ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ы. Бидайбеков[1], В.С. Корнилов[2], Г.Б. Камалова[1], Н.Ш. Акимжан[1]

[1] Кафедра информатики и информатизации образования
Казахский национальный педагогический университет им. Абая
ул. Толе би, 86, Алматы, Казахстан, 050012
[2] Кафедра информатики и прикладной математики
Московский городской педагогический университет
Шереметьевская ул., 29, Москва, Россия, 127521

В статье излагаются методические аспекты обучения студентов физико-математических и естественно-научных специальностей обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся алгоритмы решения некоторых постановок обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые входят в содержание такого обучения. Приводятся результаты расчетов численных решений соответствующих обратных задач в системе компьютерной математики Mathcad.

Ключевые слова: обучение обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, компьютерные технологии, система компьютерной математики Mathcad, численный метод решения обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, студент.

В настоящее время в некоторых высших учебных заведениях стран СНГ на физико-математических и естественно-научных направлениях подготовки преподаются специальные курсы по обратным задачам для дифференциальных уравнений [3; 4; 6; 7; 9; 12–19; 21–23; 26; 29; 32]. Среди таких вузов Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский городской педагогический университет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Уральский государственный университет, Ростовский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби и другие вузы. Содержание обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений формируется на основе современных достижений теории и практики обратных задач математической физики — одного из направлений прикладной математики.

Фундаментальный вклад в создание теории обратных задач математической физики внесли работы В.А. Амбарцумяна, М.Г. Крейна, М.М. Лаврентьева, Б.М. Левитана, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, А.Н. Тихонова и других ученых. В настоящее это направление прикладной математики развивается в исследованиях А.В. Баева, М.И. Белишева, П.Н. Вабишевича, А.О. Ватульяна, А.М. Денисова, С.И. Кабанихина, Е.В. Корчагиной, А.В. Полякова, В.Г. Романова, В.С. Сизикова, Ю.М. Сироты, Ю.М. Тимофеева, Г.В. Хромовой, В.Г. Чередниченко, В.Б. Черепенникова, В.А. Юрко, В.Г. Яхно и других ученых [1; 2; 9; 12; 24; 26–30; 32; 34; 36; 38].

В содержании обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений имеется своя специфичная терминология, используются различные математические модели и методы исследования, присутствуют широкие межпредметные связи изучаемых вузовских математических курсов, таких как математический и функциональный анализ, алгебра и геометрия, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, методы оптимизации, интегральные уравнения, численные методы, информатика и другие учебные дисциплины. Достижение качественных результатов в процессе такого обучения, которые бы демонстрировали у студентов наличие системы фундаментальных знаний в области теории и методологии исследования обратных задач для дифференциальных уравнений, возможно при условии применения конкретных методов их решения. В этом случае решение обратных задач выступает и как цель, и как средство обучения. Этот вид учебной деятельности студентов служит средством формирования и развития прикладной математической культуры; способствует глубокому и прочному усвоению сложных определений, понятий, методов и подходов, используемых при решении обратных задач; способствует формированию умений и навыков исследования обратных задач; создает условия для осуществления профессиональной ориентации.

В обучении обратным задачам с их высоким математическим уровнем, сложным понятийным аппаратом, математическими методами исследования и трудоемкостью исследований реализуется такая форма обучения, как лабораторные работы с использованием современных компьютерных технологий, среди которых — системы компьютерной математики (Maple, Mathematica,Mathcad, Matlab и др.), в настоящее время активно используемые в вузовском образовании [8; 11; 25; 29; 35] и позволяюшие реализовать дидактические принципы обучения. Подобные лабораторные занятия по обратным задачам интегрируют теоретико-методологические знания, практические умения и навыки студентов в едином процессе деятельности учебно-исследовательского характера. При правильной организации лабораторной работы студенты выступают в роли исследователей обратных задач для дифференциальных уравнений.

Один из разделов содержания обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений посвящен обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, включает такие обратные задачи, как обратные задачи определения коэффициентов линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, обратные задачи определения правой части дифференциальных уравнений, обратные задачи теории рассеяния, обратные задачи вариационного исчисления. При обучении обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений большое внимание уделяется приближенным метода их решения.

Очевидно, что разработка вычислительных алгоритмов нахождения приближенных решений обратных задач математической физики, и в частности обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений является важнейшим аспектом развития теории и практики обратных задач для дифференциальных уравнений, ввиду ряда математических особенностей. Одна из таких особенностей — нелинейность, которая, как правило, не позволяет получить точное решение обратной задачи в виде формулы. Методика исследования обратных задач предполагает поэтапное исследование свойств решения соответствующей прямой задачи, а затем обратной. Как правило, строится замкнутая система уравнений обратной задачи в виде интегро-дифференциальных уравнений; эта система может быть решена при помощи итерационных процессов, включающих в себя многократное решение соответствующих прямых задач. В связи с этим в данной ситуации численные методы выступают в качестве высокоэффективных методов исследования обратных задач.

Основы численных методов решения обратных задач были заложены фундаментальными работами А.С. Алексеева, А.А. Самарского, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, В.И. Дмитриева, С.И. Кабанихина, В.Г. Яхно, А.Л. Бухгейма, П.Н. Вабишевича и других учеными и в настоящее время применяются многими авторами при исследовании широкого круга обратных задач, в том числе — обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [12; 13; 24; 30; 36].

Рассмотрим несколько постановок обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с их последующими решениями, которые предлагаются студентам в процессе их обучения обратным задачам. От студентов требуется доказать соответствующие теоремы существования, единственности и устойчивости решения обратной задачи или найти приближенное решение соответствующей обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с применением системы компьютерной математики Mathcad.

Обратная задача. На отрезке $[0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d. \tag{2}$$

В (1), (2) $t \in [0, T]$, x, d, $f(t)$ — n-мерные векторы-столбцы, A, B и C — матрицы порядка $n \times n$, причем $A(t)$и $f(t)$ — непрерывны на отрезке $[0, T]$.

От студентов требуется определить вектор-функцию $x(t)$, непрерывную на отрезке $[0, T]$, непрерывно-дифференцируемую на $(0, T)$, удовлетворяющую краевым условиям (2) и дифференциальному уравнению (1).

Введя обозначение $x(0) \equiv \lambda$ и осуществляя замену искомой функции $u(t) = x(t) - \lambda$, решение рассматриваемой краевой задачи студенты сводят ее к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + A(t)\lambda + f(t),\ u(0) = 0, \tag{3}$$

$$(B + C)\lambda + Cu(T) = d, \tag{4}$$

т.е. к нахождению пары $\{\lambda, u(t)\}$, удовлетворяющей равенствам (3), (4).

Полученная обратная задача (3), (4) эквивалентна исходной задаче (1), (2) в том смысле, что если $\{\lambda, u(t)\}$ — решение задачи (3), (4), то $x(t) = \lambda + u(t)$ является решением задачи (1), (2) и наоборот, если $x(t)$ — решение задачи (1), (2), то пара $\{x(0), x(t) - x(0)\}$ является решением задачи (3), (4).

Алгоритм решения полученной обратной задачи студенты строят в соответствии с методикой, изложенной в работе [1]. Прежде всего путем интегрирования уравнения (3) от 0 до T определяется

$$u(T) = \int_0^T A(t)u(t)\,dt + \lambda\int_0^T A(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt.$$

Осуществляя его подстановку в краевые условия (4) и предполагая, что матрица $M = B + C\left[I + \int_0^T A(t)dt\right]$ имеет обратную ($\det M \neq 0$), студенты получают уравнение относительно λ:

$$\lambda = M^{-1} \cdot \left[d - C\int_0^T f(t)\,dt - C\int_0^T A(t)u(t)\,dt\right]. \qquad (5)$$

Решение обратной задачи (3), (4) — пару $\{\lambda^*, u^*(t)\}$ студенты ищут по следующему алгоритму. За начальное приближение берется $\lambda^{(0)} = M^{-1} \cdot \left[d - C\int_0^T f(t)\,dt\right]$ и $u^{(0)}(t)$ — являющееся решением задачи Коши (3) при $\lambda = \lambda^{(0)}$.

После подстановки $u^{(0)}(t)$ в правую часть уравнения (5) получается:

$$\lambda^{(1)} = M^{-1} \cdot \left[d - C\int_0^T f(t)\,dt - C\int_0^T A(t)u^{(0)}(t)\,dt\right],$$

а $u^{(1)}(t)$ находится как решение задачи Коши (3) при $\lambda = \lambda^{(1)}$.

Продолжая итерационный процесс аналогично изложенному, по известному $\{\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)}(t)\}$ студенты находят следующее приближение $\{\lambda^{(k)}, u^{(k)}(t)\}$.

Достаточные условия сходимости итерационного процесса и однозначной разрешимости задачи (1), (2) студентами устанавливаются путем доказательства следующей теоремы. Приведем ее формулировку и изложим основные фрагменты ее доказательства.

Теорема. Если выполнены условия:

1) для матрицы M существует обратная M^{-1} и $\|A(t)\| \leq \alpha(t)$;

2) $q = \left\|M^{-1}\right\| \cdot \|C\| \cdot \left[e^{\int_0^T \alpha(t)\,dt} - 1 - \int_0^T \alpha(t)\,dt\right] < 1$,

то обратная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4), а следовательно, и эквивалентная ей двухточечная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение и приведенный выше алгоритм сходится.

Доказательство. Так как

$$\lambda^{(k+1)} = M^{-1} \cdot \left[d - C\int_0^T f(t)\,dt - C\int_0^T A(t)u^{(k)}(t)\,dt\right],$$

$$\lambda^{(k)} = M^{-1} \cdot \left[d - C\int_0^T f(t)\,dt - C\int_0^T A(t)u^{(k-1)}(t)\,dt\right], \text{ то}$$

$$\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} = M^{-1} \cdot C\int_0^T A(t)[u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)]dt \text{ и справедлива оценка}$$

$$\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \leq \left\|M^{-1}\right\| \cdot \|C\| \int_0^T \alpha(t)\left\|u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)\right\|dt. \qquad (6)$$

Найдем оценку разности $u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)$.

Так как $u^{(k)}(t) = \int\limits_0^t A(\tau)u^{(k)}(\tau)d\tau + \lambda^{(k)}\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau,$

$u^{(k-1)}(t) = \int\limits_0^t A(\tau)u^{(k-1)}(\tau)d\tau + \lambda^{(k-1)}\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau.$

Тогда для разности имеет место равенство

$$u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t) = \int\limits_0^t A(\tau)\left[u^{(k)}(\tau) - u^{(k-1)}(\tau)\right]d\tau + \left[\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right]\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau.$$

Откуда следует оценка

$$\left\|u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)\right\| \le \int\limits_0^t \alpha(\tau)\left\|u^{(k)}(\tau) - u^{(k-1)}(\tau)\right\|d\tau + \left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|\int\limits_0^t \alpha(\tau)\,d\tau.$$

Используя лемму Гронуолла—Беллмана, получим неравенство

$$\left\|u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)\right\| \le \left(e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} - 1\right)\cdot\left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|. \qquad (7)$$

Из (6) на основе неравенства (7) справедлива оценка

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| \le q\,\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|,$$

$$\text{где } q = \left\|M^{-1}\right\|\cdot\|C\|\cdot\left[e^{\int_0^T \alpha(t)\,dt} - 1 - \int\limits_0^T \alpha(t)\;dt\right].$$

Если $q < 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda^{(k)} = \lambda^*$, $\lim\limits_{k\to\infty}u^{(k)}(t) = u^*(t)$ (равномерно по t на отрезке $[0, T]$).

Следовательно, $\{\lambda^*, u^*(t)\}$ является решением обратной задачи (3), (4). Тогда функция $x^*(t) = \lambda^* + u^*(t)$ будет решением задачи (1), (2).

Доказательство единственности проведем от противного. Пусть $x^*(t)$, $x^{**}(t)$ — два решения задачи (1), (2). Тогда пары $\{\lambda^* = x^*(0),\ u^*(t) = x^*(t) + x^*(0)\}$, $\{\lambda^{**} = x^{**}(0),\ u^{**}(t) = x^{**}(t) + x^{**}(0)\}$ являются решениями задачи (3), (4).

Аналогично оценкам (6), (7) устанавливаются оценки

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\| = \left\|M^{-1}\right\|\cdot\|C\|\int\limits_0^T \alpha(t)\left\|u^*(t) - u^{**}(t)\right\|dt,$$

$$\left\|u^*(t) - u^{**}(t)\right\| \le \left(e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} - 1\right)\cdot\left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\|.$$

Откуда следует неравенство $\|\lambda^* - \lambda^{**}\| \le q\,\|\lambda^* - \lambda^{**}\|$, но в силу условия теоремы $q < 1$, поэтому $\lambda^* = \lambda^{**}$, $\lambda^* = \lambda^{**}$.

Теорема доказана.

Вышеизложенный алгоритм дает удовлетворительное приближение к решению обратных задач для дифференциальных уравнений с параметром вида (3), (4), к которым путем соответствующей замены приводятся краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В дальнейшем данный алгоритм реализуется студентами в виде программы в системе компьютерной математики Mathcad. Приведем несколько таких учебных обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых студентами найдены с использованием Mathcad.

Пример 1. На отрезке [0; 0.5] задана краевая задача

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (\sin t)\cdot y + t^2 + 1,\ t \in (0; 0.5) \tag{8}$$

$$y(0) = 1,\ y(0.5) = 0. \tag{9}$$

Сведя ее к эквивалентной обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, студенты получают

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix}\cdot u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix}\cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2+1 \end{pmatrix},\ u(0) = 0,\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{8$'$}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot u(0.5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9$'$}$$

Для полученной задачи все условия теоремы выполняются: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha(t) = 1$, $q = 0{,}45$, поэтому изложенный выше алгоритм сходится.

Ниже на рис. 1, 2 приведены полученные студентами результаты расчетов.

Поскольку точное решение рассматриваемой задачи найти непросто, для сравнения пунктирной линией приведено ее решение $Y(t)$, полученное конечно-разностным методом (рис. 1, 2).

При этом до сведения студентов доводится тот факт, что условия теоремы не являются необходимыми. Это означает, что итерационная последовательность при невыполнении этих условий может оказаться как расходящейся, так и сходящейся. Для наглядности приведем примеры *2*, *3*.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.2799 \end{pmatrix}$$

$$u(0.001) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.2228 & 0.1046 \\ -0.4348 & 0.2168 \\ -0.6353 & 0.3344 \\ -0.8238 & 0.4558 \\ -1 & 0.5798 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Численное решение задачи (8′), (9′)

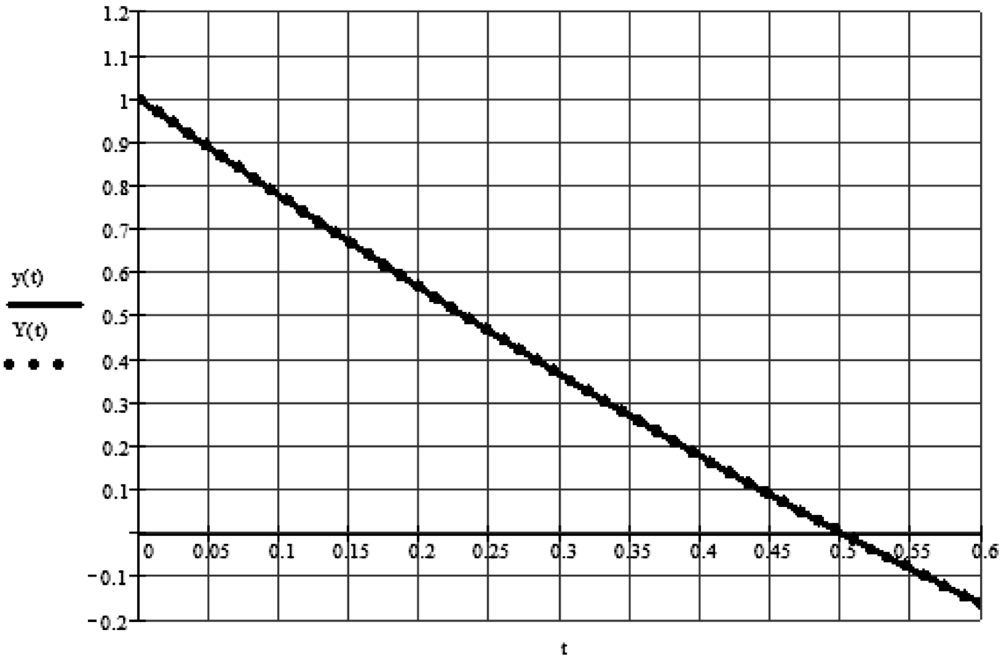


Рис. 2. Графическая интерпретация решения задачи (8), (9)

Пример 2. На отрезке [0; 1] рассматривается краевая задача

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2t \cdot \frac{dy}{dt} - 2 \cdot y = -4 \cdot t,$$

$$y(0) - y'(0) = 0,\ y(1) = 1 + e = 3{,}718,$$

которую можно свести к эквивалентной обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2t \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2t \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \end{pmatrix},\ u(0) = 0,\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+e \end{pmatrix}.$$

Для этой задачи $\alpha(t) = 3$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}333 & 0{,}667 \\ -0{,}667 & 0{,}667 \end{pmatrix}$, $q = 2{,}38$. Видно, что второе условие теоремы 1 для нее не выполняется. Поэтому итерационный процесс, реализованный в программе, расходится.

Пример 3. Для заданной на отрезке [0; 0,5] краевой задачи

$$\frac{d^2z}{dt^2} - a^2 \cdot z = 0,\ t \in (0;\ 0{,}5) \tag{12}$$

$$z(0) = z_0,\ z(0{,}5) = z_1 \qquad (13)$$

даже при невыполнении условий теоремы, итерационная последовательность сходится.

Действительно, осуществляя эквивалентные преобразования, сведем ее к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda,\ u(0) = 0,\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad (12')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0{,}5) = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}. \qquad (13')$$

Возьмем $a = 1$, $z_0 = 0$, $z_1 = 1$. В этом случае $\alpha(t) = 1$. Непосредственные вычисления показывают, что матрица M обратима, но второе условие теоремы не выполняется ($q < 1$). Несмотря на это, итерационная последовательность сходится. Результаты расчетов представлены на рис. 3, 4.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.919 \end{pmatrix}$$

$$u(0.0001) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1922 & 9.6031 \times 10^{-3} \\ 0.3864 & 0.0385 \\ 0.5844 & 0.087 \\ 0.7882 & 0.1556 \\ -1 & 0.2449 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Численное решение задачи (12′), (13′)

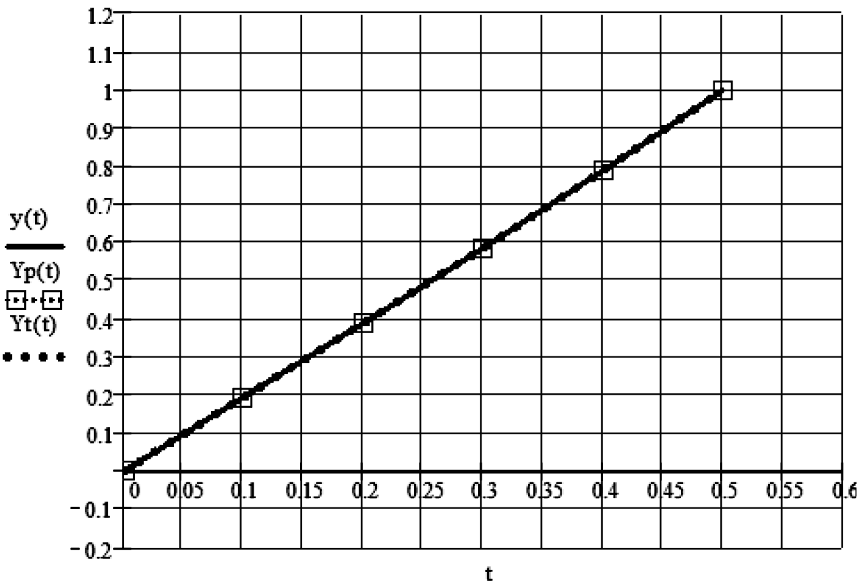


Рис. 4. Графическая интерпретация решения задачи (12), (13)

Здесь для сравнения приближенного решения $y(t)$ задачи (12′), (13′), полученного рассмотренным выше методом, представлено точное решение $Yt(t)$ исходной задачи, а также ее решение $Yp(t)$, полученное конечно-разностным методом.

Как видно из сравнительного анализа решений, предлагаемый алгоритм дает достаточно хорошее приближение к решению обратных задач для системы дифференциальных уравнений с параметром вида (3), (4) и эквивалентной ей системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1), (2) и может с успехом применяться на практике. Использование для реализации вычислительного алгоритма системы компьютерной математики Mathcad позволяет наглядно представить вычислительный алгоритм, понять и проанализировать его, быстро увидеть изменение результатов при изменении данных и наглядно отобразить их графически, что, безусловно, привлекательно. Кроме того, наличие в данной системе большого количества встроенных функций позволяет облегчить его реализацию, не отвлекаясь от сути вычислительного метода, что очень важно в обучении.

Изложим конечно-разностный алгоритм решения еще одной постановки обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, которая рассматривается в процессе обучения студентов обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с неизвестным коэффициентом

$$y'' + a(x)y = 0,\ y = y(x, \alpha),\ y'' = \frac{d^2}{dx^2}y,\ a(x) \in C(-\infty, +\infty);\ x, \alpha \in R, \tag{14}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x, \alpha)|_{x=\alpha} = 1,\ y'(x, \alpha)|_{x=\alpha} = 0. \tag{15}$$

Здесь x — независимая переменная, α — числовой параметр.

По заданной дополнительной информации о решении задачи (14), (15) при фиксированном значении переменной $x = x^*$

$$y(x^*, \alpha) = \varphi(\alpha),\ x^* \text{ — const},\ \alpha \in R \tag{16}$$

требуется восстановить неизвестный коэффициент $a(x)$ и найти решение $y = y(x, \alpha)$.

При рассмотрении данной обратной задачи, до студентов доводятся сведения о том, что уравнение (14), которое в литературе встречается под названием уравнения Хилла [31], используется в геофизике, электродинамике, волновых процессах, гармонических колебаниях и др. Вопросами корректности решения прямой задачи для этого уравнения занимались А.М. Ляпунов, Н.Е. Жуковский, М.Г. Крейн, Ж. Борг, В.М. Старжимский, В.А. Якубович и другие ученые. Единственность и существование решения обратной задачи (14)—(16) исследованы в работе [2].

Конечно-разностный алгоритм нахождения приближенного решения обратной задачи заключается в следующем.

1. Непрерывная область изменения аргументов x, α заменяется дискретным множеством $D(h) = \{(kh, ih): k = \overline{-n, n}, i = \overline{-n, n}\}, h > 0$. В узлах (k, i), $k, i = \overline{-n, n}$ введенной области $D(h)$ определяются сеточные функции целочисленных аргументов $v(k, i) = v_k^i$, $a(k) = a_k$, $\varphi(i) = \varphi_i$. И значения функций $y(x_k, \alpha_i)$, $a(x_k)$, $\varphi(\alpha_i)$ в них заменяются соответствующими значениями сеточных функций v_k^i, a_k, φ_i.

2. Соотношения (14)—(16) заменяются разностным аналогом

$$\frac{v_{k+1}^i - 2v_k^i + v_{k-1}^i}{h^2} + a_k v_k^i = 0, (i, k) \in D(h), \tag{17}$$

$$v_i^i = 1, i = \overline{-n, n}, \tag{18}$$

$$\frac{v_{i+1}^i - v_{i-1}^i}{2t} = 0, i = \overline{-n+1, n-1}, \tag{19}$$

$$v_i^i = \overline{\varphi}_i, i = \overline{-n, n}, \tag{20}$$

из которых требуется определить входящие в него неизвестные сеточные функции $\{v_k^i\}$, $\{a_k\}$, $k, i = \overline{-n, n}$.

Ниже представлен вычислительный алгоритм их нахождения.

Введем обозначение: $2 - a_k h^2 = c_k$. Положив в (17) $i = k$, и, учитывая (18), (19), определим выражения для c_k при

$$k < 0: c_k = 2v_{k+1}^k \text{ и} \tag{21}$$

$$k > 0: c_k = 2v_{k-1}^k. \tag{22}$$

Рассмотрим случай $k > 0$. Полагая в (22) $i = k = 1$, найдем $c_1 = 2\varphi_1$.

При $i = k = 2$ имеем $c_2 = 2v_1^2$, где v_1^2 определяется из соотношений (17)—(18) при $i = 2$, $k = 1$

$$\begin{cases} v_0^2 - c_1 v_1^2 + v_2^2 = 0, \\ v_0^2 = \overline{\varphi}_2, \ v_2^2 = 1. \end{cases}$$

Для определения каждого из следующих значений c_k, $k = \overline{3, n}$ необходимо предварительно найти v_k^i, $i = \overline{3, n}$, $k = \overline{1, i-1}$. Для этого имеем трехточечные задачи с краевыми условиями, которые могут быть решены методом прогонки:

$$\begin{cases} v_{k+1}^i - c_k v_k^i + v_{k-1}^i = 0, \\ v_0^i = \varphi_i, \quad v_i^i = 1, \\ i = \overline{3, n}, \quad k = \overline{1, i-1}. \end{cases}$$

Аналогично могут быть найдены и значения c_k при $k < 0$. Это потребует предварительного определения v_k^i, $i = \overline{-1, -n}$, $k = \overline{-1, i-1}$.

Для нахождения c_0 может быть использовано соотношение $a_0 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi'(x)}{x}$, представленное в терминах сеточной функции $_i$: $a_0 = \dfrac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2}$, или же интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов.

Чтобы определить значения функции v_k^i в оставшейся области, следует воспользоваться выражением (17), предварительно преобразовав к виду

$$v_{k+1}^i = c_k v_k^i - v_{k-1}^i,\ k = \overline{0, n-1},\ i = \overline{-n, k-1},$$

$$v_{k-1}^i = c_k v_k^i - v_{k-1}^i,\ k = \overline{-n+1, 0},\ i = \overline{k+1, n}.$$

Построенный алгоритм дает удовлетворительное приближение $\{a_k\}$ к истинному значению коэффициента $a(x)$, а сеточная функция $\{v_k^i\}$, k, $i = \overline{-n, n}$ достаточно хорошо аппроксимирует непрерывную функцию $y(x, \alpha)$.

Вопрос о сходимости разностной схемы остается пока открытым.

Результаты расчетов при $a(x) = -4$, $h = 0{,}2$, $n = 5$ представлены на рис. 5, 6.

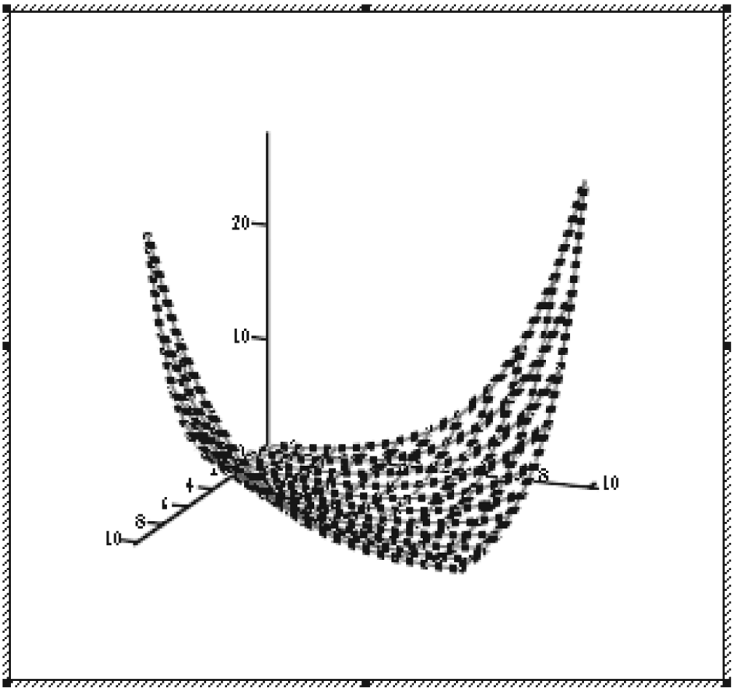
u =

	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
–5	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287	18.313	27.308
–4	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287	18.313
–3	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287
–2	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253
–1	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557
0	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762
1	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577
2	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811
3	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337
4	18.313	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081
5	27.308	18.313	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1

λ =

	–5
–5	–4.054
–4	–4.054
–3	–4.054
–2	–4.054
–1	–4.054
0	–4.054
1	–4.054
2	–4.054
3	–4.054
4	–4.054
5	–4.054

Рис. 5. Результаты численного решения задачи (14)—(16)



y, u

Рис. 6. Графическая интерпретация численного решения задачи (14)—(16)

Приближенное решение на рис. 6 представлено пунктирной линией (черного цвета), точное решение — сплошной (зеленой) линией. Точность при необходимости можно повысить путем уменьшения шага h.

В процессе обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений студенты овладевают математическими методами решения различных задач определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, начальных условий по некоторым известным функционалам его решения, осмысливают методологию исследования неизвестных свойств объектов и явлений, опирающуюся на принципы организации теоретических и практических исследований. Такой подход к обучению обратным задачам способствует расширению мировоззрения студентов, которые осознают взаимопроникновение и взаимообогащение научных методов, подходов и приемов, разработанных в разных областях знаний. Достижение полноценного результата в обучении обратным задачам возможно при условии применения конкретных методов их решения. В этом случае решение обратных задач выступает и как цель, и как средство обучения. Этот вид учебной деятельности студентов служит средством формирования и развития прикладной математической культуры; способствует глубокому и прочному усвоению сложных определений, понятий, методов и подходов, используемых при решении обратных задач; способствует формированию умений и навыков исследования обратных задач; создает условия для осуществления профессиональной ориентации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бидайбеков Е.Ы.* Об обратных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений // Математические заметки. — 1979. — Т. 26. — Вып. 1. — С. 53–59.

[2] *Бидайбеков Е.Ы.* О некоторых обратных задачах для линейных дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. — 1981. — № 1. — С. 15–22.

[3] *Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений как компонент вычислительной информатики в системе подготовки будущих учителей информатики // Обратные и некорректные задачи математической физики: Тезисы международной конференции, посвященной 75-летию академика М.М. Лаврентьева (20—25 августа 2007 г., г. Новосибирск, Россия). — URL: http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/main.html

[4] *Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б.* О содержании курса «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» в подготовке будущих учителей информатики // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». — 2008. — № 4 (24). — С. 54–61.

[5] *Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Джумабаева Д.Д.* Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений сведением к обратным задачам // Вестник АГУ. Серия физико-математическая. — 2002. — № 1 (5). — С. 57–63.

[6] *Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б.* Обучение будущих учителей математики и информатики обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2014. — № 3 (29). — С. 57–69.

[7] *Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б., Акимжан Н.Ш.* Экспериментально-педагогическая деятельность при обучении студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. Серия «Физико-математические науки». — Алматы, 2014. — № 3(47). — С. 76–80.

[8] *Голоскоков Д.П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: Учебник для вузов. — СПб.: Питер, 2004. — 539 с.

[9] *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994. — 207 с.
[10] *Джумабаев Д.С.* Сведение краевых задач к задачам с параметром и обоснование метода стрельбы // Известия АН КазССР, 1978. — № 5. — С. 34–40.
[11] *Дьяконов В.П.* Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. — М.: ДМК Пресс, 2014. — 800 с.
[12] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи: Учебник. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008. — 460 с.
[13] *Корнилов В.С.* Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: Учеб. пособие. — М.: МГПУ, 2005. — 359 с.
[14] *Корнилов В.С.* Компьютерные математические пакеты в курсе «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» как дидактическое средство обучения // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2005. — № 1 (4). — С. 114–122.
[15] *Корнилов В.С.* Реализация дидактических принципов обучения при использовании образовательных электронных ресурсов в курсе «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». –2006. — № 1 (3). — С. 40–44.
[16] *Корнилов В.С.* Образовательные электронные ресурсы в обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений // Электронные образовательные издания и ресурсы. Теория и практика: Бюллетень Центра информатики и информационных технологий в образовании Института содержания и методов обучения Российской академии образования. — М.: ИСМО РАО, 2006. — Вып. 1. — С. 30–36.
[17] *Корнилов В.С.* Обучение обратным задачам для дифференциальных уравнений как фактор гуманитаризации математического образования: Монография. — М.: МГПУ, 2006. — 320 с.
[18] *Корнилов В.С.* Использование компьютерных систем в обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2007. — № 2 (9). — С. 131–132.
[19] *Корнилов В.С.* Информатизация обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2008. — № 1 (11). — С. 98–100.
[20] *Корнилов В.С.* История развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений — составляющая гуманитарного потенциала обучения прикладной математике // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2009. — № 1 (17). — С. 108–113.
[21] *Корнилов В.С.* Методические аспекты обучения студентов вузов обратным задачам для дифференциальных уравнений // Бюллетень лаборатории математического, естественно-научного образования и информатизации. Рецензируемый сборник научных трудов. — Воронеж: Научная книга, 2012. — Т. I. — С. 44–51.
[22] *Корнилов В.С.* Обратные задачи в содержании обучения прикладной математике // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». — 2014. — № 2. — С. 109–118.
[23] *Корнилов В.С.* Обучение студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений как фактор формирования компетентности в области прикладной математики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». — 2015. — № 1. — С. 63–72.
[24] *Корчагина Е.В.* Обратная задача вариационного исчисления для обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 2003. — 113 с.
[25] *Макаров Е.* Инженерные расчеты В Mathcad 15: Учебный курс. — СПб.: Питер, 2011. — 400 с.

[26] *Романов В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. — Новосибирск: НГУ, 1973. — 252 с.
[27] *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984. — 264 с.
[28] *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. — М.: Научный мир, 2005. — 304 с.
[29] *Сизиков В.С.* Обратные прикладные задачи и MatLab: учебник для студентов вузов. — СПб.: Лань, 2011. — 251 с.
[30] *Сирота Ю.М.* Обратная задача дискретно-группового анализа линейных дифференциальных уравнений: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — СПб., 2004. — 94 с.
[31] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974. — Т. 3. — Ч. 2. — 674 с.
[32] *Тимофеев Ю.М., Поляков А.В.* Математические аспекты решения обратных задач атмосферной оптики: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2001. — 188 с.
[33] *Bidaybekov E.I., Kornilov V.S., Kamalova G.B.* Inverse Problems for differential equations in education // Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS-2014): Abstracts of the 7th International conference» (Fethiye, Turkey, May 26—31, 2014). — Fethiye, Turkey, 2014. — P. 69.
[34] *Хромова Г.В.* Об обратной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4. — Выпуск 2. — С. 709–716.
[35] *Худяков В.Ф., Хабузов В.А.* Моделирование источников вторичного электропитания в среде MATLAB 7.x: Учеб. пособие. — СПб.: ГУАП, 2008. — 332 с.
[36] *Черепенников В.Б.* Обратная начальная задача для некоторых линейных систем дифференциально-разностных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2004. — № 6 (505). — С. 59–71.
[37] *Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э.* Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. — М.: И.Д. Вильямс, 2008. — 1097 с.
[38] Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных уравнений с запаздыванием // Сб. науч. тр. Механика. Математика. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. — С. 90–93.

LITERATURA

[1] *Bidajbekov E.Y.* Ob obratnyh zadachah dlja obyknovennyh differencial’nyh uravnenij // Matematicheskie zametki. — 1979. — T. 26. — Vyp. 1. — S. 53–59.
[2] *Bidajbekov E.Y.* O nekotoryh obratnyh zadachah dlja linejnyh differencial’nyh uravnenij // Izvestija AN KazSSR. Serija fiziko-matematicheskaja. — 1981. — № 1.
[3] *Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B.* Obratnye zadachi dlja differencial’nyh uravnenij kak komponent vychislitel’noj informatiki v sisteme podgotovki budushhih uchitelej informatiki // Obratnye i nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki: Tezisy mezhdunarodnoj konferencii, posvjashhennoj 75-letiju akademika M.M. Lavrent’eva (20—25 avgusta 2007 g., g. Novosibirsk, Rossija). — URL: http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/main.html
[4] *Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B.* O soderzhanii kursa «Obratnye zadachi dlja differencial’nyh uravnenij» v podgotovke budushhih uchitelej informatiki // Vestnik KazNPU im. Abaja. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki». — 2008. — № 4 (24). — S. 54–61.
[5] *Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B., Dzhumabaeva D.D.* Reshenie kraevyh zadach dlja obyknovennyh differencial’nyh uravnenij svedeniem k obratnym zadacham // Vestnik AGU. Serija fiziko-matematicheskaja. — 2002. — № 1 (5). — S. 57–63.
[6] *Bidajbekov E.Y., Kornilov V.S., Kamalova G.B.* Obuchenie budushhih uchitelej matematiki i informatiki obratnym zadacham dlja differencial’nyh uravnenij // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2014. — № 3 (29). — S. 57–69.
[7] *Bidajbekov E.Y., Kornilov V.S., Kamalova G.B., Akimzhan N.Sh.* Jeksperimental’no-pedagogicheskaja dejatel’nost’ pri obuchenii studentov obratnym zadacham dlja differencial’nyh uravnenij // Vestnik Kazahskogo nacional’nogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaja. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki». — Almaty, 2014. — № 3(47). — S. 76–80.

[8] *Goloskokov D.P.* Uravnenija matematicheskoj fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple: Uchebnik dlja vuzov. — SPb.: Piter, 2004. — 539 s.
[9] *Denisov A.M.* Vvedenie v teoriju obratnyh zadach: Ucheb. posobie. — M.: Izd-vo MGU im. M.V. Lomonosova, 1994. — 207 s.
[10] *Dzhumabaev D.S.* Svedenie kraevyh zadach k zadacham s parametrom i obosnovanie metoda strel'by // Izvestija AN KazSSR, 1978. — № 5. — S. 34–40.
[11] *D'jakonov V.P.* Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskih raschetah. — M.: DMK Press, 2014. — 800 s.
[12] *Kabanihin S.I.* Obratnye i nekorrektnye zadachi: Uchebnik. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2008. — 460 s.
[13] *Kornilov V.S.* Nekotorye obratnye zadachi identifikacii parametrov matematicheskih modelej: Ucheb. posobie. — M.: MGPU, 2005. — 359 s.
[14] *Kornilov V.S.* Komp'juternye matematicheskie pakety v kurse «Obratnye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij» kak didakticheskoe sredstvo obuchenija // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2005. — № 1 (4). — S. 114–122.
[15] *Kornilov V.S.* Realizacija didakticheskih principov obuchenija pri ispol'zovanii obrazovatel'nyh jelektronnyh resursov v kurse «Obratnye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij» // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Serija «Informatizacija obrazovanija». — 2006. — № 1 (3). — S. 40–44.
[16] *Kornilov V.S.* Obrazovatel'nye jelektronnye resursy v obuchenii obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij // Jelektronnye obrazovatel'nye izdanija i resursy. Teorija i praktika: Bjulleten' Centra informatiki i informacionnyh tehnologij v obrazovanii Instituta soderzhanija i metodov obuchenija Rossijskoj akademii obrazovanija. — M.: ISMO RAO, 2006. — Vyp. 1. — S. 30–36.
[17] *Kornilov V.S.* Obuchenie obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij kak faktor gumanitarizacii matematicheskogo obrazovanija: Monografija. — M.: MGPU, 2006. — 320 s.
[18] *Kornilov V.S.* Ispol'zovanie komp'juternyh sistem v obuchenii obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2007. — № 2 (9). — S. 131–132.
[19] *Kornilov V.S.* Informatizacija obuchenija obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2008. — № 1 (11). — S. 98–100.
[20] *Kornilov V.S.* Istorija razvitija teorii obratnyh zadach dlja differencial'nyh uravnenij — sostavljajushhaja gumanitarnogo potenciala obuchenija prikladnoj matematike // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Serija «Informatika i informatizacija obrazovanija». — 2009. — № 1 (17). — S. 108–113.
[21] *Kornilov V.S.* Metodicheskie aspekty obuchenija studentov vuzov obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij // Bjulleten' laboratorii matematicheskogo, estestvenno-nauchnogo obrazovanija i informatizacii. Recenziruemyj sbornik nauchnyh trudov. — Voronezh: Nauchnaja kniga, 2012. — T. I. — S. 44–51.
[22] *Kornilov V.S.* Obratnye zadachi v soderzhanii obuchenija prikladnoj matematike // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Serija «Informatizacija obrazovanija». — 2014. — № 2. — S. 109–118.
[23] *Kornilov V.S.* Obuchenie studentov obratnym zadacham dlja differencial'nyh uravnenij kak faktor formirovanija kompetentnosti v oblasti prikladnoj matematiki // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Serija «Informatizacija obrazovanija». — 2015. — № 1. — S. 63–72.
[24] *Korchagina E.V.* Obratnaja zadacha variacionnogo ischislenija dlja obyknovennogo differencial'nogo uravnenija shestogo porjadka: Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. — Voronezh, 2003. — 113 s.
[25] *Makarov E.* Inzhenernye raschety V Mathcad 15: Uchebnyj kurs. — SPb.: Piter, 2011. — 400 s.
[26] *Romanov V.G.* Obratnye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij. — Novosibirsk: NGU, 1973.— 252 s.
[27] *Romanov V.G.* Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki. — M.: Nauka, 1984. — 264 s.

[28] *Romanov V.G.* Ustojchivost' v obratnyh zadachah. — M.: Nauchnyj mir, 2005. — 304 s.
[29] *Sizikov V.S.* Obratnye prikladnye zadachi i MatLab: uchebnik dlja studentov vuzov. — SPb.: Lan', 2011. — 251 s.
[30] *Sirota Ju.M.* Obratnaja zadacha diskretno-gruppovogo analiza linejnyh differencial'nyh uravnenij: Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. — SPb., 2004. — 94 s.
[31] *Smirnov V.I.* Kurs vysshej matematiki. — M.: Nauka, 1974. — T. 3. — Ch. 2. — 674 s.
[32] *Timofeev Ju.M., Poljakov A.V.* Matematicheskie aspekty reshenija obratnyh zadach atmosfernoj optiki: Ucheb. posobie. — SPb.: Izd-vo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2001. — 188 s.
[33] *Bidaybekov E.I., Kornilov V.S., Kamalova G.B.* Inverse Problems for differential equations in education // Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS-2014): Abstracts of the 7th International conference» (Fethiye, Turkey, May 26—31, 2014). — Fethiye, Turkey, 2014. — P. 69.
[34] *Hromova G.V.* Ob obratnoj zadache dlja obyknovennogo differencial'nogo uravnenija // Fundamental'naja i prikladnaja matematika. — 1998. — T. 4. — Vyp. 2. — S. 709–716.
[35] *Hudjakov V.F., Habuzov V.A.* Modelirovanie istochnikov vtorichnogo jelektropitanija v srede MATLAB 7.x: Ucheb. posobie. — SPb.: GUAP, 2008. — 332 s.
[36] *Cherepennikov V.B.* Obratnaja nachal'naja zadacha dlja nekotoryh linejnyh sistem differencial'no-raznostnyh uravnenij // Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika. — 2004. — № 6 (505). — S. 59–71.
[37] *Jedvards Ch.G., Penni D.Je.* Differencial'nye uravnenija i kraevye zadachi: modelirovanie i vychislenie s pomoshh'ju Mathematica, Maple i MATLAB. — M.: I.D. Vil'jams, 2008. — 1097 s.
[38] *Jurko V.A.* Obratnaja zadacha dlja differencial'nyh uravnenij s zapazdyvaniem // Sb. nauch. tr. Mehanika. Matematika. — Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2012. — S. 90–93.

USING COMPUTER TECHNOLOGIES IN TRAINING STUDENTS OF HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS TO THE INVERSE PROBLEMS FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

E.Y. Bidaybekov[1], V.S. Kornilov[2], G.B. Kamalova[1], N.Sh. Akimzhan[1]

[1] Chair of informatics and informatization of aducation
Kazakh national pedagogical university Abai
Tole bi str, 86, Almaty, Kazakhstan, 050012
[2] Computer Science and Applied Mathematics Chair
Moscow City Pedagogical University
Sheremetjevskaya str., 29, Moscow, Russia, 127521

In article methodical aspects of training of students of physical and mathematical and natural-science specialties in the inverse problems for the ordinary differential equations are stated. Algorithms of the solution of some statements of the inverse problems for the ordinary differential equations which are included into the content of such training are given. Results of calculations of numerical solutions of the corresponding inverse problems are given in system of computer mathematics of Mathcad.

Key words: training in the inverse problems for the ordinary differential equations, computer technologies, system of computer mathematics of Mathcad, a numerical method of the solution of the inverse problems for the ordinary differential equations, the student.