



ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ НА РАЗВИТИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

EVOLUTION OF TEACHING AND LEARNING THROUGH TECHNOLOGY

DOI: 10.22363/2312-8631-2026-23-1-75-91

EDN: YPBOFC

УДК 372.851

Научная статья / Research article

Методика обучения использованию компьютерных экспериментов при решении математических задач

М.В. Шабанова  , М.А. Павлова 

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова,
Архангельск, Российская Федерация
 shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

Аннотация. *Постановка проблемы.* Одним из современных трендов математической науки является усиление роли экспериментальной составляющей математической деятельности под влиянием развития цифровых технологий. Проявлением этой тенденции в системе образования является введение требований формирования экспериментальных умений в процессе обучения математике и использование цифровых инструментов при решении задач. Для этого необходимо не только включение в систему средств обучения математике постановки и проведения компьютерных экспериментов, но и разработки методик обучения их формулированию, проведению и анализу экспериментальных данных, получению адекватных выводов и их целесообразному использованию. *Методология.* В связи с тем, что знания и умения, связанные с привлечением компьютерных экспериментов к решению математических задач, носят методологический характер, в основу методики предлагается положить технологию методологически ориентированного обучения математике, разработанную одним из авторов статьи и предусматривающую создание в учебном процессе условий для объективизации и рационализации методологических оснований математической деятельности, а также окультуривания субъектного опыта этой деятельности. Содержательной основой методики выступает архив экспериментально-теоретических задач турнира по экспериментальной математике, проводимого авторами статьи среди обучающихся 5–9 классов общеобразовательных школ уже более 10 лет. Методика предназначена для подготовки участников турнира в рамках курсов внеурочной деятельности и в системе дополнительного математического образования. Исследование эффективности методики проводилось на занятиях кружков «Экспериментальная математика». *Результаты.* Установлено наличие положительной динамики

© Шабанова М.В., Павлова М.А., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

в освоении метода компьютерного эксперимента у постоянных участников турнира, которые обучаются по описываемой методике. Однако их готовность к использованию компьютерного эксперимента в комплексе с теоретическими методами решения задач представляет определенную трудность для ряда участников. *Заключение.* Выявленные трудности указывают направление дальнейшей доработки методики с учетом уровня математической подготовки учащихся.

Ключевые слова: компьютерный эксперимент, обучение использованию цифровых инструментов, динамические математические системы, GeoGebra, экспериментально-теоретические математические задачи, экспериментальные умения, внеурочная деятельность

Вклад авторов. *М.В. Шабанова* – формулирование идеи, целей и задач, дизайн, разработка методологии, создание модели исследования, написание рукописи, ее редактирование, администрирование и визуализация данных. *М.А. Павлова* – проведение экспериментов, сбор данных. Все авторы прочли и одобрили окончательную версию рукописи.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

История статьи: поступила в редакцию 31 мая 2025 г.; доработана после рецензирования 10 июля 2025 г.; принята к публикации 12 августа 2025 г.

Для цитирования: *Шабанова М.В., Павлова М.А.* Методика обучения использованию компьютерных экспериментов при решении математических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2026. Т. 23. № 1. С. 75–91. <http://doi.org/10.22363/2312-8631-2026-23-1-75-91>

Methods of teaching of using computer experiments in solving mathematical problems

Maria V. Shabanova  , Maria A. Pavlova 

M.V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk, Russian Federation

 shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

Abstract. *Problem statement.* One of the current trends in mathematical science is the strengthening of the role of the experimental component of mathematical activity under the influence of the development of digital technologies. A manifestation of this trend in the education system is the introduction of requirements for the formation of experimental skills of students in the process of teaching mathematics and the use of digital tools in solving problems. Solving a new educational problem requires not only the inclusion in the system of mathematics teaching tools that require the formulation and conduct of computer experiments, but also the development of teaching methods for their formulation, conduct, analysis of experimental data, obtaining adequate conclusions based on these data and their appropriate use. *Methodology.* Due to the fact that the knowledge and skills associated with involving computer experiments in solving mathematical problems are methodological in nature, the authors of the article propose to base the methodology on the technology of methodologically oriented mathematics education. This technology was developed by one of the authors of the article and provides for the creation of conditions in the educational process for the objectification and rationalization of the methodological foundations of mathematical activity, as well as the cultivation of the

subjective experience of this activity. The substantive basis of the methodology is the archive of experimental and theoretical problems of the Experimental Mathematics Tournament, conducted by the authors of the article among students in grades 5–9 of secondary schools for more than 10 years. The methodology is intended for the preparation of tournament participants in extracurricular activities and in the system of additional mathematical education. The study of the effectiveness of the methodology was conducted in the classes of the Experimental Mathematics circle. *Results.* It has been established that there is a positive trend in the development of the computer experiment method among those regular participants of the tournament who study according to the described methodology. However, due to the willingness to use a computer experiment in combination with theoretical methods of solving problems, it presents a certain difficulty for a number of participants. *Conclusion.* The identified difficulties indicate the direction of further refinement of the methodology, taking into account the level of mathematical training of students.

Keywords: computer experiment, teaching to use digital tools, dynamic mathematics systems, GeoGebra, experimental and theoretical mathematical problems, experimental skills, extracurricular activities

Authors' contribution. *Maria V. Shabanova* – formulation of ideas, goals and objectives, design, methodology development, creation of a research model, manuscript writing, editing, administration and data visualization. *Maria A. Pavlova* – conducting experiments, collecting data. All authors have read and approved the final version of the manuscript.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Article history: received 31 May 2025; revised 10 July 2025; accepted 12 August 2025.

For citation: Shabanova MV, Pavlova MA. Methods of teaching of using computer experiments in solving mathematical problems. *RUDN Journal of Informatization in Education.* 2026;23(1):75–91. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8631-2026-23-1-75-91>

Постановка проблемы. Экспериментальные методы математики использовали во все времена. Достаточно вспомнить эмпирические соотношения периода зарождения математики как науки, эксперименты с подбрасыванием монет и игральные кости для статистического определения вероятности случайных событий, метод мыльных пленок, использованный Жозефом Плато в XIX в. для разыскания минимальных поверхностей. Эти и другие примеры успешного использования экспериментальных методов описаны в монографии М.В. Шабановой [1]. Первоначально экспериментальные методы применялись математиками для выдвижения гипотез, а также для проверки практической реализуемости абстрактных математических теорий. При этом традиция ссылаться на использование экспериментальных методов при представлении научных результатов в математике так и не сложилась. Долгое время научным сообществом принимались лишь те результаты, истинность которых доказана дедуктивно. Сегодня с усложнением решаемых задач, а также с развитием цифровых технологий математики все чаще обращаются за помощью к компьютеру. Эти изменения в методологии математики некоторые называют компьютерной революцией [2]. Об изменении характера научной математической деятельности убедительно и красочно пишет в статьях Н.А. Вавилов [3; 4]. На стыке математики и информатики возник новый

раздел науки, получивший название экспериментальной математики. Основатели этого раздела – американские ученые Джонотан М. Борвейн и Дэвид Бейли – в своей монографии [5] описывают возможности, которые предоставляет математикам компьютерный эксперимент. Они указывают, что его применение возможно практически на каждом этапе исследования – от постановки исследовательской задачи до проверки дедуктивного доказательства. Авторы также отмечают, что по характеру применяемых методов все задачи математики можно разделить на три вида:

1) *экспериментальные* – их возможно решить лишь экспериментальными методами (проведение натурального, мысленного или компьютерного экспериментов);

2) *экспериментально-теоретические* – их решение существенно облегчает привлечение экспериментальных методов, но основу составляют теоретические методы;

3) *теоретические* – их решение не требует привлечения экспериментальных методов.

Поскольку работа математиков является прообразом учебной математической деятельности учащихся [6], эти изменения в методологии научной математической деятельности отразились и в системе математического образования. Усиление экспериментальной составляющей учебной математической деятельности в цифровую эпоху уже названо одним из ведущих трендов математического образования как российскими (А.Л. Семенов, А.Е. Абылкасимова, С.А. Поликарпов [7], В.А. Тестов [8]), так и зарубежными (H.G. Weigand, J. Trgalova, M. Tabach [9]) учеными.

Специальная подготовка школьников к использованию экспериментальных методов познания ранее была предусмотрена лишь программами предметов естественно-научного цикла и заключалась в освоении метода натурального эксперимента. В начальной школе – это предмет «Окружающий мир», в основной и старшей школе – физика, химия, биология. Сведения о сущности данного метода и его роли в истории развития естественных наук включены в содержание учебников. Так, в учебнике физики для 7 класса¹ одна из первых тем посвящена раскрытию содержания научных методов изучения природы. Здесь отмечается, что для изучения природных явлений физики их воспроизводят в лабораториях и исследуют в специально созданных условиях (проводят эксперименты). Тема с аналогичным названием и содержанием есть и в учебнике химии для 8 класса. Здесь даже дается определение понятию химический эксперимент: «химический эксперимент – исследование, которое проводят с веществами в контролируемых условиях с целью изучения их свойств» (с. 14)². Программами естественно-научных учебных предметов традиционно предусмотрены разные формы организации опытно-экспериментальной работы:

¹ *Перышкин М.И., Иванов А.И.* Физика. 7 класс: базовый уровень : учебник для общеобразовательных организаций. 4-е изд. М. : Просвещение, 2024. 239 с.

² *Габриелян О.С., Остроусов И.Г., Сладков С.А.* Химия. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций. М. : Просвещение, 2019. 175 с.

проведение демонстрационных и фронтальных экспериментов, лабораторных работ и организация лабораторных практикумов.

В школьных учебниках математики таких разделов нет. Однако появились задачи, решение которых предлагается осуществлять с использованием компьютера³. При этом какое программное обеспечение и как следует его использовать в работе с такими задачами авторы рекомендаций не дают. Да и сами задачи, как показал их анализ, представленный в статье М.В. Шабановой [10], по форме и содержанию мало чем отличаются от тех, которые предлагается решать чисто теоретическими методами.

Это привело к постановке проблемного вопроса: «Что же положить в основу разработки методики обучения школьников решению экспериментальных и экспериментально-теоретических математических задач?» Мы видим два пути решения этой проблемы.

1. Обеспечить перенос экспериментальных умений, сформированных при изучении предметов естественно-научного цикла, в сферу математической деятельности за счет организации межпредметных компьютерных лабораторных практикумов (физика + химия + биология + математика + информатика), «стирающих грани» между областями использования экспериментального метода в процессе познания. Пример реализации этой идеи можно найти в статье В.Л. Экекеян [11].

2. Усилить экспериментальную составляющую обучения математике за счет использования разработанной технологии методологически ориентированного обучения [12], что обеспечит накопление опыта использования экспериментального метода в математическом познании и его трансформацию в систему знаний о сущности компьютерного эксперимента, о целях и условиях его привлечения к решению математических задач.

Эти два пути являются взаимодополняющими. Если есть возможность реализовать их в совокупности, то это только усилит образовательный эффект. Но практика показывает, что реализовать первый путь довольно сложно. Для этого нужен учитель – эрудит, обладающий достаточными знаниями во всех перечисленных выше областях, или межпредметное сообщество учителей, готовых к сотрудничеству.

В связи с этим остановимся на более доступном учителю математики способе – применении технологии методологически ориентированного обучения.

Цель исследования – представить возможности технологии методологически ориентированного обучения в формировании знаний об особенностях привлечения компьютерных экспериментов к решению математических задач на примере подготовки учащихся основной общеобразовательной школы к решению задач турнира по экспериментальной математике. Экспериментально-теоретические задачи – кульминационные в турнирных заданиях. Архив задач турнира с критериями оценки и решениями размещен на сайте GeoGebra.org⁴.

³ Атанасян Л.С. Геометрия. 7–9 классы: базовый уровень : учебник для общеобразовательных организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [и др.]. 20-е изд. М. : Просвещение, 2010. 384 с.

⁴ Архив заданий Турнира по экспериментальной математике. URL: <https://www.geogebra.org/m/vger9kgu> (дата обращения: 26.11.2025).

Методология. Знания и умения, связанные с постановкой и проведением экспериментов, – разновидность методологических знаний. Знания этого типа бесполезно передавать в виде инструкций «делай так». Они зарождаются и развиваются постепенно в процессе совместной предметной и рефлексивной деятельности учителя с обучающимися. В своем развитии такие знания проходят несколько этапов.

1. *Зарождение* в процессе восприятия образца эффективной деятельности по применению метода компьютерного эксперимента к решению познавательной проблемы, не разрешимой чисто теоретическими методами (наблюдение за экспериментальной деятельностью наставника или чтение о применении данного метода в новейшей истории развития математики). На этом этапе методологические знания неотделимы от конкретного акта познавательной деятельности.

2. *Распространение* на другие ситуации, требующие привлечения компьютерного эксперимента. В этот период методологические знания осознаются как традиции следования предъявленным образцам деятельности. Особенности постановки и проведения компьютерного эксперимента, условия и границы его эффективности не осознаются учащимися.

3. *Выявление* – осознание значимости изучения условий эффективности применения данного метода. К выявлению приводит столкновение с ситуацией «неуспеха» в его использовании, которая вызвана неосознаваемым нарушением правил постановки и проведения эксперимента или неправильной обработкой его результатов, отсутствием их теоретического осмысления.

4. *Опредмечивание* – превращение эксперимента из метода познания в предмет изучения. Знания о сущности экспериментального метода, условиях и границах его эффективности, о месте в системе методов познания являются результатом рефлексивного осмысления и критической оценки сложившихся традиций использования данного метода.

Для турнира экспериментально-теоретические задачи составляют специалисты в области экспериментальной математики, а также преподаватели, широко практикующие обучение с использованием систем динамической математики (С.И. Гроздев, Р.Н. Николаев, А.И. Сгибнев, В.И. Рыжик, А.В. Ястребов и др.). Анализ предложенных ими задач показывает, что к необходимости привлечения компьютерных экспериментов приводит:

1) наличие неявно заданных свойств конфигурации, обнаружение которых возможно лишь при точном ее построении с последующим исследованием выявленных свойств на динамическую устойчивость;

2) наличие подвижных элементов конфигурации или элементов, позиция которых не определена условиями задачи и требуется ее разыскание с последующим нахождением значений величин, зависящих от выбора этой позиции;

3) наличие прямого требования исследования некоторой зависимости метрических и/или позиционных свойств от значений позиционных или метрических параметров.

В связи с вариативностью причин и целей привлечения компьютерного эксперимента разработку методики работы с каждой конкретной экспериментально-теоретической задачей лучше начинать с ее решения рефлексивного анализа оснований принимаемых решений и испытываемых трудностей. Далее нужно оценить, какие возможности для снятия возникших затруднений предоставляет компьютерный эксперимент. Это поможет спрогнозировать и запланировать его возможное применение учащимися.

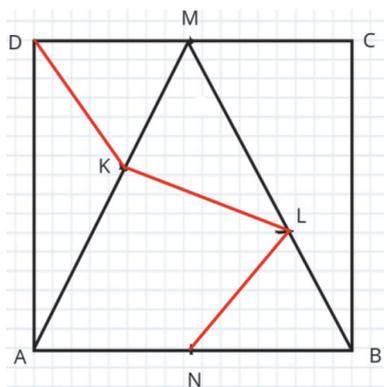
Сложность реализации методики методологически ориентированного обучения состоит в том, что нужно направлять не только предметную, но и рефлексивную составляющие деятельности учащихся. Представим методику на конкретном примере.

В качестве содержательной основы выберем задачу, предложенную профессором Р. Николаевым (Экономический университет, Варна) на турнире 2019 г. учащимся 8 класса:

В квадрате $ABCD$ со стороной 2 точка M – середина CD , N – середина AB . Точка K лежит на отрезке AM , точка L – на стороне MB . Точки D , K , L , N соединены ломаной. Найдите наименьшую из всех возможных длин этой ломаной.

Заметим, что в ходе подготовки к турниру экспериментально-теоретические задачи ставятся вперемешку с теоретическими, предоставляя учащимся свободу выбора комплекса применяемых для их решения методов. Допустим, мы так и делали. Тогда работа над задачей начнется с записи данных и требования, сопровождаемых схематическим чертежом (рис. 1).

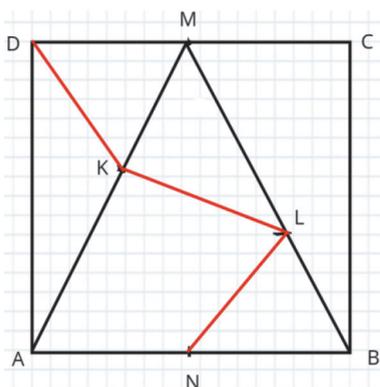
Далее желательно предоставить возможность учащимся выдвинуть как можно больше гипотез об искомом значении. Естественная стратегия – «спрямление» ломаной, но в силу невозможности ее реализации учащиеся, возможно, будут выбирать «удобные» для вычисления положения точек K и L . Роль учителя на этом этапе состоит в накоплении и систематизации получаемых учащимися результатов для последующего их обсуждения (табл. 1).



Дано: $ABCD$ – квадрат ($AB = 2$).
 $DM = MC$, $AN = NB$,
 $K \in AM$, $L \in MB$.
 Найти: наименьшее значение
 $DK + KL + LN$.

Рис. 1. Результаты анализа условия задачи

Источник: создано М.В. Шабановой, М.А. Павловой.



Given: $ABCD$ – a square ($AB = 2$).
 $DM = MC$, $AN = NB$,
 $K \in AM$, $L \in MB$.
 Find: the smallest value of
 $DK + KL + LN$.

Figure 1. Results of the task condition analysis

Source: created by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

Таблица 1. Результаты, полученные путем выбора «удобных» точек

№ п/п	Положение K	Положение L	Значение суммы
1	$K = A$	$L = B$	5
2	$K = M$	$L = M$	3
3	$K = M$	$L = B$	$2 + \sqrt{5}$

Источник: составлено М.В. Шабановой, М.А. Павловой.

Table 1. The results obtained by selecting convenient points

No.	Position K	Position L	Value of the sum
1	$K = A$	$L = B$	5
2	$K = M$	$L = M$	3
3	$K = M$	$L = B$	$2 + \sqrt{5}$

Source: compiled by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

Множественность полученных результатов и отсутствие видимых теоретических оснований для признания меньшего в табл. 1 значения наименьшим создает мотив для перехода к экспериментальной деятельности.

Цель компьютерного эксперимента 1 – проверка гипотезы путем определения «подбором» положения точек K и L , для которых длина ломаной $DKLN$ является наименьшей.

Для построения динамической модели учащимся 8–9 классов достаточно математических знаний и времени, поэтому лучше предоставить им возможность пересест за компьютеры и выполнить эту работу самостоятельно. Задача учителя – контролировать, чтобы созданная компьютерная модель конфигурации обладала свойством динамической устойчивости, то есть не нарушала условий задачи при перемещении свободных точек. Если большинство учащихся затрудняется в создании такой модели, можно предварительно обсудить алгоритм ее построения или провести построения совместно, демонстрируя через проектор или с помощью интерактивной доски действия

одного из учеников. Приведем наиболее короткий алгоритм построения динамической модели задачной ситуации инструментами GeoGebra:

1) построение отрезка длины 2 инструментом *Отрезок фиксированной длины* ;

2) построение на нем квадрата инструментом *Правильный многоугольник* ;

3) построение точек M и N инструментом *Середина отрезка* ;

4) построение отрезков MA и NB инструментом *Отрезок* ;

5) построение точек K и L инструментом *Точка на объекте* ;

6) соединение точек D, K, L, N инструментом *Ломаная* .

Результат построений и ссылка на модель⁵ приведены на рис. 2.

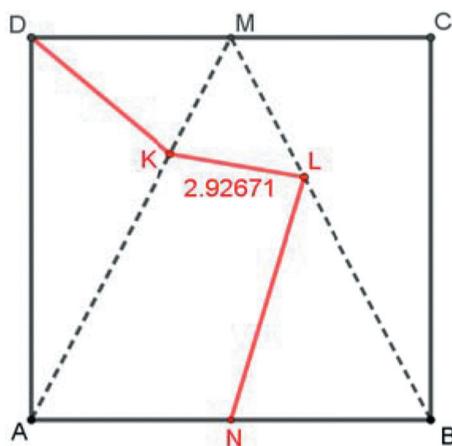


Рис. 2. Модель к задаче и динамический чертеж к ней⁵

Источник: создано М.В. Шабановой, М.А. Павловой.

Figure 2. The task model and for accessing worksheet for it⁵

Source: created by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

Такая модель провоцирует проведение бэконовского эксперимента [1], то есть получения результата без предварительного планирования экспериментальных действий. Эта возможность должна быть предоставлена учащимся.

Значимые для решения задачи результаты эксперимента 1:

1) обнаружение позиций точек K и L , для которых длина ломаной меньше полученной ранее методом подбора «удобных» точек;

2) выдвижение гипотезы от том, что необходимым, но недостаточным условием достижения наилучшего результата является принадлежность точек D , K и L одной прямой.

Последний вывод сведет задачу к поиску положения точки L . Но как его определить, бэконовский эксперимент уже подсказать не может.

⁵ Задача 5. Р. Николаев, 8 класс, 2019. URL: <https://www.geogebra.org/m/uppsmump> (дата обращения: 26.11.2025).

Ситуация «неуспеха» мотивирует учащихся отказаться от дальнейшего использования стихийных проб (остановить предметную деятельность).

Задача учителя «поймать» этот момент и организовать выход учащихся в рефлексивную позицию по отношению к осуществляемым экспериментальным действиям для разрешения проблемы. Осознать причины «неуспеха» помогут вовремя заданные вопросы: «Как вы думаете, почему мы не можем определить положение точки L экспериментально? Какие усовершенствования динамической модели облегчили бы его поиск?»

Обсуждение этих вопросов наведет учащихся на мысль исключить влияние на результат неточности положения точки K за счет перестройки чертежа, задав положение точки K сразу как точки пересечения отрезков AM и DL . Побудить учащихся к созданию средств планомерного перебора вариантов поможет постановка вопроса: «Как сделать перебор положений точки L на отрезке BM контролируемым?»

Результат его обсуждения – предложение задать положение точки L на BM с использованием инструмента *Ползунок* . Для перестройки модели достаточно построить окружность с центром в точке B и радиусом, зависящим от ползунка, инструментом *Окружность по точке и радиусу* . Затем отметить точку пересечения этой окружности и BM инструментом *Пересечение* . Переопределить точку L как точку, равную точке пересечения (например, $L = E$). Ломаную $DKLN$ заменить на ломаную DLN , так как K принадлежит отрезку DL .

Для удобства фиксации результатов эксперимента учитель или учащиеся могут предложить записывать данные о текущих значениях ползунка и соответствующих им значениях длины ломаной в электронную таблицу⁶ (рис. 3). Важным этапом планирования является обсуждение амплитуды значений и допустимого направления изменения значений ползунка в ходе эксперимента. Можно также поднять вопрос о значимости условия $AB = 2$ и сразу предусмотреть возможность изменения длины стороны квадрата при создании модели для получения обобщенного вывода.

Цель компьютерного эксперимента 2 – определить, хотя бы приблизительно, положение точки L , при котором длина ломаной наименьшая.

Учащиеся зачастую испытывают большие трудности в формулировке выводов из проведенного эксперимента. Научить их делать выводы поможет рефлексивная игра «Битва аргументов». Учитель предъявляет учащимся несколько выводов, подготовленных заранее (или предварительно полученных от учащихся). Один из них верный, остальные представляют типичные ошибки:

А. Наименьшая длина ломаной 2,86.

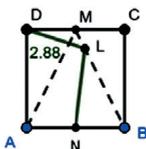
В. Для квадрата со стороной 2 наименьшая длина ломаной 2,86.

С. Если точка L удалена от B на расстояние 1,5 или 1,6, то длина ломаной наименьшая.

Д. Если точка L удалена от точки B на расстояние от 1,4 до 1,7, то длина ломаной наименьшая.

⁶ Задача Р. Николаева_8 класс_2019(2). URL: <https://www.geogebra.org/m/rgfbf5bu> (дата обращения: 26.11.2025).

I. Среди точек L , удаленных от точки B на расстояние, составляющее от 0,62 до 0,72 длины отрезка BM , найдется, по крайней мере, одна точка, для которой длина ломаной наименьшая.



	A	B
1	a	l
2	0.1	3
3	0.2	3
4	0.3	3
5	0.4	3
6	0.5	3
7	0.6	3
8	0.7	3
9	0.8	3
10	0.9	
11	1	2
12	1.1	2
13	1.2	
14	1.3	2
15	1.4	2
16	1.5	2
17	1.6	2
18	1.7	2
19	1.8	2

Рис. 3. Модель для проведения компьютерного эксперимента в контролируемых условиях и динамический чертеж к ней⁶

Источник: создано М.В. Шабановой, М.А. Павловой.

Figure 3. The model for conducting a computer experiment under controlled conditions and for accessing the worksheet⁶

Source: created by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

Учащимся предлагается распределиться на группы, выбрав тот вывод, который, по их мнению, является правильным. В ходе игры игроки могут менять мнение и переходить в другую группу. Игровая цель – перетянуть на свою сторону большее количество членов других групп. Каждой группе по очереди дается слово для озвучивания аргументов, объясняющих правоту выбранной позиции и опровергающих альтернативные позиции. Учитель фиксирует аргументы «за» и «против», занося их в табл. 2.

Именно данные табл. 2, а не объединение групп, участники которых первоначально придерживались разных мнений, является наиболее значимым результатом игры.

Таблица 2. Примеры аргументов, которые могут быть собраны в процессе игры

Вывод	Аргументы «за»		Аргументы «против»
A	Подтвержден данными эксперимента		Не соответствует цели эксперимента
B	Описана фигура, для которой получен результат		
C	Соответствует цели эксперимента	Подтвержден данными эксперимента	Не учтена приближенность представления данных и неполнота перебора вариантов
D		Подтвержден данными эксперимента	Вывод частный (только для стороны 2)
I		Учтена приближенность данных и неполнота	
		Вывод обобщенный	

Источник: составлено М.В. Шабановой, М.А. Павловой.

Table 2. Examples of arguments that can be obtained during the game

Conclusion	The arguments for	Arguments against
A	Confirmed by experimental data	Does not meet the purpose of the experiment
B	The figure for which the result was obtained is described	
C	Confirmed by experimental data	The approximation of the data representation and the incompleteness of the search options are not taken into account
D	Confirmed by experimental data	Private output (only for side length 2)
I	Data approximation and incompleteness are taken into account	
	Generalized conclusion	

Source: compiled by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

Следующий этап работы над задачей – поиск способа использования результатов компьютерного эксперимента для обнаружения алгоритма точного построения точки L . Сначала нужно предложить учащимся снизить влияние на результат неточности отображения данных, а затем убрать (скрыть) на чертеже все лишнее, оставив только определяющие положение точки L элементы: отрезок BM и ломаную DLN . Зрительное сходство с задачей Герона должно навести учащихся на идею решения спрямлением ломаной путем замены звена NL отрезком LN' , симметричным ему относительно BM (рис. 4).

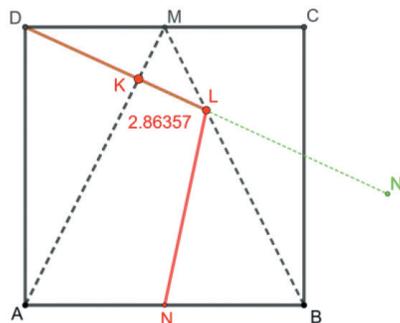


Рис. 4. Спрямление ломаной за счет построения N' , симметричной N относительно прямой BM

Источник: создано М.В. Шабановой, М.А. Павловой.

Figure 4. Straightening a polyline by constructing an N' symmetric N relative to a straight BM

Source: created by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

После обнаружения идеи решение сводится к цепочке неравенств:

$$DK + KL + LN \geq DL + LN = DL + LN \geq DN'$$

Работа над задачей, выступающей лишь содержательной основой развития методологических знаний учащихся, не должна заканчиваться с получением результата. Требуется включение учащихся в деятельность методологической рефлексии, позволяющей зафиксировать отличие нового опыта и нового знаний от исходного. В связи с тем, что работа проводится в рамках подготовки к турниру, достаточным мотивом выхода в рефлексивную пози-

цию будет являться предложение учителя оценить проделанную работу по критериям, которые использовали члены жюри (табл. 3).

Таблица 3. Критерии оценки задачи, 8 класс, 2019

Баллы	Критерии
1–5	Задача решена экспериментально, но построения, необходимые для обоснования не приведены
6–15	Задача решена экспериментально, приведен чертеж, из которого может следовать обоснование, однако само обоснование не приведено
16–20	Задача решена, но доказаны не все ключевые моменты решения
21–30	Задача решена, представлено доказательство всех ключевых моментов

Источник: составлено М.В. Шабановой, М.А. Павловой.

Table 3. The task evaluation criteria, 8th grade, 2019

Points	Criteria
1–5	The problem has been solved experimentally, but the constructions necessary for substantiation are not given
6–15	The problem has been solved experimentally, and a drawing is provided from which a justification can follow, but the justification itself is not provided
16–20	The problem has been solved, but not all the key points of the solution have been proven
21–30	The problem has been solved, and the proof of all the key points has been presented

Source: compiled by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

Попытка применения критериев приводит к необходимости обсуждения вопросов:

1. Что значит «задача решена экспериментально»?
2. Какие построения обосновывают результат?
3. Почему описаний построения точек K и L недостаточно для получения высшего балла?
4. Доказательство каких ключевых моментов требуется представить?
5. На какой балл может быть оценено решение, проведенное без использования эксперимента, и почему?
6. Почему мы не смогли найти решение, не привлекая компьютерного эксперимента? В чем он помог?

Результаты и обсуждение. Представленная методика прошла апробацию и внедрена в систему проведения занятий кружков «Экспериментальная математика» для учащихся 7–9 классов, организованных на базе центра по работе с одаренными детьми (Центр «Созвездие», Архангельск), нескольких образовательных организаций в Архангельской области (Северодвинск, СШ № 24; Вельск, СШ № 92), а также лицей Иннополис (Иннополис). Все учащиеся в кружках вне зависимости от базы занимаются по одной программе, учебным материалам и методическим рекомендациям, являются постоянными участниками турнира по экспериментальной математике. Турнир проводится на каждой базе отдельно. Все предлагаемые задачи требуют развернутого ответа: предоставления скриншотов или фотографий работ, созданных учащимися

динамических моделей. Работы участников направляются в жюри турнира для экспертной проверки. Это позволяет отслеживать динамику результатов как на уровне отдельных площадок, так и отдельных учащихся. Для представления результатов решения экспериментально-теоретических задач турнира участников от интересующих нас площадок в сравнении с общими результатами участников удобно использовать коэффициент результативности (R_i) – относительный показатель, который позволяет определять место каждой i -й площадки в общем рейтинге участников. Значение коэффициента рассчитывается по формуле:

$$R_i = \frac{X_i}{X_{\text{cp.}}},$$

где $X_{\text{cp.}}$ – средний балл за решение задачи по всем участникам, приступившим к ее выполнению; X_i – средний балл за решение задачи по участникам i -й площадки.

Для представления динамики использовались лишь данные участников одной возрастной группы для каждого года 7 класс (2023), 8 класс (2024), 9 класс (2025). Полученные данные представлены на диаграмме (рис. 5).

Диаграмма показывает стабильный рост результативности выполнения данного задания на площадках, в работу которых внедрена методика, по сравнению с результатами участников турнира в целом. Несмотря на достаточно высокий уровень овладения методом компьютерного эксперимента, способности его использовать в сочетании с теоретическими методами и у этих участников остаются пока на достаточно низком уровне. Об этом говорят средние баллы выполнения данного задания на этих площадках. Они не превышают 17 баллов. Отмеченный недостаток задает направление дальнейшей работы.

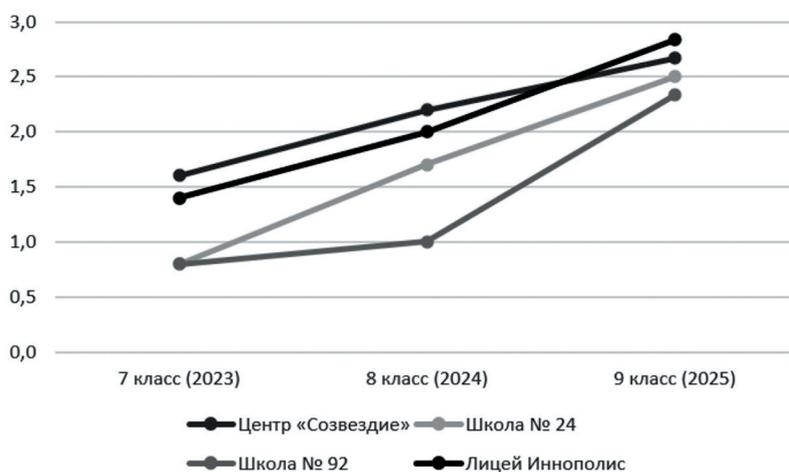


Рис. 5. Динамика результативности решения экспериментально-теоретической задачи участниками турнира за три года

Источник: создано М.В. Шабановой, М.А. Павловой.

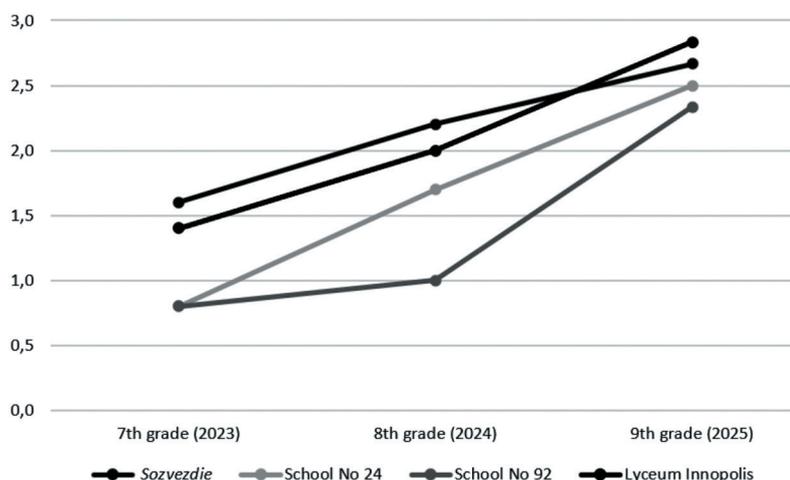


Figure 5. The dynamics of the resultativity of solving an experimental – theoretical problem by the participants of the tournament over three years

Source: created by Maria V. Shabanova, Maria A. Pavlova.

Заключение. Один из вызовов цифровой трансформации научной и образовательной математической деятельности – включение в систему средств поддержки этой деятельности цифровых инструментов. С их помощью можно не только визуализировать математические абстракции, но и ставить, и проводить над ними компьютерные эксперименты. Научить учащихся задумываться над тем, нужно ли в данном случае тратить силы и время на создание динамической модели, или достаточно обычного схематического чертежа, помогает постановка задач особого вида, называемых экспериментально-теоретическими. Методика работы с такими задачами должна быть направлена на формирование методологических знаний о назначении, возможностях и условиях использования компьютерных экспериментов в сочетании с теоретическими методами. Представленная нами методика работы с экспериментально-теоретической задачей требует достаточно больших затрат времени. В связи с этим мы рекомендуем ее использовать на внеурочных занятиях: курсах внеурочной деятельности, занятиях кружков, в организациях дополнительного образования.

Список литературы

- [1] Шабанова М.В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение : коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов [и др.]. М. : Академия Естествознания, 2016. 300 с. <https://doi.org/10.17513/np.141> EDN: WASRVL
- [2] Atiyah M.F. Mathematics and the computer revolution // *Izvestiya: Mathematics*. 2016. Vol. 80. No. 4. P. 637–346. <https://doi.org/10.1070/IM8512>
- [3] Вавилов Н.А. Компьютер как новая реальность математики. I. Personal account // *Компьютерные инструменты в образовании*. 2020. № 2. С. 5–26. <https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-2-5-26> EDN: JRMMBP

- [4] *Вавилов Н.А.* Компьютер как новая реальность математики. II. Проблема Варинга. Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 3. С. 5–55. <http://dx.doi.org/10.32603/2071-2340-2020-3-5-55> EDN: DRZSIZ
- [5] *Borwein J., Bailey D.* *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. 2nd ed. New York : A K Peters/CRC Press, 2004. <https://doi.org/10.1201/b10704>
- [6] *Вишняков Ю.С., Семенов А.Л., Шабат Г.Б.* Работа математика как прообраз освоения математики учащимися. Роль эксперимента // Математическое образование цифрового века. Доклады Российской академии наук. Математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 511. № 1. С. 95–110. <https://doi.org/10.31857/S2686954323700200> EDN: EEBEYW
- [7] *Semenov A.L., Abylkassymova A.E., Polikarpov S.A.* Foundations of mathematical education in the digital age // *Doklady Mathematics*. 2023. Vol. 107. No. S1. P. S1–S9. <https://doi.org/10.1134/s1064562423700564> EDN: BFHYOR
- [8] *Тестов В.А., Попков Р.А.* Особенности трансформации математического образования в цифровую эпоху // Творчество студентов и школьников в области математики и методы его развития : материалы 44-го Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Минск, 25–27 сентября 2025 г. / ред. А.Г. Мордкович, А.В. Ястребов, Е.И. Малова, М.В. Егупова. Минск : Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка, 2025. С. 18–21. EDN: ATFLCM
- [9] *Weigand H.-G., Trgalova J., Tabach M.* Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age // *ZDM – Mathematics Education*. 2024. Vol. 56. P. 525–541. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9>
- [10] *Шабанова М.В., Удовенко Л.Н., Ястребов А.В.* Компьютерные эксперименты в решении школьных геометрических задач // Математика в школе. 2024. № 8. С. 15–29. https://doi.org/10.47639/0130-9358_2024_8_15 EDN: XBYVTD
- [11] *Экелекян В.Л.* Интегрированная лабораторная работа по информатике, математике и физике // Информатика. Приложение к газете «Первое сентября». 2004. № 37. С. 22–24.
- [12] *Шабанова М.В.* Методология учебного познания как цель изучения математики. Архангельск : Поморский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2004. 402 с. EDN: QUAXXH

References

- [1] Shabanova MV, Ovchinnikova RP, Yastrebov AV, et al. *Experimental Mathematics at School. Research-Based Learning: Collective Monograph*. Moscow: Publishing House of the Academy of Natural Sciences; 2016. 300 p. (In Russ.) <https://doi.org/10.17513/np.141> EDN: WASRVL
- [2] Atiyah MF. Mathematics and the computer revolution. ted works. *Izvestiya: Mathematics*. 2016;80(4):637–346. <https://doi.org/10.1070/IM8512>
- [3] Vavilov NA. Computers as novel mathematical reality. I. Personal account. *Computer Tools in Education*. 2020;(2):5–26. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.32603/2071-2340-2020-2-5-26> EDN: JRMMBP
- [4] Vavilov NA. Computers as fresh mathematical reality. II. Waring problem. *Computer Tools in Education*. 2020;(3):5–55. (In Russ.) <https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-2-5-55> EDN: DRZSIZ
- [5] Borwein J, Bailey D. *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. 2nd ed. New York: A K Peters/CRC Press; 2004. <https://doi.org/10.1201/b10704>
- [6] Vishnyakov YuS, Semenov AL, Shabat GB. The work of a mathematician as a proimage of the mastering of mathematics by students. The role of the experiment. *Doklady Mathematics*. 2023;511(1):95–110. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S2686954323700200> EDN: EEBEYW

- [7] Semenov AL, Abylkassymova AE, Polikarpov SA. Foundations of mathematical education in the digital age. *Doklady Mathematics*. 2023;107(S1):S1–S9. <https://doi.org/10.1134/s1064562423700564> EDN: BFHYOR
- [8] Testov VA, Popkov RA. Features of the transformation of mathematical education in the digital age. In: Mordkovich AG, Yastrebov AV, Malova IE, Egupova MV. (eds.). *Creativity of Students and Schoolchildren in the Field of Mathematics and Computer Science and Methods of its Development: Proceedings of the 44th International Scientific Seminar of University Teachers of Mathematics and Computer Science, 25–27 September, Minsk, Belarus*. Minsk: Belarusian State Pedagogical University; 2025. p. 18–21. (In Russ.) EDN: ATFLCM
- [9] Weigand H-G, Trgalova J, Tabach M. Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age. *ZDM – Mathematics Education*. 2024;56:525–541. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9>
- [10] Shabanova MV, Udovenko LN, Yastrebov AV. Computer experiments in solving school geometric tasks. *Mathematics at School*. 2024;(8):15–29. (In Russ.) https://doi.org/10.47639/0130-9358_2024_8_15 EDN: XBYVTD
- [11] Ekelekian VL. Integrated laboratory work in computer science, mathematics and physics. *Informatika. Prilozhenie k Gazete Pervoye Sentyabrya*. 2004;(37):22–24. (In Russ.)
- [12] Shabanova MV. *Methodology of Educational Cognition as a Goal of Learning Mathematics*. Arkhangelsk: M.V. Lomonosov Pomor State University Publ.; 2004. 402 p. (In Russ.) EDN: QUAXXH

Сведения об авторах:

Шабанова Мария Валерьевна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 163002, Архангельск, Набережная Северной Двины, д. 17. ORCID: 0000-0002-5043-0960; SPIN-код: 2057-9519. E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

Павлова Мария Александровна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 163002, Архангельск, Набережная Северной Двины, д. 17. ORCID: 0000-0003-3299-599X; SPIN-код: 8635-8182. E-mail: m.pavlova@narfu.ru

Bio notes:

Maria V. Shabanova, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor at the Department of Experimental Mathematics and Informatization of Education, Higher School of Information Technology and Automated Systems, M.V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University, 17 Naberezhnaya Severnaya Dvina, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation. ORCID: 0000-0002-5043-0960; SPIN-code: 2057-9519. E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

Maria A. Pavlova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor at the Department of Experimental Mathematics and Informatization of Education, Higher School of Information Technology and Automated Systems, M.V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University, 17 Naberezhnaya Severnaya Dvina, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation. ORCID: 0000-0003-3299-599X; SPIN-code: 8635-8182. E-mail: m.pavlova@narfu.ru