ИННОВАЦИОННЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ WOLFRAMALPHA ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДОВ СТУДЕНТАМИ БАКАЛАВРИАТА

Д.А. Власов

Кафедра точных и естественных наук
Московский государственный гуманитарный
университет им. М.А. Шолохова
Верхняя Радищевская ул., 16—18, Москва, Россия, 109240

А.В. Синчуков

Кафедра математического анализа
Московский педагогический государственный университет
Краснопрудная ул., 14, Москва, Россия, 107140

В статье представлены основные результаты исследования дидактических возможностей новых технологий WolframAlpha при изучении количественных методов студентами бакалавриата. Исследование проведено на примере реализации метода наименьших квадратов (МНК, OLS, Ordinary Least Squares) — базового, доступного и широко применяемого метода регрессионного анализа. Данный количественный метод, предложенный Карлом Фридрихом Гауссом и Адриеном Мари Лежандром, используется для оценки неизвестных параметров моделей аппроксимации (в том числе регрессионных моделей) по экспериментальным данным, имеющим различный содержательную смысловую нагрузку.

Ключевые слова: WolframAlpha, бакалавриат, метод наименьших квадратов, количественные методы, аппроксимация, модель, математическая подготовка.

Введение. Необходимо отметить оправданную целесообразность изучения метода наименьших квадратов бакалаврами различных направлений подготовки. Благодаря своей относительной простоте и широте применения к различным ситуациям и проблемам он приобретает особую значимость для системы прикладной математической подготовки бакалавров в гуманитарном университете. Значимость прикладной математической подготовки бакалавров обусловлена, с одной стороны, возрастающими профессиональными требованиями (прикладная математика как основа естественно-научных и гуманитарных исследований), с другой стороны, математизацией и информатизацией всех сфер деятельности.

В рамках изучения МНК студента бакалавриата следует ознакомить с принципиальными возможностями и практикой исследования количественных характеристик и качественных свойств объектов в области будущей профессиональной деятельности, сведения прикладной задачи к изучению более простых, удобных объектов. Математическая ценность метода наименьших квадратов велика и заключается в приближенном представлении (аппроксимации) заданной функции другими (более простыми) функциями, нахождении совокупности величин, удовлетворяющих уравнениям или ограничениям, количество которых превышает количество этих величин и т.д. Прикладная ценность метода сводится к его широкому применению в нейронных сетях, в различных областях медицины, бизнеса, физике, геологии и технике, экономике, социологии, политологии для решения задач автоматизации, прогнозирования и классификации.

Большую значимость МНК имеет в социально-экономической сфере, прогнозировании показателей в процессе исследования временных рядов. Данный метод, обеспечивающий аппроксимацию (приближение), имеет и научно-философское значение, заключающееся в замене одних объектов другими, более простыми или близкими к исходным, называется аппроксимацией (приближением).

Рассмотрим идею и реализацию МНК в общем виде, доступном для восприятия студентами бакалавриата.

Постановка задачи. Используя метод наименьших квадратов, необходимо найти параметры линейной зависимости $y = ax + b$, выравнивающей данные (табл. 1).

Таблица 1

Вид экспериментальных данных для реализации МНК

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Метод решения. МНК предполагает минимизацию суммы квадратов отклонений y_i от $ax_i - b$, т.е. задача сводится к $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(ax_i + b\right)\right)^2 \to \min$. Другими словами, при искомых значениях параметров a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. Найдем далее экстремум функции двух переменных, воспользовавшись необходимым условием экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0; \\ \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Относительно рассматриваемой функции $S(a, b)$ по переменным a и b получаем:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(ax_i+b\right)\right)x_i=0; \\ -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(ax_i+b\right)\right)=0; \end{cases} \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i; \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Решив данную систему двух уравнений с двумя переменными, получаем формулы для нахождения параметры линейной зависимости $y = ax + b$ по МНК:

$$\begin{cases} a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}; \\ b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}. \end{cases}$$

При данных a и b функция $S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(ax_i+b\right)\right)^2$ принимает наименьшее значение.

Комментарий 1. Формула для нахождения параметра a содержит суммы $\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\sum_{i=1}^{n}y_i$, $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ и параметр n — количество пар экспериментальных данных в табл. 1. Значения этих сумм можно рекомендовать вычислять отдельно. Коэффициент b следует находить после вычисления коэффициента a.

Комментарий 2. Найденные значения a и b соответствуют наименьшему значению функции $S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(ax_i+b)\right)^2$, следовательно, являются искомыми параметрами для МНК.

Комментарий 3. В ряде случаев возможно сведение аппроксимирующей функции, не являющейся многочленом, к многочлену с помощью замены переменной.

Практические аспекты использования WolframAlpha в учебном процессе (при изучении количественных методов, в частности МНК) и представим результаты решения прикладной задачи. Во-первых, WolframAlpha предоставляет возможность строить графики функций по точкам, полученным, например, в результате эксперимента $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$,$\{x_n, y_n\}$. Во-вторых, для аппроксимации функции заданной таблично в WolframAlpha служит запрос **fit**, который реализует МНК. Различные варианты его использования приведем в табл. 2.

Таблица 2

Модели аппроксимации в WolframAlpha

Название	Реализация
Linear model Линейная аппроксимация	Linear fit $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$
Quadratic model Квадратичная аппроксимация	quadratic fit $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$
Cubic model Кубическая аппроксимация	cubic fit $\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$
Exponential model Экспоненциальная модель	exponential fit $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$
Logarithmic model Логарифмическая модель	log fit $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$
Polynomial model 4th order Полиномиальная аппроксимация 4-го порядка	polynomial of degree 4 fit $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$
Polynomial model 10th order Полиномиальная аппроксимация 10-го порядка	polynomial of degree 10 fit $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$
Choice by WolframAlpha Выбор WolframAlpha	Fit $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_n, y_n\}$

Прикладная задача. По данным сайта туристической биржи «БАНКО travel-inform» (http://www.tourdom.ru) «Средняя стоимость турпакета» и «Количество ночей в стране пребывания» распределены следующим образом (табл. 3). Найти зависимость между этими величинами с помощью метода наименьших квадратов.

Таблица 3

Данные прикладной задачи

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	15 200	17 000	22 300	25 000	26 500	30 000	31 000	37 400	39 600	40 000	41 400	45 300

Воспользуемся возможностями WolframAlpha визуализировать экспериментальные данные. Для построения корреляционного поля (первый этап исследования) представим экспериментальные данные табл. 4 в специальном виде {1,15200}, {2,17000}, {3,22300}, {4,25000}, {5,26500}, {6,30000}, {7,31000}, {8,37400}, {9,39600}, {10,40000}, {11,41400}, {12,45300}. Анализ корреляционного поля позволяет, во-первых, судить о наличии или отсутствии зависимости между величинами, во-вторых, предположить вид искомой зависимости. На втором этапе исследования, построив корреляционное поле (рис. 1), необходимо поставить вопрос о выборе вида модели (рис. 2—9). Этот выбор в WolframAlpha реализован с помощью различных операторов, представленных в табл. 2.

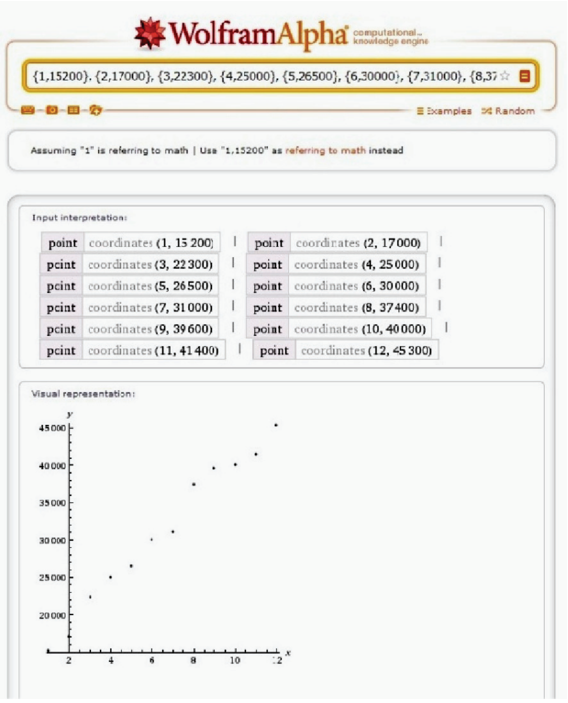

Рис. 1. Корреляционное поле

Рис. 2. Линейная модель

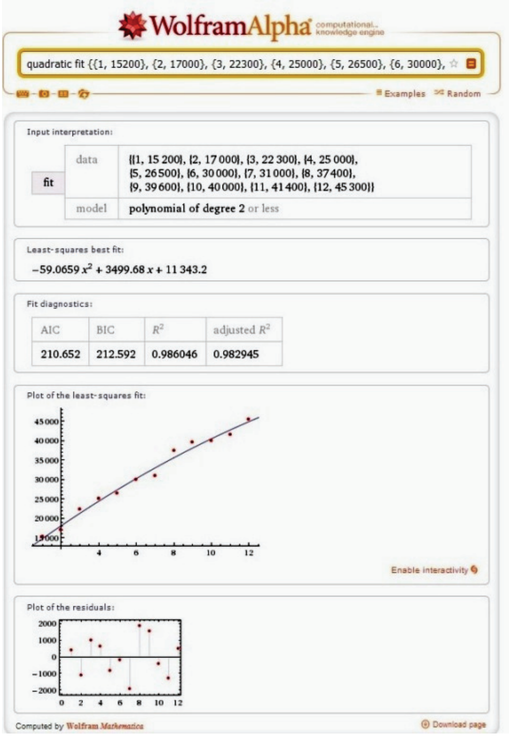

Рис. 3. Квадратичная модель

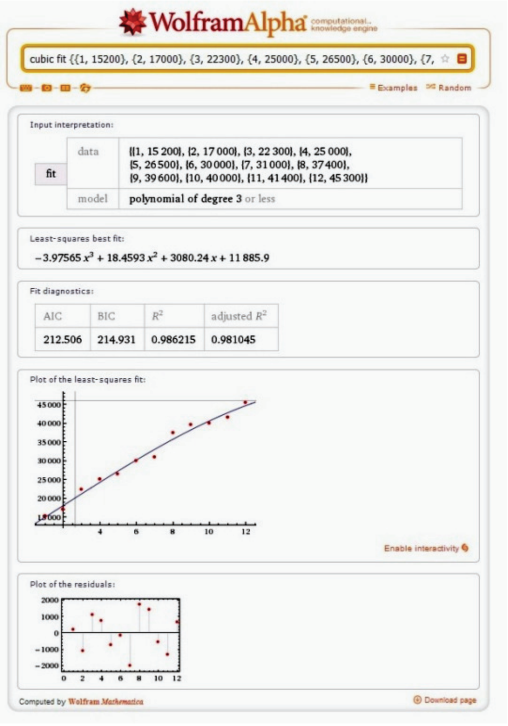

Рис. 4. Кубическая модель

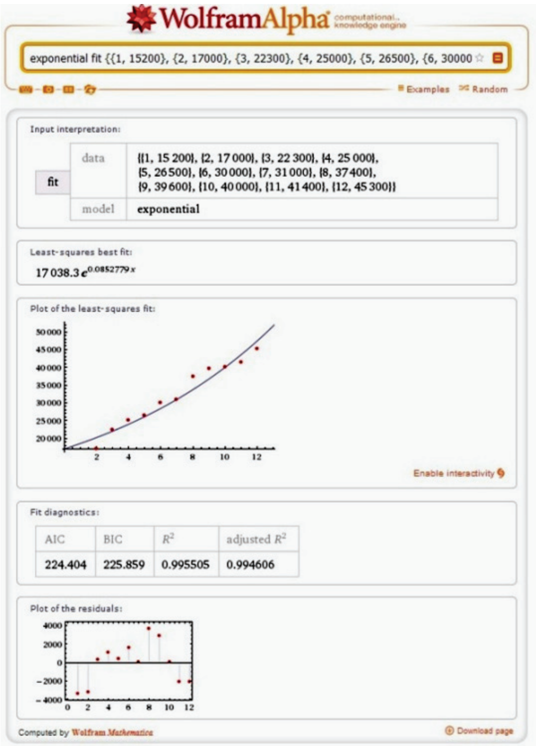

Рис. 5. Экспоненциальная модель

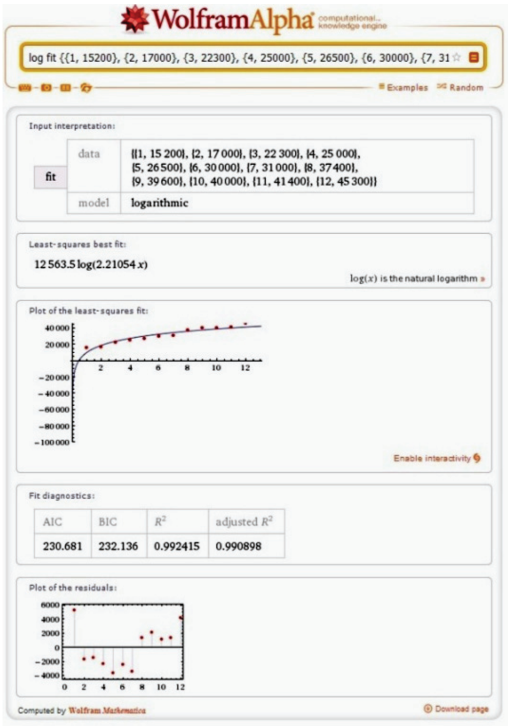

Рис. 6. Логарифмическая модель

Рис. 7. Автоматический выбор

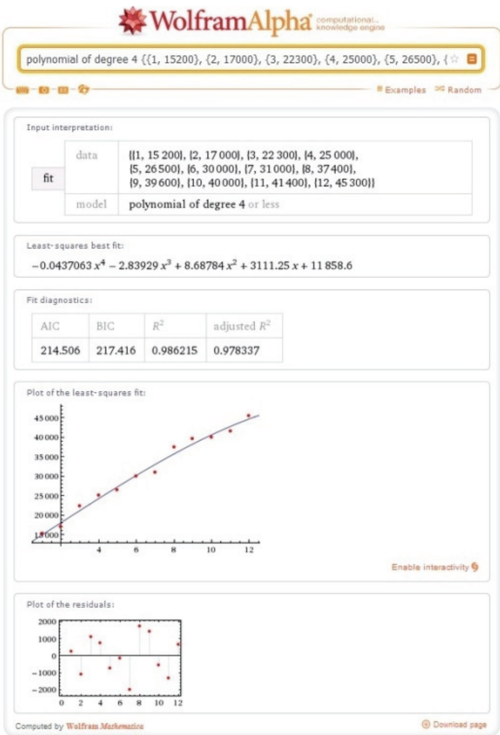

Рис. 8. Полиномиальная модель 4-й степени

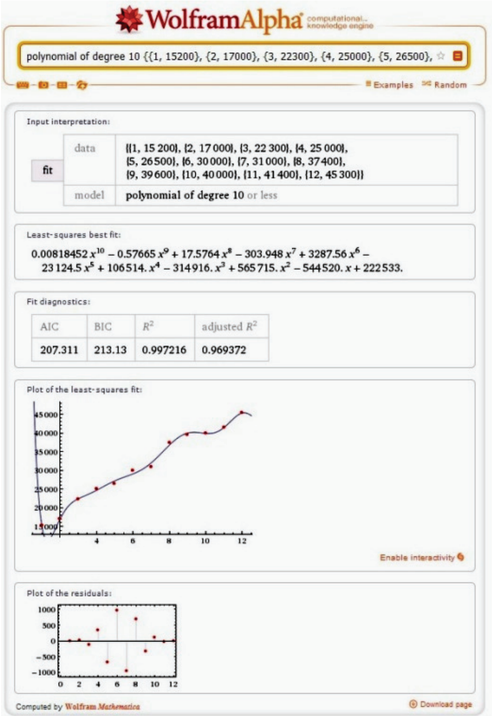

Рис. 9. Полиномиальная модель 10-й степени

В табл. 4 представим основные результаты исследования прикладной задачи.

Таблица 4

Результаты аппроксимации в WolframAlpha

Вид модели / Аналитический вид зависимости	Коэффициент детерминации R^2	Скорректированный коэффициент детерминации adjusted R^2
Linear model Линейная аппроксимация $y = 2731{,}82x + 13134{,}8$	0,981762	0,979939
Quadratic model Квадратичная аппроксимация $y = -59{,}0659x^2 + 3499{,}68x + 11343{,}2$	0,986046	0,982945
Cubic model Кубическая аппроксимация $y = -3{,}97565x^3 + 18{,}4593x^2 + 3080{,}24x + 11885{,}9$	0,986215	0,981045
Exponential model Экспоненциальная модель $y = 17038{,}3e^{0{,}0852779x}$	0,995505	0,994606
Logarithmic model Логарифмическая модель $y = 12563{,}5\ln(2{,}21054x)$	0,992415	0,990898
Polynomial model 4th order Полиномиальная аппроксимация 4-го порядка $y = -0{,}0437063x^4 - 2{,}83929x^3 + 8{,}68784x^2 + 3111{,}25x + 11858{,}6$	0,986215	0,978337

Комментарий 4. Использование WolframAlpha позволяет не только получить аналитический вид зависимости, но и провести ее анализ, в частности найти коэффициент детерминации, и скорректированный коэффициент детерминации (в ко-

тором используются несмещенные оценки дисперсий). Отметим, что коэффициент детерминации для рассматриваемых моделей может принимать значения от 0 до 1. Чем ближе значение коэффициента к 1, тем сильнее исследуемая зависимость. При оценке регрессионных моделей это следует интерпретировать как соответствие построенной модели экспериментальным данным.

Заключение. Целесообразное, дозированное и методически оправданное использование базы знаний WolframAlpha при изучении количественных методов студентами бакалавриата (как на аудиторных занятиях, так и в процессе самостоятельной исследовательской работы) является условием более эффективного развития профессиональной компетентности студентов в соответствии с требованиями ФГОС.

Рис. 10. Области применения WolframAlpha в учебном процессе

Разработанная и совершенствуемая авторами методика проведения практических занятий по учебной дисциплине «Количественные методы и математическое моделирование», особенностью которой является интегрированное использование WolframAlpha и актуальных мировых информационных ресурсов, позволяет в большей мере сформировать готовность выпускников бакалавриата к осознанному, активному и плодотворному использованию математических и инструментальных средств и методов в будущей профессиональной деятельности. В учебном пособии [4] доступно представлен широкий круг проблем и методов классического математического анализа, линейной алгебры, математического программирования, теории игр, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов и нечетких множеств. Наиболее востребованные области применения WolframAlpha, выделенные в процессе экспериментальной работы, представлены на рис. 10.

Новый учебно-методический комплекс «Количественные методы и математическое моделирование», разработанный авторами в среде АСУ МГГУ им. М.А. Шолохова (Gisoft), включающий учебную тему «Метод наименьших квадратов», позволяет по-новому структурировать учебную информацию и реализовать прикладную направленность обучения математики в бакалавриате в условиях сокращения аудиторной нагрузки. Основу УМК «Количественные методы и математическое моделирование» составляет система управленческих, социальных, экономических задач, решаемых с помощью количественных методов. Разнообразные примеры и задачи иллюстрируют применение рассмотренных количественных методов.

Результаты трехлетней апробации специально созданной учебной дисциплины «Количественные методы и математическое моделирование» на всех факультетах МГГУ им. М.А. Шолохова позволили выявить три уровня использования и богатый дидактический потенциал базы знаний WolframAlpha, представленных на рис. 11.

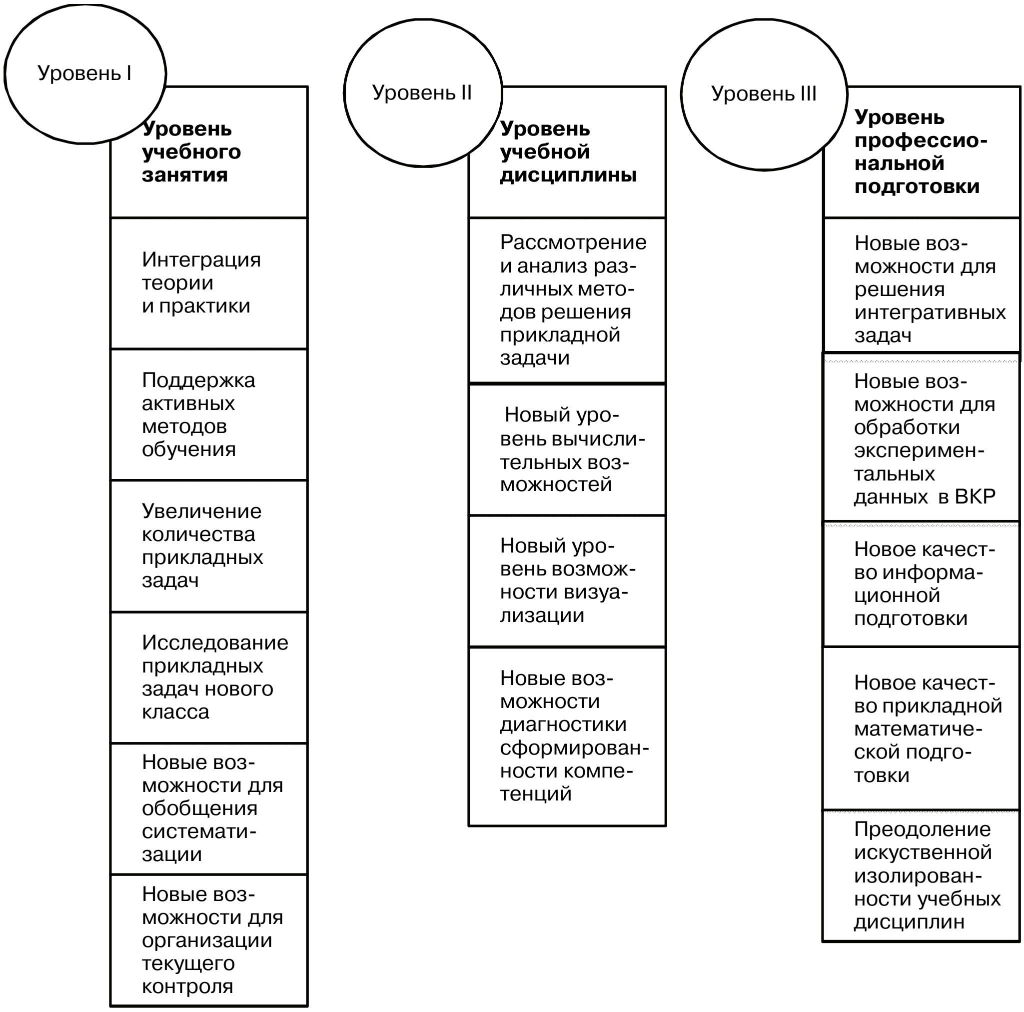

Рис. 11. Уровни использования и дидактический потенциал WolframAlpha

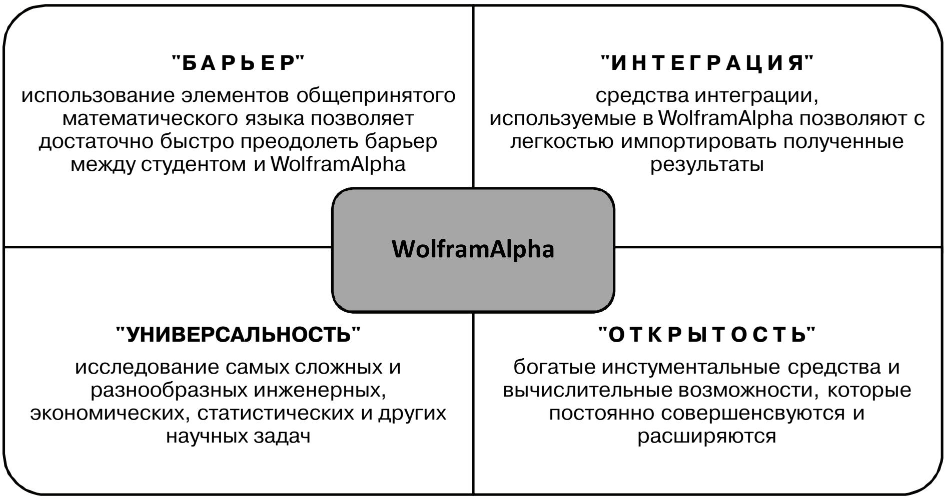

Рис. 12. Методические особенности использования WolframAlpha в учебном процессе

Опыт внедрения новых технологии WolframAlpha при изучении количественных методов студентами бакалавриата в МГГУ им. М.А. Шолохова позволяет констатировать четыре основные методические особенности использования WolframAlpha в учебном процессе, представленные на рис. 12.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Orlando Gomes.* Ordinary least squares learning and nonlinearities in macroeconomics // Journal of Economic Surveys. — Vol. 24. — Issue 1. — P. 52—84, February 2010.
[2] *Pietro Balestra.* On the Efficiency of Ordinary Least-Squares in Regression Models // Journal of the American Statistical Association. — Vol. 65. — No. 331 (Sep., 1970). — P. 1330—1337.
[3] *Власов Д.А., Синчуков А.В.* Стратегия развития методической системы математической подготовки бакалавров // Наука и школа. — 2012. — № 5. — С. 61—65.
[4] *Власов Д.А., Синчуков А.В., Качалова Г.А.* Количественные методы и математическое моделирование: Учеб. пособие. — М.: Типография «11 формат», 2012.
[5] *Грачева М.В.* Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для студентов вузов. — М.: Юнити-Дана, 2013.
[6] *Смирнов Е.И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: Монография. — Ярославль, 2012.
[7] *Уотшем Т.Д., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах. — М.: Юнити, 1999.

LITERATURA

[1] *Orlando Gomes.* Ordinary least squares learning and nonlinearities in macroeconomics // Journal of Economic Surveys. — Vol. 24. — Issue 1. — P. 52—84, February 2010.
[2] *Pietro Balestra.* On the Efficiency of Ordinary Least-Squares in Regression Models // Journal of the American Statistical Association. — Vol. 65. — No. 331 (Sep., 1970). — P. 1330—1337.
[3] *Vlasov D.A., Sinchukov A.V.* Strategija razvitija metodicheskoj sistemy matematicheskoj podgotovki bakalavrov // Nauka i shkola. — 2012. — № 5. — S. 61—65.
[4] *Vlasov D.A., Sinchukov A.V., Kachalova G.A.* Kolichestvennye metody i matematicheskoe modelirovanie: Uchebnoe posobie. — M.: Tipografija «11 format», 2012.

[5] *Gracheva M.V.* Kolichestvennye metody v jekonomicheskih issledovanijah: Uchebnik dlja studentov vuzov. — M.: Juniti-Dana, 2013.
[6] *Smirnov E.I.* Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga: monografija. — Jaroslavl', 2012.
[7] *Uotshem T.D., Parramou K.* Kolichestvennye metody v finansah. — M.: Juniti, 1999.

NEW TECHNOLOGIES WOLFRAMALPHA WHILE STUDYING QUANTITATIVE METHODS BY BACHELORS

D.A. Vlasov

Chair of exact and natural sciences
The Moscow state humanitarian
university named after M.A. Sholokhov
Verhnjaja Radishhevskaja str., 16—18, Moscow, Russia, 109240

A.V. Sinchukov

Chair of the mathematical analysis
Moscow pedagogical state university
Krasnoprudnaja str., 14, Moscow, Russia, 107140

The purpose of this article — representation of the main results of research of didactic opportunities of the new WolframAlpha technologies when studying quantitative methods by students of a bachelor degree. Research is conducted on the example of realization of a method of the smallest squares (MMK, OLS, Ordinary Least Squares) — a basic, available and widely applied method of the regression analysis. This quantitative method offered by Charles Friedrich Gauss and Adrien Mari Legendre, is used for an assessment of unknown parameters of models of approximation (including regression models) on the experimental data having various substantial semantic loading.

Key words: WolframAlpha, bachelor, *ordinary least squares*, quantitative methods, approximation, model, mathematical training.