# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В СОДЕРЖАНИИ ОБУЧЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

**В.С. Корнилов**

Кафедра информатики и прикладной математики
Московский городской педагогический университет
*Шереметьевская ул., 29, Москва, Россия, 127521*

В статье излагаются нетипичные математические задачи, встречающиеся в содержании обучения студентов вузов прикладной математике, которые получили название обратных задач. Подобные задачи встречаются в таких дисциплинах, как исследование операций, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики и др. Приводятся математические постановки и алгоритмы решения задач.

**Ключевые слова:** прикладная математика, обратные задачи, обучение, студент.



Прикладное математическое образование является важной составляющей фундаментальной подготовки студентов вузов. Обучение студентов решению прикладных задач, развитие прикладной математической культуры являются одними из важных целей в процессе обучения прикладной математике. К блоку дисциплин прикладной математики относятся такие учебные дисциплины, как численные методы, методы оптимизации, исследование операций, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и др. Кроме того, необходимо отметить и различные специальные курсы прикладной математики, посвященные математическому моделированию, обратным и некорректно поставленным задачам для дифференциальных уравнений, математической кибернетике, фрактальным множествам и др. Содержание дисциплин прикладной математики формируется на основе современных достижений таких научных областей, как математическая физика, спектральная теория дифференциальных уравнений, математическое моделирование, вычислительные методы, исследование операций, оптимальное управление, обратные задачи для дифференциальных уравнений и др.

Большой вклад в разработку подходов к обучению прикладной математике студентов вузов внесли ученые Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, Л.Д. Кудрявцев, М.А. Лаврентьев, С.Л. Соболев, А.Я. Хинчин и другие ученые.

В содержании обучения прикладной математике имеется специфичная терминология, реализуются межпредметные связи изучаемых вузовских математических курсов, используются математические модели и методы их исследования. В процессе обучения студентам предлагаются учебные задачи и задания, решение которых носит фундаментальный характер, поскольку подчинено принципу выделения этапов рациональных рассуждений.

Подобные прикладные задачи в процессе их анализа и решения наполняются личностным смыслом, и студенты выступают субъектом собственного активного целеобразования и целеосуществления. В процессе такого обучения реализуется задачный подход, который обеспечивает возможности творческого развития студентов и формирования у них компетентности в области прикладной математической культуры. В содержании обучения прикладной математике присутствуют разнообразные прикладные математические задачи. Вместе с тем встречаются и нетипичные математические задачи как по постановке, так и по методам их решения, которые называются обратными задачами. Среди таких задач обратные задачи, такие, как обратные задачи исследования операций, обратные задачи теории приближенных вычислений, обратные задачи интерполяции функций, обратные задачи для дифференциальных уравнений, обратные задачи для уравнений математической физики и другие обратные задачи.

**Обратная задача исследования операций** [2]. Задачи исследования операций делятся на прямые и обратные. Смысл *прямых задач*: что будет, если в заданных условиях мы примем конкретное решение $x \in X$? Смысл *обратных задач*: как выбрать решение $x$ для того, чтобы показатель эффективности $W$ обратился в максимум (минимум)? Сформулируем обратную задачу исследования операций. Пусть имеется некоторая операция $A$, на успех которой можно будет каким-то образом оказывать влияние, выбирая решение $x$. К подобным обратным задачам может быть отнесена задача динамического программирования. Смысл этой задачи: нужно проложить путь, соединяющий пункт $A$ с пунктом $B$ (рис.), из которых второй лежит к северо-востоку от первого.


**Рис. 1.** Задача динамического программирования

Будем считать, что конструкция пути состоит из нескольких шагов. На каждом шаге можно продвигаться или строго на север, или строго на восток. Любой путь из пункта $A$ в пункт $B$ является ступенчатой ломаной линией. Ее отрезки параллельны одной из координатных осей. Затраты на сооружение каждого из таких отрезков известны. Требуется проложить такой путь из $A$ в $B$, при котором суммарные затраты минимальны.

**Обратная задача теории приближенных вычислений** [10]. В теории приближенных вычислений рассматриваются два основных вида задач.

***Прямая задача.*** Указаны действия, которые следует выполнить над приближенными значениями чисел (например, произвести вычисления по данной формуле), и заданы предельные погрешности приближений. Требуется оценить погрешность полученного результата.

***Обратная задача.*** Указаны действия, которые нужно выполнить над приближенными значениями чисел (например, произвести вычисления по данной формуле), и задана погрешность, которая допустима для результата. Требуется установить, какими должны быть погрешности исходных приближений, чтобы полученный результат имел заданную степень точности.

Обратная задача решается неоднозначно и потому является математически неопределенной. Для ее решения необходимо наложить какие-либо условия на погрешности исходных данных, например, потребовав чтобы предельные погрешности данных величин были равны между собой.

***Пример обратной задачи теории приближенных вычислений.*** С какой точностью надо измерить стороны $a$ и $b$ прямоугольника, чтобы абсолютная погрешность при вычислении диагонали $c$ не превышала 0,39 см, если $a \approx 5$ см, $b \approx 12$ см?

***Решение.*** Диагональ данного прямоугольника вычисляется по формуле $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Используя известные формулы из теории численных методов, имеем

$$\delta(a^2) = 2\delta(a), \quad \delta(b^2) = 2\delta(b),$$

$$\delta(\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{1}{2}\delta(a^2 + b^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(a^2) + \Delta(b^2)}{a^2 + b^2}.$$

Учитывая, что

$$\Delta(a^2) = \delta(a^2) \cdot a^2, \quad \Delta(b^2) = \delta(b^2) \cdot b^2,$$

имеем

$$\delta(c) = \frac{a^2\delta(a) + b^2\delta(b)}{a^2 + b^2}. \qquad (1)$$

По условию задачи $\Delta(c) = 0{,}39$ см, а $\Delta(a)$ и $\Delta(b)$ неизвестны, имеем уравнение (1) с двумя неизвестными. Чтобы наша задача стала математически определенной, потребуем, чтобы измерения сторон были выполнены с одинаковой степенью точности. Это значит, что $\delta(a) = \delta(b)$.

Тогда из (1) имеем $\delta(c) = \delta(a)$.

Отсюда $\delta(a) = \delta(b) = \dfrac{\Delta(c)}{c}$.

Подставляя числовые значения, найдем

$$\delta(a) = \delta(b) = \frac{0{,}39}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 0{,}03.$$

Можно взять $\Delta(a) = \delta(a)\cdot a = 0{,}03\cdot 5 = 0{,}15;\quad \Delta(b) = \delta(b)\cdot b = 0{,}03\cdot 12 = 0{,}36.$

Таким образом, для того, чтобы определить длину диагонали с погрешностью $\Delta_c = 0{,}36$ см, достаточно измерить стороны так, чтобы предельная абсолютная погрешность при измерении сторон $a$ и $b$ не превышала 0,15 см и 0,36 см соответственно.

**Обратная задача интерполяции функций** [10]. В вычислительной практике часто возникает задача о вычислении промежуточных значений некоторой таблично заданной функции $f(x): f(x_i) = y_i,\quad i = \overline{0,\ n}$ (задача о восполнении функции). Такие таблицы могут быть результатом численного эксперимента или некоторого эксперимента в естествознании. С этой целью строят функцию $\varphi(x)$ совпадающую с данной функцией $f(x)$ в точках $x_i$, а при остальных значениях $x$ из области определения должно выполнятся приближенное равенство: $f(x) \approx \varphi(x)$.

Такой способ восполнения значений функции называется *интерполированием.* При этом функция $\varphi(x)$ называется *интерполирующей* (часто в качестве такой функции берется многочлен $L_n(x)$, который называется интерполяционным многочленом), точки $x_i,\ i = \overline{1,\ n}$ — *узлами интерполяции*. В каждом конкретном случае существует много вариантов построения функции $\varphi(x)$, поэтому к ней предъявляются требования, наиболее естественным из которых является простота вычисления этой функции.

Имеются различные формы записи интерполяционных многочленов. Широко распространенной формой записи является многочлен Лагранжа

$$L_i(x) = L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\ \frac{(x-x_0)\ \ldots\ (x-x_{i-1})\ (x-x_{i+1})\ \ldots\ (x-x_n)}{(x_i-x_0)\ \ldots\ (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ \ldots\ (x_i-x_n)}. \qquad (2)$$

К интерполированию нередко прибегают, когда аналитическое выражение для $f(x)$ известно, но его вычисление слишком трудоемко.

***Постановка обратной задачи интерполирования.*** Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений: $f(x_i) = y,\ \ i = \overline{0,\ n}.$ Обратное интерполирование заключается в нахождении по промежуточному, не содержащемуся в таблице, значению функции соответствующего значения аргумента; при обратном интерполировании находятся значения обратной функции $x = \varphi(y)$.

Так как табличные разности $\Delta y$ данной функции не сохраняют постоянного значения (за исключением случая линейной зависимости), для интерполирования обратной функции $x = \varphi(y)$ применяют, в частности, интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ \ldots\ (y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\ \ldots\ (y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\ \ldots\ (y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\ \ldots\ (y_i-y_n)}\, x_i.$$

*Пример.* Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
| $y_i$ | 1,24 | 1,36 | 1,48 |

Требуется по заданному значению функции $y$ = 1,4 найти соответствующее значение аргумента $x$.

Поменяв местами $x$ и $y$, получим таблицу для обратной функции $y = \varphi(x)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,24 | 1,36 | 1,48 |
| $y_i$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 |

Составим многочлен Лагранжа второго порядка:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2.$$

Подставив в выражение многочлена значения $x_i$ и $y_i$ из таблицы, получим $L_2(1,4) = 1,66$.

Таким образом, $\varphi(1,4) \approx 1,66$.

**Обратная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений** [11]. Рассмотрим класс дифференциальных уравнений

$$y' = a(x)y, \quad y = y(x,\alpha), \quad y' = \frac{d}{dx} y, \quad x \in R, \ \alpha \in R, \tag{3}$$

при начальных данных

$$y(\alpha,\alpha) = 1, \quad \alpha \in R, \tag{4}$$

В (3) $a(x)$ — произвольная непрерывная функция при $x \in R$, $\alpha$ — параметр.

***Постановка обратной задачи.*** Необходимо найти неизвестную функцию $a(x)$ по дополнительной информации

$$y(1,\alpha) = \varphi(\alpha), \quad \alpha \in R. \tag{5}$$

*Решение.* Решение (3) при условии (4) имеет вид

$$y(x,\alpha) = \exp\left( \int_{\alpha}^{x} a(\xi)\, d\xi \right).$$

Положим $x = 1$ и учтем (5). В результате получим уравнение для определения коэффициента $a(x)$:

$$\varphi(\alpha) = \exp\left( \int_{\alpha}^{1} a(\xi)\, d\xi \right). \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что функция $\varphi(\alpha)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi(1) = 1, \ \varphi(\alpha) > 0, \ \alpha \in R \tag{7}$$

и является непрерывно дифференцируемой. Эти условия достаточны для существования единственного решения (6) в классе непрерывных функций. Решение его дается формулой

$$a(x) = -\frac{d}{dx}\left[\ln(\varphi(x)\right]. \tag{8}$$

**Обратная задача для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка** [12]. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с данным Коши

$$U_x - U_t = q(x)U, \ \ (x, t) \in R^2, \tag{9}$$

$$U(x, \ 0) = \varphi(x), \ x \in R, \tag{10}$$

в котором коэффициент $q(x)$ является неизвестной функцией.

***Постановка обратной задачи.*** Из соотношений (9), (10) определить коэффициент $q(x)$, если о решении прямой задачи (9), (10) известна дополнительная информация

$$U(0, \ t) = \psi(t), \ \ t \in R, \tag{11}$$

причем $\varphi(x) \neq 0, \ \ x \in R$.

Левая часть уравнения (9) равна $\dfrac{d}{dx}U$ вдоль прямой $\dfrac{dt}{dx} = -1$, проходящей через фиксированную точку $(x_0, y_0)$ плоскости $x, t$. Тогда, рассмотрев уравнение (9) вдоль прямой $t + x = t_0 + x_0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$Z'(x) = q(x)\ Z(x), \tag{12}$$

где $Z(x) = U(x, \ -x + x_0 + t_0)$.

Имеем

$$Z(x) = Z(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} q(\xi)d\xi\right) \tag{13}$$

или в терминах функции $U$

$$U(x, -x + x_0 + t_0) = U(x_0, t_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} q(\xi)\, d\xi\right).$$

При $x = x_0 + t_0$ имеем

$$U(x_0, t_0) = U(x_0 + t_0, 0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x_0+t_0} q(\xi)\, d\xi\right).$$

Если в этом равенстве заменить $x_0$ на $x$, $t_0$ на $t$ и учесть (10), то можно получить решение прямой задачи (9), (10):

$$U(x,t)=\varphi(x+t)\exp\left(\int\limits_{x+t}^{x} q(\xi)\,d\xi\right),\ (x,t)\in R^2. \tag{14}$$

Из (14) следует, что если $\varphi(x)\in C^1(R)$, то $U(x,t)\in C^1(R^2)$.

Положим в (14) $x=0$ и учтем (11):

$$\psi(t)=\varphi(t)\exp\left(\int\limits_{t}^{0} q(\xi)\,d\xi\right).$$

Откуда получаем решение обратной задачи (9)—(11):

$$q(t)=-\frac{d}{dt}\ln\frac{\psi(t)}{\varphi(t)},\ t\in R. \tag{15}$$

Из (15) следует, что для того, чтобы существовало единственное решение обратной задачи (9)—(11), необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(t)$ имела свойства:

1) $\psi(t)\in C^1(R)$;

2) $\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}>0,\ t\in R$;

3) $\psi(0)=\varphi(0)$ (условие согласования данных обратной задачи (9)—(11)).

**Обратная задача для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка** [7]. Рассмотрим в области $x\in R,\ x\neq 0,\ t\in R$ гиперболическое уравнение

$$U_{tt}=U_{xx}-a(x)U,\ x\in R,\ x\neq 0,\ t\in R, \tag{16}$$

при начальных и граничных условиях

$$U\big|_{t<0}\equiv 0, \tag{17}$$

$$[U]_{x=0}=0,\ \ [U_x]_{x=0}=\alpha\cdot\delta(t),\quad t\geq 0. \tag{18}$$

В (16)—(18) $a(x)=a^-,\ x<0;\ a(x)=a^+(x),\ x>0;\ a^-,\ \alpha$ — известные константы, $[U]_{x=0}=U(+0,t)-U(-0,t),\ U(+0,t)=\lim\limits_{x\to +0}U(x,t),\ U(-0,t)=\lim\limits_{x\to -0}U(x,t).$

***Постановка обратной задачи.*** Из (16)—(18) вычислить неизвестный коэффициент $a^+(x)$ в области $x>0$, если о решении прямой задачи (16)—(18) известна дополнительная информация

$$U(+0,t)=f(t),\ \ t>0. \tag{19}$$

Ввиду громоздкости алгоритма решения обратной задачи приведем завершающие теоремы существования, единственности и условной устойчивости обратной задачи.

*Лемма.* Если $a^{+} \in C\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$, то функция $f(t)$, являющаяся следом решения задачи (16)—(18) на полуоси $t > 0$, $x = +0$, является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяет условию согласования данных обратной задачи

$$f(+0) = -\frac{1}{2}\alpha. \tag{20}$$

*Теорема 1.* Пусть для функции $f(t) \in C^{1}(0, T)$ выполнено соотношение (20). Тогда для достаточно малого $T > 0$ решение обратной задачи (16)—(19), заключающееся в определении $a^{+}(x)$, $x \in \left(0, \dfrac{T}{2}\right)$, существует, единственно и принадлежит классу $C\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$.

Обозначим через $Q^{+}(M, T)$ множество непрерывных на отрезке $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ ограниченных фиксированной константой $M$ функций

$$Q^{+}(M, T) = \left\{ a^{+}(x) \,\middle|\, \left\| a^{+} \right\|_{C\left[0, \frac{T}{2}\right]} \le M \right\}.$$

*Теорема 2.* Пусть коэффициенты $a^{+}(x)$, $\overline{a}^{+}(x) \in Q^{+}(M, T)$ и $f(t)$, $\overline{f}(t) \in C^{1}(0, T)$ — отвечающие этим коэффициентам следы решения задачи (16)—(18) на полуоси $t > 0$, $x = +0$. Тогда имеет место неравенство

$$\left\| a^{+}(x) - \overline{a}^{+}(x) \right\|_{C\left[0, \frac{T}{2}\right]} \le \alpha \left\| f'(t) - \overline{f}'(t) \right\|_{C[0, T]},$$

где постоянная $\alpha$ конструируется постоянными $M$, $T$.

В заключение отметим, что подобные обратные задачи позволяют устанавливать причинно-следственные связи. Знакомство с математическими методами решения подобных обратных задач, осмысление их прикладных аспектов, причинно-следственных связей способствует формированию у студентов прикладной математической культуры.



## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Блехман И.М., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов. — М.: КомКнига, 2005.

[2] *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: ДРОФА, 2004.

[3] *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач: учебное пособие. — М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994.

[4] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи: учебник. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.

[5] *Корнилов В.С.* Гуманитарная компонента прикладного математического образования // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2006. — № 2. — С. 94—100.

[6] *Корнилов В.С.* Вузовская подготовка специалистов по прикладной математике: история и современность // Наука и школа. — 2006. — № 4. — С. 10—12.

[7] *Корнилов В.С.* Теоретические и методические основы обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях гуманитаризации высшего математического образования: Дисс. ... д-ра пед. наук. — М., 2008.

[8] *Корнилов В.С.* История развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений — составляющая гуманитарного потенциала обучения прикладной математике // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2009. — № 1. — С. 108—113.

[9] *Корнилов В.С.* Лабораторные занятия как форма организации обучения студентов фрактальным множествам // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2012. — № 1. — С. 60—63.

[10] *Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К.* Численные методы. — М.: ACADEMIA, 2004.

[11] *Романов В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. — Новосибирск: НГУ, 1973.

[12] *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.

[13] Современные проблемы прикладной математики: сборник научно-популярных статей (выпуск 1) / Под ред. А.А. Петрова. — М.: МЗ Пресс, 2005.


## LITERATURA


[1] *Blehman I.M., Myshkis A.D., Panovko Ja.G.* Prikladnaja matematika: Predmet, logika, osobennosti podhodov. — M.: KomKniga, 2005.

[2] *Vencel' E.S.* Issledovanie operacij: zadachi, principy, metodologija. — M.: DROFA, 2004.

[3] *Denisov A.M.* Vvedenie v teoriju obratnyh zadach: uchebnoe posobie. — M.: MGU im. M.V. Lomonosova, 1994.

[4] *Kabanihin S.I.* Obratnye i nekorrektnye zadachi: uchebnik. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2008.

[5] *Kornilov V.S.* Gumanitarnaja komponenta prikladnogo matematicheskogo obrazovanija // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2006. — № 2. — S. 94—100.

[6] *Kornilov V.S.* Vuzovskaja podgotovka specialistov po prikladnoj matematike: istorija i sovremennost' // Nauka i shkola. — 2006. — № 4. — S. 10—12.

[7] *Kornilov V.S.* Teoreticheskie i metodicheskie osnovy obuchenija obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij v uslovijah gumanitarizacii vysshego matematicheskogo obrazovanija: Diss. ... d-ra ped. nauk. — M., 2008.

[8] *Kornilov V.S.* Istorija razvitija teorii obratnyh zadach dlja differencial'nyh uravnenij — sostavljajushhaja gumanitarnogo potenciala obuchenija prikladnoj matematike // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2009. — № 1. — S. 108—113.

[9] *Kornilov V.S.* Laboratornye zanjatija kak forma organizacii obuchenija studentov fraktal'nym mnozhestvam // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2012. — № 1. — S. 60—63.

[10] *Lapchik M.P., Ragulina M.I., Henner E.K.* Chislennye metody. — M.: ACADEMA, 2004.
[11] *Romanov V.G.* Obratnye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij. — Novosibirsk: NGU, 1973.
[12] *Romanov V.G.* Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki. — M:. Nauka, 1984.
[13] Sovremennye problemy prikladnoj matematiki: sbornik nauchno-populjarnyh statej (vypusk 1) / Pod red. A.A. Petrova. — M.: MZ Press, 2005.

## THE INVERSE PROBLEMS IN THE CONTENT OF TRAINING APPLIED MATHEMATICS

**V.S. Kornilov**

Computer Science and Applied Mathematics Chair
Moscow City Pedagogical University
*Sheremetjevskaya str., 29, Moscow, Russia, 127521*

The article presents atypical mathematical problems occurring in the content of training students of universities to applied mathematics, which are called the inverse problems. Similar problems occur in disciplines such as operations research, numerical methods, differential equations, equations of mathematical physics and in other subject disciplines. Mathematical formulation and algorithms for their solution are presented during their presentation.

**Key words:** applied mathematics, inverse problems, education, student.