ИННОВАЦИОННЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, РЕАЛИЗУЕМЫЕ СИСТЕМАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

А.С. Безручко

Кафедра математического анализа
Московский педагогический государственный университет
ул. Малая Пироговская, 1, стр. 1, Москва, Россия, 119991

Рассматриваются некоторые возможности курса дифференциальных уравнений, которые могут быть реализованы благодаря системам компьютерной математики. Основное внимание уделено графическим методам решения и графической интерпретации решения дифференциального уравнения.

Ключевые слова: системы компьютерной математики, графическое решение, дифференциальные уравнения, студент.

Большую роль в развитии современной цивилизации играет информатизация — процесс, суть которого состоит в развитии и применении методов и средств получения, переработки, передачи, накопления, хранения, представления и использования информации при помощи компьютерных средств.

Информатизация общества подразумевает активное использование постоянно расширяющегося информационного пространства и интеграцию информационных технологий во все сферы деятельности человека. Информационные технологии используются в различных сферах современного общества, в том числе и в образовании. Именно в процессе обучения у студентов происходит формирование социальных, психологических, общекультурных, профессиональных компетенций, которые закладывают основу будущей личности специалиста. Поэтому особенно важно, чтобы информатизация сферы образования являлась одним из главных направлений процесса информатизации современного общества и опережала информатизацию других направлений общественной деятельности, только в этом случае будущий специалист будет готов работать в своей сфере и иметь необходимые ему знания для достижения наилучших результатов в своей профессиональной деятельности.

Под информатизацией образования понимается процесс внедрения в сферу образования разнообразных методов, средств, форм и приемов обучения, связанных с использованием компьютерной техники. В то же время использование компьютера предоставляет очень много новых возможностей, которые не могут быть реализованы иными способами, и именно такие возможности должны быть приоритетными при разработке занятий с использования компьютера в учебном процессе [3]. Еще в недалеком прошлом компьютеры не могли использоваться без помощи системного аналитика или программиста. В настоящее время появилось огромное количество прикладного программного обеспечения, которое позволяет реализовать новый подход к взаимодействию пользователя и компьютера, не требующий вмешательства посредников. Таким образом, у каждого желающего появляется возможность освоения того или иного программного продукта, не требующего больших временных затрат. К такой группе программ можно отнести и универсальные математические пакеты символьных и численных вычислений (системы компьютерной математики, или СКМ): MathCad, MathLab, Mathematica, Maple, Derive и др.

Достаточно много видов математических действий представляют собой весьма трудоемкий процесс, например, построение трехмерной модели требует огромного количества вычислений. Современные программные средства делают это за считаные секунды, а то и за доли секунды. Применение СКМ в образовании избавляет студентов и преподавателей от массы рутинных вычислений и дает больше времени для обдумывания решения задач, более обоснованной постановки, многовариантного подхода и представления результатов в наиболее наглядной форме. Вследствие этого СКМ не только не лишают учащихся математических навыков, но, напротив, позволяют расширить и углубить знания и навыки.

Однако недопустимо заменять изучение какой-либо темы использованием готовых программ, применять их можно лишь в случае глубокого усвоения материала. Ориентация обучения на изучение, использование и применение СКМ может привести к тому, что учащиеся не будут уметь производить элементарные действия без помощи компьютера, поэтому необходимо сначала изучать все основные понятия и способы решения, отводя на это достаточно большое количество времени, и только после полного усвоения студентами материала можно изучать и применять СКМ для конкретного раздела.

При использовании СКМ необходимо понимать целесообразность их использования на каждом конкретном занятии. Если данное занятие не предполагает большого количества вычислений для получения решений или построения графиков, то использование данных программ будет нецелесообразным. В то же время если в ходе занятия происходит анализ какого либо объекта или явления и при этом преподаватель хочет сэкономить время на математических действиях, не относящихся к данной теме, то применение СКМ будет оправданным.

Преподаватель сам выбирает для своего предмета СКМ, его выбор, как правило, обоснован, с одной стороны, возможностями компьютерной системы, с другой — простотой формирования навыков работы с программой.

Рассмотрим возможности, которые дают СКМ при изучении курса дифференциальных уравнений. Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов математики, занимающим почетное место в современной науке. Она представляет собой богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими ее разделами и приложениями. Курс дифференциальных уравнений объединяет в себе знания, умения, навыки, методы и процедуры, освоенные в дифференциальном и интегральном исчислении функций одной и нескольких переменных, сведения из линейной алгебры и теории многочленов, комплексного анализа и теории элементарных функций, геометрии кривых и теории рядов.

Данный раздел математики играет большую роль в фундаментальной подготовке будущего учителя в плане формирования у студента научного мировоззрения, определенного уровня математической культуры, методической культуры, особенно по таким компонентам, как понимание сущности прикладной и практической направленности обучения математике, овладение методом математического моделирования, умение осуществлять в обучении межпредметные связи. Изучение курса дифференциальных уравнений и его методов дает еще один инструмент для познания мира, в котором мы живем, позволяет сформировать образное и научное представление о реальном физическом пространстве. Именно поэтому изучение данного раздела требует особого внимания [1].

Формы организации учебного процесса по курсу теории дифференциальных уравнений согласно учебному плану делятся на лекционные и практические занятия. Рассмотрим возможности, которые открывают СКМ перед данным курсом. Остановимся на графическом решении дифференциальных уравнений, поскольку именно этому решению до появления СКМ уделялось недостаточно времени. Связано это было в основном с тем, что процесс построения графического решения без помощи компьютера является весьма трудоемким и сложным процессом.

Возможности наглядного представления изучаемых понятий. Поскольку СКМ позволяют без труда строить семейства интегральных кривых, графическое решение дифференциальных уравнений может быть рассмотрено на различных этапах изучения данного курса. Графическое решение может быть использовано преподавателем на лекциях и практических занятиях при изучении основных понятий дифференциальных уравнений для более глубокого понимания сути решения. Для демонстрации данного факта приведем несколько примеров использования графического решения.

Пример 1. Постройте общее и частное решение, проходящее через точку (0; –1) дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = x - y$ [2].

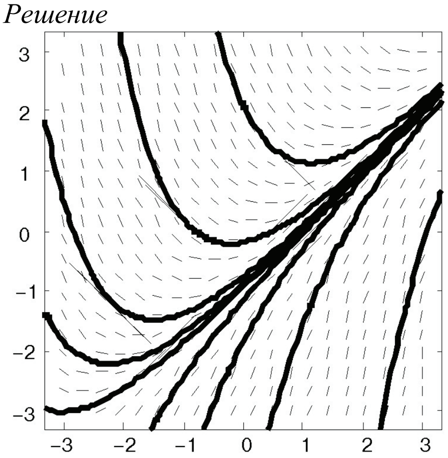

Рис. 1. Общее решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = x - y$

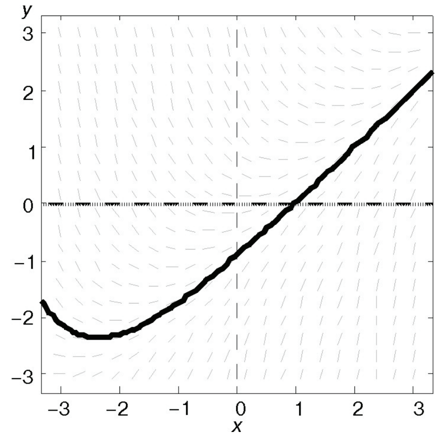

Рис. 2. Частное решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = x - y$

Данный пример показывает, что общее решение дифференциального уравнения соответствует семейству интегральных кривых, а частное решения одной интегральной кривой

Пример 2. Дано дифференциальное уравнение $x^2y' + y^2 = 0$. Постройте семейство интегральных кривых и определите, сколько решений может иметь задача Коши $y(a) = b$ в зависимости от a и b?

Решение. Разрешим данное дифференциальное уравнения относительно производной.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}.$$

Найдем частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2}$.

Так как при $x = 0$ функция $f(x, y) = -\dfrac{y^2}{x^2}$ и ее частная производная имеет разрыв, условия теоремы о существовании и единственности решения нарушается.

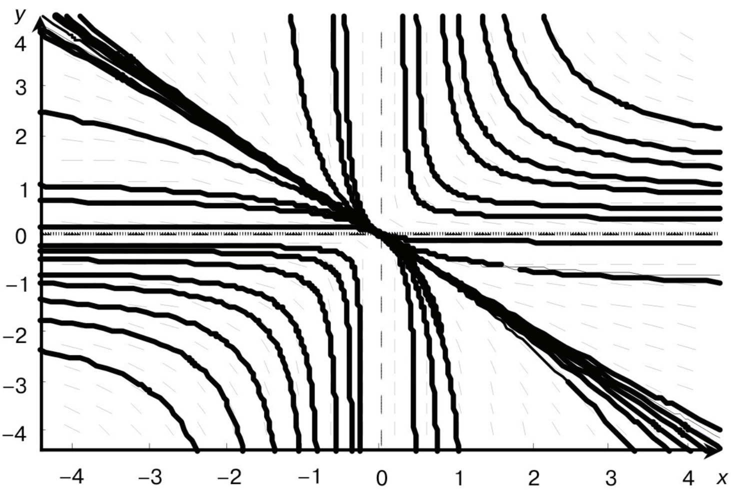

Рис. 3. Иллюстрация точки (0; 0) как особой

Из рис. 3 видно, что точка (0; 0) является особой — узел, и к ней примыкает бесчисленное множество решений. Следовательно, при $a = 0$ и $b = 0$ задача Коши будет иметь бесконечное множество решений.

Кроме того, интегральные кривые приближаются к оси y, но не пересекают ее. Следовательно, при $a = 0$ и $b \neq 0$ задача Коши не имеет решений, а при $a \neq 0$ имеет единственное решение.

Данный пример позволит студентам глубже понять суть теоремы Коши и понять, как ведет себя решение вблизи особой точки. Также студентам можно предложить построить семейства интегральных кривых для других дифференциальных уравнений имеющих другие виды особых точек (центр, седло, фокус).

Пример 3. Дана система дифференциальных уравнений, постройте ее фазовый портрет и трехмерную модель. Убедитесь в том, что не замкнутая кривая на фазовой плоскости соответствует непериодическому решению системы.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0{,}09x - 0{,}637xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2{,}267x - 0{,}02y. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. На рис. 4 изображен фазовый портрет системы (1). На рис. 5 представлена трехмерная модель системы (1).

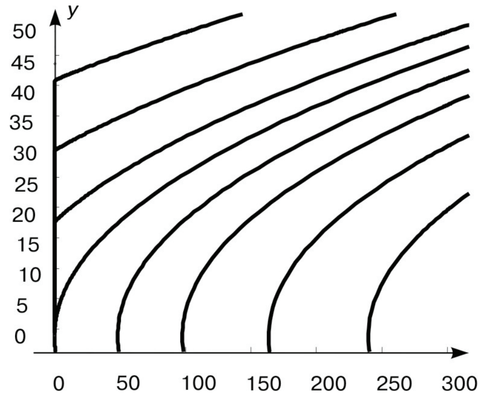

Рис. 4. Фазовый портрет системы (1)

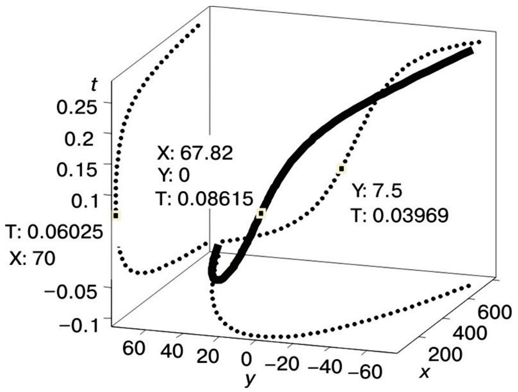

Рис. 5. Трехмерная модель системы (1)

Из рис. 5 видно, что решение данной системы не является периодическим. Этот факт подтверждает и то что на фазовой плоскости нет замкнутых интегральных кривых.

Данный пример позволяет понять, как получается фазовая плоскость и какие свойства решений она может отражать. В то же время на рис. 5 представлены координаты точек самого решения и его проекций на плоскости. Данные возможности позволяют студентам проанализировать решение и пронаблюдать изменения координат.

Возможности решения задач связанных с приложениями. СКМ также позволяют без труда решать задачи из приложений, которые моделируют те или иные процессы или явления. Данные задачи могут быть разобраны преподавателем на практических и на лекционных занятиях. В данной статье рассматривается графическое решение подобных примеров.

Пример 4. Тело массой $m = 0{,}5$ кг прикреплено к пружине. Пружина под действием силы в 100 Н растягивается на 2 м. Тело начинает двигаться из начального положения $x_0 = 1$ м с начальной скоростью $v_0 = -5$ м/с. Найдите уравнение движения данного тела, а также его амплитуду, частоту, период колебаний и временную задержку [4].

Решение. Составим дифференциальное уравнение, которое будет описывать данный процесс. В случае, когда рассматриваемая механическая система состоит лишь из тела и пружины, а внешние силы и сопротивление отсутствуют, уравнение имеет следующий вид:

$$mx'' + kx = 0,$$

где $k=\dfrac{F}{x}$ — жесткость пружины (F — сила, которая растягивает пружину, x — величина на которую растягивается пружина), m — масса тела.

Таким образом, для нашего примера $k=\dfrac{100\ \text{Н}}{2\ \text{м}}=50$ Н/м, m = 0,5 кг. Следовательно, уравнение движения примет вид $0{,}5x''+50x=0$ или $x''+100x=0$.

Также нам известно, что тело начинает двигаться из начального положения $x_0=1$ м с начальной скоростью $v_0=-5$ м/с, следовательно $x(0)=1$, $x'(0)=-5$. Построим решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям (рис. 6). Из графического решения определяем амплитуду $C\approx 1{,}2$, период $T\approx 1{,}75-1{,}2=0{,}55$, частоту колебаний $\omega=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0{,}55}$ Гц, временную задержку $\delta\approx 0{,}6$.

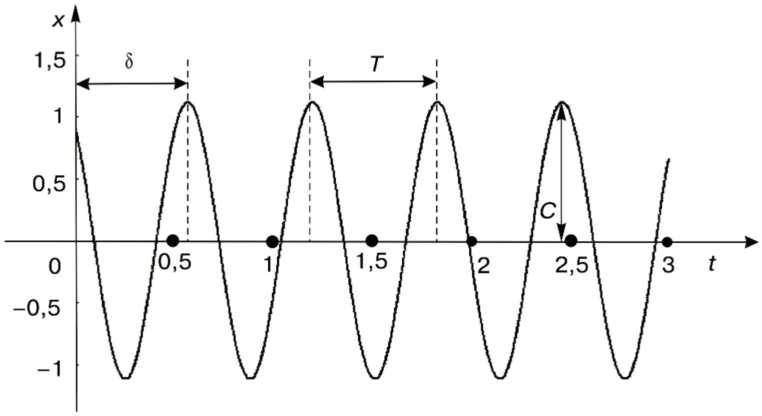

Рис. 6. Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

Данный пример показывает студентам не только связь дифференциальных уравнений второго порядка с другими науками, но и учит составлять простейшие математические модели и анализировать полученные решения.

В то же время студенты рассматривают применения задачи Коши и учатся анализировать графическое решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Пример 5. Из трех образцов взяли углерод. В данных образцах содержалось $4{,}6\cdot 10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме, $3{,}6\cdot 10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме, $4{,}1\cdot 10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме соответственно. Углерод, извлеченный из современного аналогичного экземпляра, содержит $5{,}0\cdot 10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме. Вычислите приблизительный возраст экземпляров, какой из них может относиться к XIV в. [4].

Решение. Составим дифференциальное уравнение. Будем основываться на уравнении, которое описывает распад атомов:

$$\frac{dN}{dt}=-kN,$$

где N — количество атомов в грамме, t — время, k = 0,0001216 коэффициент пропорциональности для атомов ^{14}C.

В нашем примере скорость распада атомов будет описываться следующим уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = -0,0001216N.$$

Суть метода, позволяющего датировать образец, состоит в том, что в любом живом существе отношение количество атомов углерода к количеству атомов радиоактивного изотопа углерода ^{14}C постоянно и не меняется уже много тысяч лет. Когда организм умирает, метаболизм углерода в нем прекращается и в нем в процессе радиоактивного распада начинает уменьшаться содержание ^{14}C. Так как после смерти ^{14}C не пополняется, отношение ^{14}C к обычному углероду начинает уменьшаться. Исходя из этого нам достаточно построить интегральную кривую, удовлетворяющую начальному условию, т.е. тому, что в начальный момент времени $t = 0$, количество атомов в образцах было равно $5,0 \cdot 10^{10}$, и выяснить, через какой промежуток времени количество атомов ^{14}C приблизится к количеству, полученному в образцах.

Интегральная кривая, удовлетворяющей начальным условиям, изображена на рис. 7. Из рис. 7 видно, что вследствие распада ^{14}C первый полученный образец с содержанием $4,6 \cdot 10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме имеет возраст 669 лет, второй образец с содержанием $3,6 \cdot 10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме имеет возраст примерно 2688 лет, возраст последнего образца 1614 лет. Образцу XIV в. должно быть около 700 лет, и им может являться только первый образец.

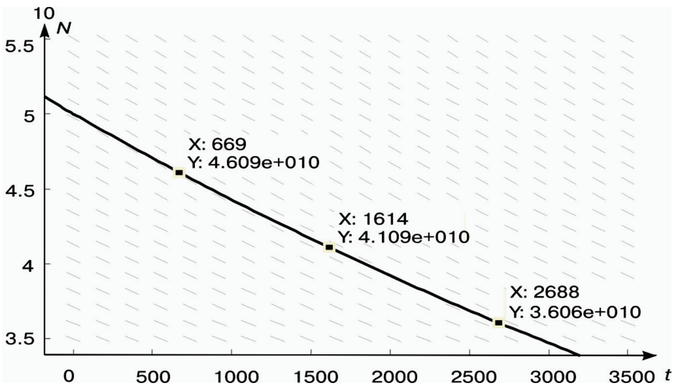

Рис. 7. Интегральная кривая, удовлетворяющая начальным условиям

Данный пример позволяет проиллюстрировать применение дифференциальных уравнений для углеродного анализа и решить данную задачу, не затрачивая на это много времени.

Приведенные выше примеры демонстрируют возможности СКМ. Именно с помощью СКМ студенты смогут без труда построить как решение дифференциального уравнения, так и решение системы дифференциальных уравнений. С помощью графического решения студент сможет проанализировать его и перечислить основные свойства, которыми обладает решение. В то же время СКМ позволят включить в курс больше примеров, связанных с приложениями, при этом ни у преподавателя, ни у студентов это не будет занимать большого количества времени.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Асланов Р.М.* Гуманитарный потенциал профессионально ориентированного курса дифференциальных уравнений в педвузе: Монография. — М.: Прометей, 1996.

[2] *Асланов Р.М., Матросов В.Л., Топунов М.В., Тетеруковский А.В.* Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными: Учебное пособие в 2 т. Т. II: Сборник задач. — М.: МПГУ, 2004.

[3] *Плясунова У.В.* Использование компьютерных математических систем в обучении математике студентов специальности «Информатика» педагогических вузов: Дисс. ... канд. пед. наук. — Ярославль, 2004.

[4] *Эдвардс Г., Пенни Э.* Дифференциальные уравнения и краевые задачи моделирования и вычисление с помощью Mathematica, Maple, и MATLAB / Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2008.

LITERATURA

[1] *Aslanov R.M.* Gumanitarnyj potencial professional'no orientirovannogo kursa differencial'nyh uravnenij v pedvuze: Monografija. — M.: Prometej, 1996.

[2] *Aslanov R.M., Matrosov V.L., Topunov M.V., Teterukovskij A.V.* Differencial'nye uravnenija i uravnenija s chastnymi proizvodnymi: Uchebnoe posobie v 2 t. T. II: Sbornik zadach. — M.: MPGU, 2004.

[3] *Pljasunova U.V.* Ispol'zovanie komp'juternyh matematicheskih sistem v obuchenii matematike studentov special'nosti «Informatika» pedagogicheskih vuzov: Diss. ... kand. ped. nauk. — Jaroslavl', 2004.

[4] *Jedvards G., Penni Je.* Differencial'nye uravnenija i kraevye zadachi modelirovanija i vychislenie s pomoshh'ju Mathematica, Maple, i MATLAB / Per. s angl. — M.: Vil'jams, 2008.

SOME POSSIBILITIES OF STUDYING THE COURSE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IMPLEMENTED BY THE SYSTEMS OF COMPUTER MATHEMATICS

A.S. Bezruchko

Chair of the mathematical analysis
Moscow pedagogical state university
Malaya Pirogovskaya str., 1, p.1, Moscow, Russia, 119991

Some possibilities of the course of differential equations that can be realized through the systems of computer mathematics are discussed in the article. The basic attention is paid to graphical methods of solutions and graphic interpretation of solutions of differential equations

Key words: systems of computer mathematics, graphic solution, differential equations, student.