

---

---

## ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.С. Корнилов

Кафедра информатики и прикладной математики  
Московский городской педагогический университет  
*Шереметьевская ул., 29, Москва, Россия, 127521*

В статье обсуждается экспериментальная педагогическая деятельность преподавателей вузов, обучающих студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений. В процессе такой деятельности выявляется качество усвоения у студентов фундаментальной системы знаний не только в области математических методов и методологии исследования обратных задач, но и фундаментальные знания в области прикладной математики, гуманитарная составляющая обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений. Излагаются содержание и некоторые особенности такого обучения. Приводятся некоторые результаты педагогических измерений.

**Ключевые слова:** педагогические измерения, обучение студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений, прикладная математика, гуманитаризация высшего математического образования, фундаментальные знания.

Проведение педагогических экспериментов является важной составляющей процесса обучения студентов физико-математических специальностей вузов обратным задачам для дифференциальных уравнений (см., например, [1; 2; 5; 6; 8; 11; 12; 20]). Содержание такого обучения формируется на основе современного научного направления прикладной математики — теории обратных задач для дифференциальных уравнений (см., например, [5; 6; 18; 19]). Фундаментальный вклад в ее создание внесли работы В.А. Амбарцумяна, М.Г. Крейна, М.М. Лаврентьева, Б.М. Левитана, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, А.Н. Тихонова и других ученых. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений находит свое развитие в работах А.К. Амирова, А.В. Баева, М.И. Белишева, А.С. Благовещенского, П.Н. Вабишевича, А.О. Ватульяна, М. Грацелли, Ж. Готлиба, А.М. Денисова, С.И. Кабанихина, Д. Колтона, А. Лоренци, В.Г. Чередниченко, М. Ямамото, В.Г. Яхно и других ученых.

В настоящее время в некоторых высших учебных заведениях России преподаются специальные курсы по обратным задачам для дифференциальных уравнений. Среди таких вузов Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Уральский государственный университет, Ростовский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет, Сибирский федеральный университет и другие вузы. Содержание обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений предполагает использование различных математических моделей обратных задач и методов их исследования. В процессе такого обучения студенты овладевают не только математическими методами решения обратных задач, но и методами рассуждений, которые используются в гуманитарных науках (см., например, [1; 2; 5; 6; 8; 9; 11; 19—21]). В результате у студентов формируются и развиваются прикладная и гуманитарная культура.

В процессе обучения студенты осознают, что методы исследования обратных задач для дифференциальных уравнений зависят в значительной степени от того, в каком месте дифференциального уравнения стоят искомые функции и от скольких пространственных переменных они зависят. Искомые функции (коэффициенты, правые части, начальные и граничные условия дифференциальных уравнений) могут принадлежать различным функциональным пространствам. Сами дифференциальные уравнения могут принадлежать различным типам — гиперболическим, параболическим, эллиптическим; смешанным, квазилинейным и др. Дополнительная информация о решении прямой задачи может иметь различный вид. Искомые функции могут зависеть не только от физических координат, но и от временной координаты. Немаловажную роль играют области изменения временной и пространственных переменных.

Исследование обратных задач для дифференциальных уравнений проводится на основе методов математической физики, методов, базирующихся на спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка, методов спуска и линеаризации, метода шкал банаховых пространств аналитических функций, теории оптимального управления, приближенных методов и других методов. При исследовании трудных обратных задач для дифференциальных уравнений применяется системный анализ. Сложная обратная задача сводится к такой задаче, для которой уже существуют конкретные методы исследования. Это позволяет упростить теоретическое или численное решение исходной задачи при сохранении предсказательной силы математической модели обратной задачи. В процессе обучения студенты узнают о том, что с практической точки зрения наибольший интерес представляют исследования свойств физических процессов и явлений, порожденных импульсными источниками, которые, как известно, могут моделироваться обобщенными функциями. Фундаментальные основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым и Л. Шварцом и, в дальнейшем, развиты И.М. Гельфандом, Г.Е. Шиловым и другими учеными (см., например, [3]).

Одним из представителей обобщенных функций является дельта-функция. Дельта-функция рассматривалась в работах О.Л. Коши, С.Д. Пуассона, Г.Р. Кирхгофа и других ученых. В своих исследованиях использовал дельта-функцию и О. Хевисайд. Он называл ее импульсной функцией. После О. Хевисайда эту функцию рассматривал А.Л. Лебег. В работах О. Хевисайда эта функция стала действенным инструментом, позволяющим эффективно решать задачи математической физики. В своих работах О. Хевисайд приводит различные варианты представлений импульсной функции — разложение в ряд Фурье, в интеграл Фурье, разложение по различным системам функций. Заново дельта-функцию ввел в математическую физику в 1928 г. П. Дирак. В современной литературе эта функция обозначается, как правило, греческой буквой  $\delta(x)$  и называется дельта-функцией Дирака. В обратных задачах для дифференциальных уравнений дельта-функция Дирака встречается часто и играет при их исследовании важную роль. Так как эта функция является обобщенной функцией, для проведения успешного исследования обратной задачи, в которой присутствует дельта-функция Дирака, от студентов требуется осмысление самой обобщенной постановки обратной задачи;

структуры решения прямой задачи; процедуры выделения сингулярной части из обобщенного решения прямой задачи и т.д., что является одним из трудных этапов исследования обратной задачи.

В процессе обучения студенты приобретают умения и навыки анализа полученных решений обратных задач для дифференциальных уравнений, формулирования логических выводов об экологическом состоянии окружающей среды, применения численных результатов решений обратных задач в гуманитарном анализе прикладных исследований. В результате такого обучения студенты приобретают не только умения и навыки исследования обратных задач для дифференциальных уравнений, осваивают математические методы и методологию их исследования, но и фундаментальные знания в области прикладной математики, формируют прикладную и гуманитарную культуру.

Учитывая вышеизложенное, отметим, что преподавателю обратных задач для дифференциальных уравнений в процессе проведения педагогических экспериментов (см., например, [4; 7; 15—17]) необходимо проверять качество усвоения у студентов фундаментальной системы знаний не только в области математических методов и методологии исследования обратных задач, но и фундаментальные знания в области прикладной математики, гуманитарную составляющую обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений.

Назовем важные составляющие таких фундаментальных знаний студентов по обратным задачам для дифференциальных уравнений:

— показатели полноты усвоения учебного материала и содержания понятий, используемых в учебном курсе обратных задач для дифференциальных уравнений (табл. 1);

— умения и навыки применять рациональные рассуждения при исследовании обратных задач для дифференциальных уравнений (рис. 1);

— уровень фундаментальных знаний в области теории и практики исследования обратных задач для дифференциальных уравнений и в области прикладной математики;

— степень влияния обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений на формирование прикладной и гуманитарной культуры (табл. 1, 2, рис. 2).

При проведении экспериментальной педагогической деятельности при обучении студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений могут быть использованы разнообразные подходы, в том числе с применением математических методов для обработки результатов педагогических измерений. Принять обоснованное решение о полученных результатах педагогического эксперимента позволяют в том числе статистические методы. Среди них — вычисление линейного коэффициента корреляции Пирсона, с помощью которого можно вычислять корреляционную зависимость между повышением уровня фундаментальных знаний в области обратных задач для дифференциальных уравнений и умениями самостоятельно исследовать нетипичные обратные задачи; степень влияния обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений на формирование профессиональных качеств и воспитание будущих специалистов в области прикладной математики. Стандартные функции программы Microsoft Office Excel позволяют не только вычислить значение данного коэффициента, но и построить различные наглядные диаграммы.

**Содержание обучения обратным задачам  
для дифференциальных уравнений**

<b>Обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений</b>
1. Обратные задачи определения коэффициентов линейных дифференциальных уравнений и анализ подходов и идей восстановления неизвестных причин по известным следствиям
2. Обратные задачи определения коэффициентов нелинейных дифференциальных уравнений и оценка красоты математических методов их решения
3. Обратные задачи определения правой части дифференциальных уравнений и оценка вклада методов их решения в развитие математических методов решения дифференциальных уравнений
4. Обратные задачи теории управления и оценка идей и подходов, используемых для восстановления свойств объектов, труднодоступных для человека
5. Обратные задачи вариационного исчисления
<b>Обратные задачи для уравнений дифференциальных уравнений в частных производных</b>
1. Одномерные обратные задачи для гиперболических уравнений и анализ особенностей рациональных рассуждений при решении обратных задач
2. Многомерные обратные задачи для гиперболических уравнений и их гуманитарная роль в анализе характера загрязнения воздушного бассейна
3. Одномерные обратные задачи для уравнения теплопроводности и их применение в экологическом анализе окружающей среды
4. Многомерные обратные задачи для параболического уравнения и их ценность в анализе влияния функционирующих объектов на здоровье человека
5. Обратные задачи для эллиптических уравнений и их применение в гуманитарном анализе стационарных процессов
6. Обратные задачи для системы уравнений Максвелла и их применение в гуманитарном анализе свойств земной среды
7. Обратные кинематические задачи сейсмики и их значение в развитии представлений о внутреннем строении Земли
<b>Задачи определения функции по значениям интегралов</b>
1. Задача определения функции одной переменной по значениям ее интегралов и оценка математических методов ее решения для теории интегральных уравнений Фредгольма
2. Задачи компьютерной томографии, их информативность и гуманитарная ценность
3. Задача об отыскании функции по ее сферическим средним и оценка вклада математических методов ее решения в теорию интегральных уравнений Вольтерра
4. Задачи интегральной геометрии и их связь с обратными задачами для дифференциальных уравнений
<b>Приближенные методы решения обратных задач для дифференциальных уравнений</b>
1. Приближенные методы решения обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений
2. Приближенные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений
3. Приближенные методы решения обратных задач для параболических уравнений
4. Приближенные методы решения обратных задач для эллиптических уравнений
5. Применение численных результатов решений обратных задач в гуманитарном анализе прикладных исследований

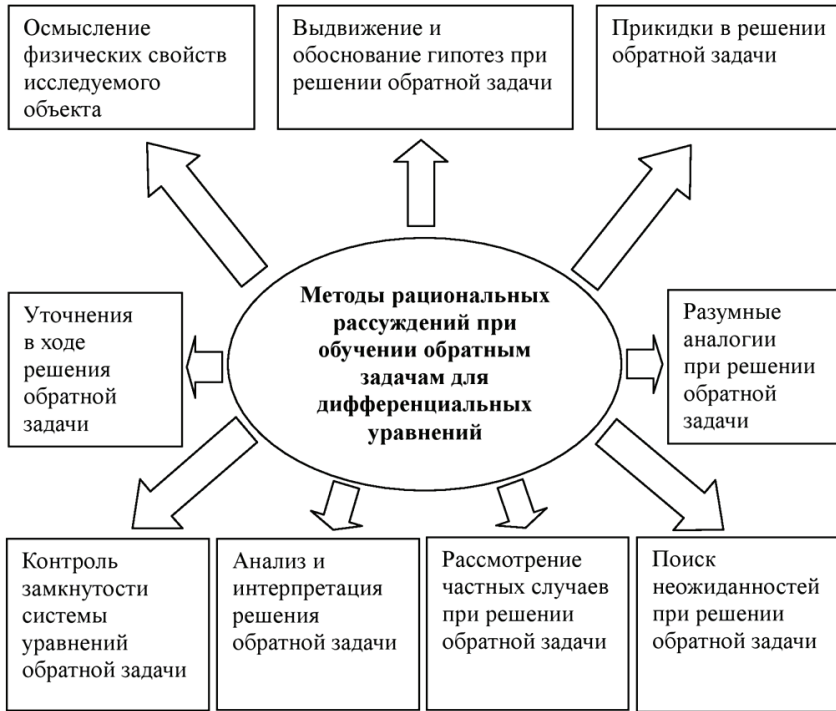


Рис. 1. Методы рациональных рассуждений при обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений



Рис. 2. Гуманитарный потенциал обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений

**Содержание контрольных заданий  
по гуманитарной составляющей обучения обратным задачам  
для дифференциальных уравнений**

<b>Контрольные задания</b>
1. Оценить идею подходов теории обратных задач для восстановления неизвестных свойств объектов
2. Раскрыть ценность обратных задач для уравнений теплопроводности в экологическом анализе окружающей среды
3. Раскрыть ценность многомерных обратных задач для параболических уравнений в анализе влияния функционирующих объектов на здоровье человека
4. Оценить роль обратных задач для системы уравнений Максвелла в гуманитарном анализе свойств земной среды
5. Оценить позитивный вклад обратных кинематических задач сейсмоки в развитие представлений о внутреннем строении Земли
6. Оценить информативность и гуманитарную ценность задач компьютерной томографии
7. Оценить вклад математических методов решения задач восстановления функции по ее сферическим средним в теорию интегральных уравнений Вольтерра
8. Оценить вклад математических методов решения задач определения функции по значениям интегралов в теорию интегральных уравнений Фредгольма
9. Выявить связь задач интегральной геометрии с обратными задачами для дифференциальных уравнений
10. Раскрыть идею использования операции свертки фундаментального решения для обращения гиперболических операторов

Среди математических методов, с помощью которых возможно оценить качество приобретенной системы фундаментальных знаний студентов в области обратных задач для дифференциальных уравнений, могут быть использованы:

— методика В.П. Беспалько, с помощью которой можно выявить уровень усвоения учебного материала по обратным задачам для дифференциальных уравнений;

— методика А.В. Усовой, применяя которую, можно определить полноту усвоения студентами содержания понятий, используемых в процессе обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений;

— методика Н.Е. Кузнецовой, по которой можно вычислить коэффициенты системности и функциональности знаний по обратным задачам для дифференциальных уравнений, представляющие количественные показатели полноты реализации студентами связей и функций теоретических знаний.

Анализ полученных результатов экспериментальной педагогической деятельности дает основание преподавателю сделать выводы о качестве приобретенных студентами знаний как в области обратных задач для дифференциальных уравнений, так и в области прикладной математики; об уровне сформированной прикладной и гуманитарной культуры.

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] *Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений как компонент вычислительной информатики в системе подготовки будущих учителей информатики // Обратные и некорректные задачи математической физики: Тезисы меж-

- дународной конференции, посвященной 75-летию академика М.М. Лаврентьева (20—25 августа 2007 г., г. Новосибирск, Россия). — URL: <http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/main.html>
- [2] *Бидайбеков Е.Б., Камалова Г.Б.* О содержании курса «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» в подготовке будущих учителей информатики // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». — 2008. — № 4 (24). — С. 54—61.
- [3] *Гельфанд И.М., Шилев Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958. — 440 с.
- [4] *Григорьев С.Г.* Методика проведения педагогического эксперимента. — М.: МГПУ, 2005. — 26 с.
- [5] *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 207 с.
- [6] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов вузов. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 458 с.
- [7] *Карташова Л.И., Корнилов В.С., Левченко И.В.* Применение математических методов в педагогических измерениях: учебно-методическое пособие. — М.: МГПУ, 2010. — 50 с.
- [8] *Корнилов В.С.* Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: Учеб. пособие. — М.: МГПУ, 2005. — 359 с.
- [9] *Корнилов В.С.* Гуманитарная компонента прикладного математического образования // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2006. — № 2 (7). — С. 94—100.
- [10] *Корнилов В.С.* Вузовская подготовка специалистов по прикладной математике: история и современность // Наука и школа. — 2006. — № 4. — С. 10—12.
- [11] *Корнилов В.С.* Теоретические и методические основы обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях гуманитаризации высшего математического образования: Дисс. ... д-ра пед. наук. — М., 2008. — 481 с.
- [12] *Корнилов В.С.* История развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений — составляющая гуманитарного потенциала обучения прикладной математике // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2009. — № 1 (17). — С. 108—113.
- [13] *Корнилов В.С.* Лабораторные занятия как форма организации обучения студентов фрактальным множествам // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2012. — № 1 (23). — С. 60—63.
- [14] *Корнилов В.С.* Обратные задачи в содержании обучения прикладной математике // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». — 2014. — № 2. — С. 109—118.
- [15] *Кутейников А.Н.* Математические методы в психологии: учебно-методическое пособие. — СПб.: Речь, 2008. — 172 с.
- [16] *Мальгина О.А.* Обучение высшей математике на основе системно-деятельностного подхода: Учеб. пособие. — М.: ЛКИ, 2008. — 256 с.
- [17] *Новиков Д.А.* Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). — М.: МЗ-Пресс, 2004. — 67 с.
- [18] *Прилепко А.И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1992. — С. 151—162.
- [19] *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. — М.: Научный мир, 2005. — 304 с.
- [20] *Bidaybekov E.I., Kornilov V.S., Kamalova G.B.* Inverse Problems for differential equations in education // Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS-2014): Abstracts of the 7th International conference» (Fethiye, Turkey, May 26—31, 2014). — Fethiye, Turkey, 2014. — P. 69.

- [21] *Saparbekova G.A., Kornilov V.S., Berkimbaev K.M., Marasulov A.M., Akeshova M.M.* Formation of students' humanitarian culture in teaching applied mathematics // The Iceland Journal of Life Sciences. — Jul 2014 of Jokull journal (ISSN: 0449-0576). — Vol. 64. — No. 7. — P. 30—39.

## LITERATURA

- [1] *Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B.* Obratnye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij kak komponent vychislitel'noj informatiki v sisteme podgotovki budushhijh uchitelej informatiki // Obratnye i nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki: Tezisy mezhdunarodnoj konferencii, posvjashhennoj 75-letiju akademika M.M. Lavrent'eva (20—25 avgusta 2007 g., g. Novosibirsk, Rossija). — URL: <http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/main.html>
- [2] *Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B.* O sodержanii kursa «Obratnye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij» v podgotovke budushhijh uchitelej informatiki // Vestnik KazNPU im. Abaja. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki». — 2008. — № 4 (24). — S. 54—61.
- [3] *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Obobshhennye funkcii i dejstvija nad nimi. — M.: Fizmatgiz, 1958. — 440 s.
- [4] *Grigor'ev S.G.* Metodika provedenija pedagogicheskogo jeksperimenta. — M.: MGPU, 2005. — 26 s.
- [5] *Denisov A.M.* Vvedenie v teoriju obratnyh zadach. — M.: Izd-vo MGU, 1994. — 207 s.
- [6] *Kabanihin S.I.* Obratnye i nekorrektnye zadachi: uchebnik dlja studentov vuzov. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009. — 458 s.
- [7] *Kartashova L.I., Kornilov V.S., Levchenko I.V.* Primenenie matematicheskijh metodov v pedagogicheskijh izmerenijah: uchebno-metodicheskoe posobie. — M.: MGPU, 2010. — 50 s.
- [8] *Kornilov V.S.* Nekotorye obratnye zadachi identifikacii parametrov matematicheskijh modelej: uchebnoe posobie. — M.: MGPU, 2005. — 359 s.
- [9] *Kornilov V.S.* Gumanitarnaja komponenta prikladnogo matematicheskogo obrazovanija // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2006. — № 2 (7). — S. 94—100.
- [10] *Kornilov V.S.* Vuzovskaja podgotovka specialistov po prikladnoj matematike: istorija i sovremennost' // Nauka i shkola. — 2006. — № 4. — S. 10—12.
- [11] *Kornilov V.S.* Teoreticheskie i metodicheskie osnovy obuchenija obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij v uslovijah gumanitarizacii vysshego matematicheskogo obrazovanija: Diss. ... d-ra ped. nauk. — M., 2008. — 481 s.
- [12] *Kornilov V.S.* Istorija razvitiija teorii obratnyh zadach dlja differencial'nyh uravnenij — sostavljajushhaja gumanitarnogo potenciala obuchenija prikladnoj matematike // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2009. — № 1 (17). — S. 108—113.
- [13] *Kornilov V.S.* Laboratornye zanjatija kak forma organizacii obuchenija studentov fraktal'nym mnozhestvam // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2012. — № 1 (23). — S. 60—63.
- [14] *Kornilov V.S.* Obratnye zadachi v sodержanii obuchenija prikladnoj matematike // Vestnik Rossijskogo universiteta družby narodov. Serija «Informatizacija obrazovanija». — 2014. — № 2. — S. 109—118.
- [15] *Kutejnikov A.N.* Matematicheskie metody v psihologii: uchebno-metodicheskoe posobie. — SPb.: Rech'. 2008. — 172 s.
- [16] *Malygina O.A.* Obuchenie vysshej matematike na osnove sistemno-dejatel'nostnogo podhoda: uchebnoe posobie. — M.: LKI, 2008. — 256 s.
- [17] *Novikov D.A.* Statisticheskie metody v pedagogicheskijh issledovanijah (tipovye sluchai). — M.: MZ-Press, 2004. — 67 s.



- [18] *Prilepko A.I.* Izbrannye voprosy v obratnyh zadachah matematicheskoy fiziki // Uslovno-korrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza. — Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1992. — С. 151—162.
- [19] *Romanov V.G.* Ustojchivost' v obratnyh zadachah. — М.: Nauchnyj mir, 2005. — 304 s.
- [20] *Bidaybekov E.I., Kornilov V.S., Kamalova G.B.* Inverse Problems for differential equations in education // Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS-2014): Abstracts of the 7th International conference» (Fethiye, Turkey, May 26—31, 2014). — Fethiye, Turkey, 2014. — P. 69.
- [21] *Saparbekova G.A., Kornilov V.S., Berkimbaev K.M., Marasulov A.M., Akeshova M.M.* Formation of students' humanitarian culture in teaching applied mathematics // The Iceland Journal of Life Sciences. — Jul 2014 of Jokull journal (ISSN: 0449-0576). — Vol. 64. — No. 7. — P. 30—39.

## **PEDAGOGICAL DIMENSIONS IN TRAINING STUDENTS INVERSE PROBLEMS FOR THE DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**V.S. Kornilov**

Chair of informatics and applied mathematics  
Moscow city pedagogical university  
*Sheremetyevskaya str., 29, Moscow, Russia, 127521*

In article experimental pedagogical activity of teachers of the higher education institutions training students to the inverse problems for the differential equations is discussed. In the course of such activity quality of assimilation at students of fundamental system of knowledge not only in the field of mathematical methods and methodology of research of the inverse problems, but also fundamental knowledge in the field of applied mathematics, a humanitarian component of training in the inverse problems for the differential equations comes to light. The contents and some features of such training are stated. Some results of pedagogical measurements are given.

**Key words:** pedagogical measurements, training of students in the inverse problems for the differential equations, applied mathematics, humanitarization of the higher mathematical education, fundamental knowledge.