ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Р.М. Асланов, О.В. Ли

Кафедра математического анализа
Московский педагогический государственный университет
Краснопрудная ул., 14, Москва, Россия, 107140

В данной статье рассматривается структура и содержание учебного пособия «Лабораторный практикум по математическому анализу с применением информационных технологий», авторами которого являются Р.М. Асланов и О.В. Ли. Пособие может быть использовано при проведении практических занятий в очной и дистанционной формах обучения.

Ключевые слова: структура, содержание, математический анализ, Mathcad.

На сегодняшний день в ФГОС ВПО РФ уделяется особое внимание применению информационных технологий в процессе обучении. В статье акцентируется внимание на использовании системы компьютерной алгебры Mathcad в лабораторном практикуме по математическому анализу, адресованном студентам и преподавателям педагогических вузов по направлению «Педагогическое образование» (профиль подготовки «Информатика») по курсу «Математический анализ». Система компьютерной алгебры Mathcad используется в сложных проектах, чтобы визуализировать результаты математического моделирования путем использования распределенных вычислений и традиционных языков программирования. Эта система достаточно удобна для проведения вычислений и инженерных расчетов.

Рассмотрим структуру и содержание предполагаемого лабораторного практикума.

1. Предисловие.
2. Лабораторная работа № 1. «Вычисление определенного интеграла».
   Задания для самоподготовки.
3. Лабораторная работа № 2. «Вычисление определенного интеграла заменой переменной».
   Задания для самоподготовки.
4. Лабораторная работа № 3. «Вычисление определенного интеграла интегрированием по частям».
   Задания для самоподготовки.
5. Лабораторная работа № 4. «Интегрирование рациональных функций».
   Задания для самоподготовки.
6. Лабораторная работа № 5. «Интегрирование иррациональных функций».
   Задания для самоподготовки.
7. Контрольная работа № 1.
8. Лабораторная работа № 6. «Вычисление длины дуги плоской кривой».
   Задания для самоподготовки.
9. Лабораторная работа № 7. «Вычисление площадей плоских фигур».
   Задания для самоподготовки.

10. Лабораторная работа № 8. «Вычисление площади поверхности тела».
Задания для самоподготовки.
11. Лабораторная работа № 9. «Вычисление объема тела».
Задания для самоподготовки.
12. Контрольная работа № 2.
13. Приложение.
14. Литература.

Лабораторный практикум по математическому анализу включает девять лабораторных работ по разделу «Интегральное исчисление». В лабораторные работы включены: теоретический материал, дополнительный материал, примеры с подробным решением с применением системы компьютерной алгебры Mathcad, задания с ответами для самоподготовки, две контрольные работы. Первая контрольная работа посвящена проверке освоения тем, изученных в лабораторных работах № 1—5. Вторая контрольная работа посвящена проверке освоения тем, изученных в лабораторных работах № 6—9. В приложении дана таблица основных неопределенных интегралов в помощь студентам и преподавателям и информация о системе компьютерной алгебры Mathcad.

Рассмотрим содержание одной из лабораторных работ пособия. Так как объем лабораторной работы большой, будут рассмотрены лишь некоторые примеры с подробным решением.

Лабораторная работа № 9. «Вычисление объема тела»

Цель работы: обучить студентов вычислять объем тела вращения и объем тела, ограниченного поверхностями, с помощью двойного и тройного интеграла в прямоугольной, цилиндрической, сферической системе координат с использованием систем компьютерной математики.

Теоретический материал

Объем тела вращения. Объем поверхности вращения, образованной вращением кривой $y = f(x), \quad a \le x \le b$ вокруг оси Ox, можно вычислить по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

Пример 1. Вычислить объем конуса, высота которого $h = 8$ и радиус основания $r = 4$.

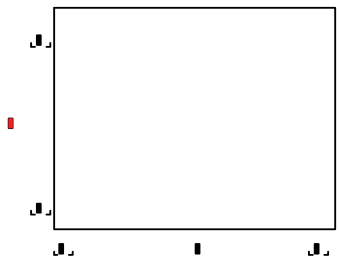
Построение графика. Для наглядности построим график функции в системе компьютерной алгебры Mathcad. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпала с высотой h, а вершину конуса примем за начало координат. Будем рассматривать поверхность конуса как поверхность, полученную в результате вращения прямой $y = \frac{4}{8}x$ вокруг оси Ox.

В системе компьютерной алгебры Mathcad набираем данные функции:

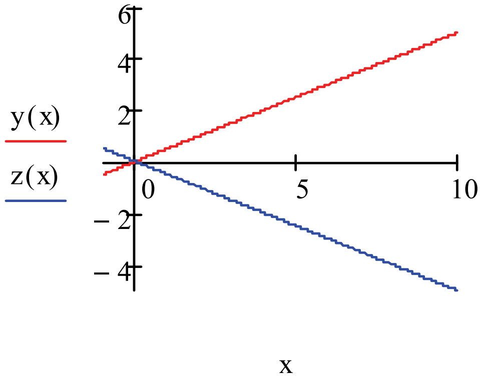
$$y(x) := \frac{4}{8}x;$$

$$z(x) := -\left(\frac{4}{8}x\right).$$

После нажатия на панели инструментов соответствующей кнопки на экране монитора появится система координат



В соответствующих полях этой системы координат вводим параметры и наиболее удобный масштаб. В результате на экране высвечиваются графики соответствующих функций.



Решение. Объем поверхности конуса найдется по формуле (1). Следовательно,

$$V = \pi \int_0^8 y^2 dx = \pi \int_0^8 \frac{16}{64} x^2 dx = \frac{128}{3}\pi.$$

Проверка. В системе компьютерной алгебры Mathcad набираем интеграл $\pi \int_0^8 \frac{16}{64} x^2 dx$. После нажатия на панели инструментов соответствующей кнопки появляется выражение

$$\int_0^8 \pi \frac{16}{64} x^2 dx \to \frac{128 \cdot \pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{128}{3}\pi$ (куб. ед.).

Объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, а также прямыми $x_1 = a$ и $x_2 = b$ вокруг оси Ox, вычисляется следующим образом.

1 этап

1. Если выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases},$$

то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x) \right) dx. \qquad (2)$$

2. Если же неизвестны a и b, или неизвестно, какая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ больше другой на отрезке $[a; b]$, то переходим ко второму этапу.

2 этап

Находим точки a и b, как точки пересечения графиков функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$. Для этого нужно решить уравнение $f_1(x) = f_2(x)$.

3 этап

Необходимо выяснить знак разности $f_1(x) - f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$. Для этого достаточно взять любую точку из интервала $(a; b)$ и вычислить в этой точке значение разности $f_1(x) - f_2(x)$. Возможны два случая.

1. Если $f_1(x) - f_2(x) \ge 0$, то $f_1(x) \ge f_2(x)$, тогда объем тела вычисляется по формуле

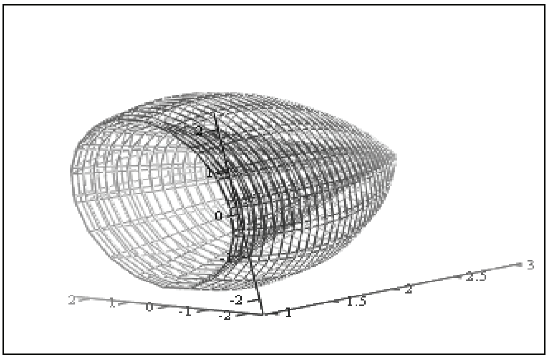
$$V = \pi \int_a^b \left(f_1^2(x) - f_2^2(x) \right) dx. \qquad (3)$$

2. Если $f_1(x) - f_2(x) \le 0$, то $f_1(x) \le f_2(x)$, тогда объем тела вычисляется по формуле (2).

Замечание. Аналогично решается задача, если тело образовано вращением фигуры вокруг оси *Oy*.

Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y_1 = 3x - x^2$ и $y_2 = 3 - x$ вокруг оси *Ox*.

График этой фигуры, построенный в системе компьютерной алгебры Mathcad, изображен на рис. 1.



DY,SX

Рис. 1. Объем тела, ограниченного поверхностями

Вычисление объема тела с помощью двойного интеграла

Объем тела, ограниченного поверхностями, вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (4)$$

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } x^2 + y^2 - 2z^2 = -4.$$

Построение графика. Для наглядности построим графики функций в системе компьютерной алгебры Mathcad. Будем рассматривать поверхность тела как поверхность, полученную в результате ограничения поверхностей $z_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z_2 = \sqrt{2 + \frac{x^2 + y^2}{2}}$.

В системе компьютерной алгебры Mathcad набираем данные функции

$$z(x, y) := \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$f(x, y) := \left(2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

После нажатия на панели инструментов соответствующей кнопки на экране монитора появится трехмерная система координат (рис. 2).

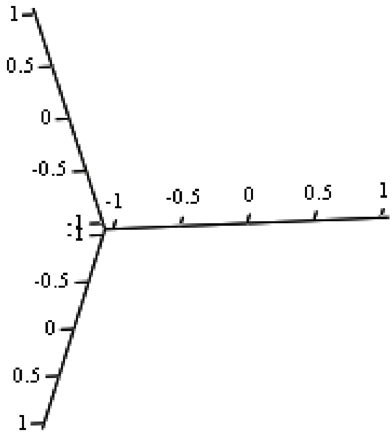


Рис. 2. Трехмерная система координат

В соответствующих полях этой системы координат вводим параметры и наиболее удобный масштаб. В результате система компьютерной алгебры строит графики соответствующих функций (рис. 3).

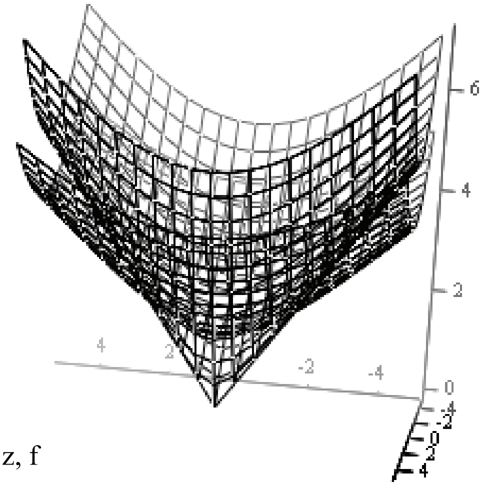


Рис. 3. Поверхность тела ограниченного поверхностями $z_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z_2 = \sqrt{2 + \frac{x^2 + y^2}{2}}$

Решение. Линия пересечения поверхностей $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $x^2 + y^2 - 2z^2 = -4$ — это окружность $x^2 + y^2 = 4$ (проекция на плоскость *Oxy*). Проекция на *Oxy* самого тела — круг, ограниченный этой окружностью: $x^2 + y^2 \le 4.$ Тело можно задать неравенствами: $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)}.$

Откуда по формуле (4) имеем

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx\, dy,$$

где область интегрирования D — круг радиуса 2 с центром в начале координат. Для вычисления данного интеграла перейдем к полярной системе координат

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{2 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{2}r^2} - r \right) r\, dr = \frac{8\pi}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Проверка. В системе компьютерной алгебры Mathcad набираем интеграл

$$2\pi \int\limits_0^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{2}r^2} - r \right) rdr.$$

После нажатия панели инструментов соответствующей кнопки получаем искомое решение

$$\int\limits_0^2 2\pi \left[\left(2 + \frac{1}{2}r^2 \right)^{\frac{1}{2}} - r \right] rdr \to -\frac{8 \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2} - 2\right)}{3}.$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right).$

Вычисление объема тела с помощью тройного интеграла

Объем тела в прямоугольной системе координат

Объем тела U в прямоугольной системе координат $Oxyz$ вычисляется по формуле

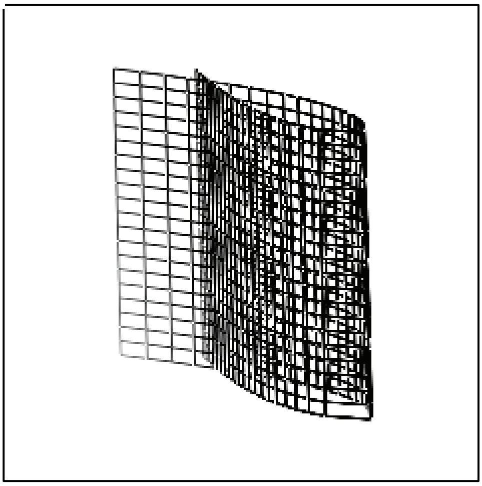
$$V=\iiint\limits_U dxdydz. \tag{5}$$

При вычислении объемов трехмерных тел полезно при помощи системы компьютерной алгебры Mathcad получать их изображения.

Пример 4. Найти объем трехмерной фигуры, ограниченной поверхностями

$$z=0,\, z=2-x,\;\; y=2\sqrt{x},\;\; y=\frac{1}{4}x^2.$$

График трехмерной фигуры, построенный в системе компьютерной алгебры Mathcad, изображен на рис. 4.



y1, y2

Рис. 4. Тело, ограниченное поверхностями
$z=0, z=2-x,\; y=2\sqrt{x},\; y=\frac{1}{4}x^2$

В цилиндрических координатах объем тела вычисляется по формуле

$$V=\iiint\limits_U \rho d\rho d\phi dz. \tag{6}$$

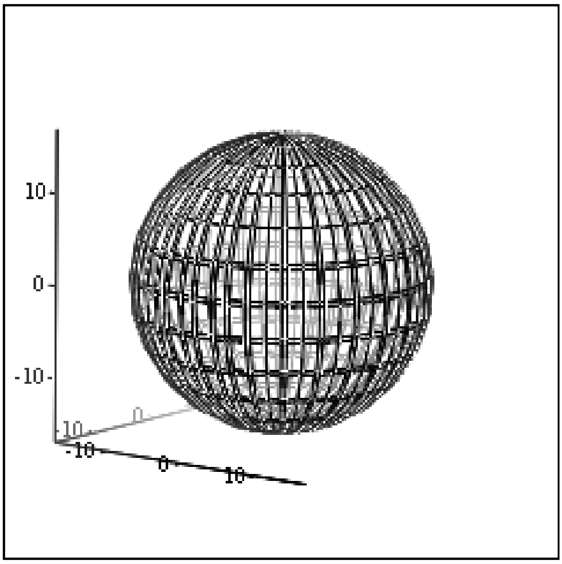
Объем тела в сферической системе координат

В сферических координатах, соответственно, используется формула

$$V=\iiint\limits_U \rho^2\sin\theta d\rho d\phi d\theta. \tag{7}$$

Пример 5. Найти объем шара $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

График этого шара, построенный в системе компьютерной алгебры Mathcad, изображен на рис. 5.



z

Рис. 5. График шара $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

В заключение можно сказать, что информационные технологии играют важную роль в развитии пространственно-графической культуры студентов. В частности, система компьютерной алгебры Mathcad позволяет студентам моделировать геометрические объекты в трехмерном пространстве и осознать роль информационных технологий в решении математических задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Асланов Р.М., Федорова А.А.* Начала анализа и их приложения: Учебное пособие. — М.: МПГУ, 2008.

[2] *Ли О.В.* Об использовании информационных технологий в курсе математического анализа в педвузе // Современные подходы к оценке и качеству математического образования в школе и вузе: Материалы 32 Международного научного семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов. — Екатеринбург: УрГПУ, РГППУ, УрГЭУ, 2013. — С. 127—129.

LITERATURA

[1] *Aslanov R.M., Fedorova A.A.* Nachala analiza i ih prilozhenija: Uchebnoe posobie. — M.: MPGU, 2008.

[2] *Li O.V.* Ob ispol'zovanii informacionnyh tehnologij v kurse matematicheskogo analiza v pedvuze // Sovremennye podhody k ocenke i kachestvu matematicheskogo obrazovanija v shkole i vuze: Materialy 32 Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki universitetov i pedagogicheskih vuzov. — Ekaterinburg: UrGPU, RGPPU, UrGJeU, 2013. — S. 127—129.

LABORATORY PRACTICAL WORK ACCORDING TO THE MATHEMATICAL ANALYSIS WITH APPLICATION INFORMATION TECHNOLOGIES

R.M. Aslanov, O.V. Li

Chair of the mathematical analysis
Moscow pedagogical state university
Krasnoprudnaja str., 14, Moscow, Russia, 107140

In this article the structure and contents of the manual "Laboratory Workshop on the Mathematical Analysis with Application of Information Technologies" which Authors are R.M. Aslanov and O.V. Li is considered. The grant can be used when carrying out a practical training in internal, as well as in remote forms of education.

Key words: structure, contents, mathematical analysis, Mathcad.