат и биосферу Земли // Биофизика. 1992. Т. 37. Вып. 3. С. 572–575.
62. Шабельников А.В., Кирьянов К.Г. Вековые, годовые и суточные колебания параметров некоторых природных процессов // Биофизика. 1998. Т. 43. Вып. 5. С. 874–877.
63. Садовский М.А. О распределении размеров твердых отдельностей // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 1. С. 69–72.
64. Барышев Ю., Теерикорпи П. Фрактальная структура Вселенной: очерк развития космологии. Нижний Архыз: САОРАН, 2005. 396 с.

# MAX PRINCIPLE AND UNIVERSAL SPECTRUM OF PERIODS: COMPLEMENTARY FRACTAL DISTRIBUTIONS AS CONSEQUENCE OF RATIONAL AND IRRATIONAL RELATIONS BETWEEN PARTS OF THE WHOLE SYSTEM

V.A. Panchelyuga\*, M.S. Panchelyuga

*Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of RAS  
3 Institutskaya St, Pushchino, Moscow Region, 142290, Russian Federation*

**Abstract.** The paper discusses the assumption that Mach principle should result in existence of a universal spectrum of periods. It is shown that fragments of such a spectrum were found in time series of fluctuations of various processes. A general approach is considered that demonstrates the emergence of discrete states in the spectra of periods, which is based on two basic concepts: resonance and roughness of a physical system. This approach leads to the existence of two complementary fractal distributions associated with sets of rational and irrational relations between the elements of the whole system. A brief review of works that also consider universal spectra of periods is given.

**Keywords:** Mach principle, relations, resonance, universal spectrum of periods, equivalence classes, continued fractions, golden ratio, fractals

---

\* E-mail: victor.panchelyuga@gmail.com