



**ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ.  
СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ**

**2021 Том 22 № 3**

**DOI: 10.22363/2312-8143-2021-22-3**

**<http://journals.rudn.ru/engineering-researches>**

**Научный журнал**

**Издается с 2000 г.**

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

**Свидетельство о регистрации** ПИ № ФС 77-61174 от 30.03.2015 г.

**Учредитель:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

---

**Главный редактор**

**Разумный Юрий Николаевич** – доктор технических наук, профессор, директор Инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

**Заместитель главного редактора**

**Резник Сергей Васильевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой СМ-13 «Ракетно-космические композитные конструкции» факультета «Специальное машиностроение», Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**Ответственный секретарь**

**Агасиева Светлана Викторовна** – кандидат технических наук, доцент кафедры нанотехнологий и микросистемной техники Инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

**Члены редакционной коллегии**

**Азравал Бридж** – профессор, Военно-морская школа, Монтерей, США

**Алифанов Олег Михайлович** – академик РАН, доктор технических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

**Варатараджу Ренугант** – профессор, Университет Путра Малайзия, Серданг, Малайзия

**Василе Массимилиано Л.** – профессор, Университет Стратклайда, Глазго, Великобритания

**Вивiani Антонио** – профессор, Университет Кампани «Луиджи Ванвительли», Неаполь, Италия

**Гасбарри Паоло** – профессор, Римский университет «Ла Сапиенца», Рим, Италия

**Герман Анна** – профессор, Университет Бейра Интериор, Ковильян, Португалия

**Гитас Иоаннис Зоис** – профессор, Университет Аристотеля в Салониках, Салоники, Греция

**Грациани Филиппо** – почетный профессор, Римский университет «Ла Сапиенца», Рим, Италия

**Гурфил Пини** – профессор, Израильский технологический институт, Хайфа, Израиль

**Джеа Мороба** – доцент, Техасский университет в Остине, Остин, США

**Дженета Джанкарло** – профессор, Туринский политехнический институт, Турин, Италия

**Кавагути Дзюнъитиро** – профессор, Японское агентство аэрокосмических исследований, Токио, Япония

**Кадугин Владимир Тимофеевич** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**Капустин Владимир Михайлович** – доктор технических наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина, Москва, Россия

**Кузнецов Николай Борисович** – профессор, Геологический институт РАН, Москва, Россия

**Линарес Ричард** – профессор, Массачусетский технологический институт, Кембридж, США

**Матюшин Максим Михайлович** – доктор технических наук, Центр управления полетами АО «ЦНИИмаш» ГК «Роскосмос», Королев, Россия

**Медведев Андрей Всеволодович** – доктор физико-математических наук, член-корреспондент СО РАН, Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия

**Мисра Арун** – профессор, Университет Макгилла, Монреаль, Канада

**Мортари Даниэле** – профессор, Техасский университет A&M, Колледж-Стейшн, США

**Мохаммед Сейду О.** – профессор, Национальное агентство по космическим исследованиям и развитию, Абуджа, Нигерия

**Палмерини Джованни** – профессор, Римский университет «Ла Сапиенца», Рим, Италия

**Петухов Вячеслав Георгиевич** – доктор технических наук, член-корреспондент РАН, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

**Попков Юрий Соломонович** – академик РАН, доктор технических наук, профессор, Институт системного анализа ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

**Попов Гарри Алексеевич** – академик РАН, доктор технических наук, профессор, директор Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики, Москва, Россия

**Прадо Антонио** – профессор, Национальный институт космических исследований, Сан-Жозе-дус-Кампус, Бразилия

**Редько Иван Яковлевич** – доктор технических наук, профессор, АО «Энергетический институт имени Г.М. Кржижановского», Москва, Россия

**Спенсер В. Дэвид** – профессор, Университет штата Пенсильвания, Университи-Парк, США

**Фурфаро Роберто** – профессор, Университет Аризоны, Тусон, США

**Челани Фабио** – профессор, Римский университет «Ла Сапиенца», Рим, Италия

**Черн Рок Ченг-Шинг** – профессор, Университет Райерсона, Торонто, Канада

**Ясака Тэцуо** – почетный профессор, Университет Кюсю, Фукуока, Япония

**ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ.  
СЕРИЯ: ИНЖЕНЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ**

**ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)**

Периодичность: 4 выпуска в год (ежеквартально).

Сайт журнала: <http://journals.rudn.ru/engineering-researches> (открытый доступ).

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, DOAJ, Ulrich's Periodicals Directory, Cyberleninka, Google Scholar, WorldCat, East View, Dimensions, EBSCOhost.

**Цель и тематика**

Журнал «Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования» – периодическое международное рецензируемое научное издание в области информатики, вычислительной техники и управления, авиационной и ракетно-космической техники, наук о земле. Журнал является международным по составу редакционной коллегии, авторам и тематике публикаций. В журнале публикуются результаты оригинальных научных исследований российских и зарубежных ученых.

Цели журнала:

- содействие развитию российских и зарубежных инженерных школ;
- продвижение и внедрение в практику современных перспективных разработок в указанных областях;
- научный обмен и сотрудничество между учеными.

Журнал адресован научным работникам, инженерам, аспирантам. Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России.

Выпуски журнала в полнотекстовом виде, правила оформления статей и дополнительная информация размещены на сайте <http://journals.rudn.ru/engineering-researches>

Редколлегия журнала строго придерживается международных стандартов публикационной этики, сформулированных в документе COPE (Committee on Publication Ethics): <http://publicationethics.org>

---

Редактор *Ю.А. Заикина*  
Компьютерная верстка: *Ю.А. Заикина*

**Адрес редакции:**

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
Тел.: +7 (495) 955-07-16; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

**Адрес редакционной коллегии журнала «Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования»:**

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
Тел.: +7 (495) 955-07-92; e-mail: [engj@rudn.ru](mailto:engj@rudn.ru)

---

Подписано в печать 15.02.2022. Выход в свет 22.02.2022. Формат 60×84/8.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman».  
Усл. печ. л. 8,83. Тираж 500 экз. Заказ № 615. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН  
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
Тел.: +7 (495) 955-08-74; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)



## RUDN JOURNAL OF ENGINEERING RESEARCHES

2021 Volume 22 Number 3

DOI: 10.22363/2312-8143-2021-22-3

<http://journals.rudn.ru/engineering-researches>

Founded in 2000

Founder: Peoples' Friendship University of Russia

---

### Editor-in-Chief

*Yury N. Razumny* – Professor, Director of the Academy of Engineering, Director of the Department of Mechanics and Mechatronics of the Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

### Associate Editor-in-Chief

*Sergey V. Reznik* – Professor, Head of the Department SM-13 “Composite Materials for Aerospace” of the Special Machinery Faculty, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

### Assistant to the Editor-in-Chief

*Svetlana V. Agasieva* – Associate Professor of the Department of Nanotechnology and Microsystem Engineering of the Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

### Editorial Board

*Brij Agrawal* – Professor, Naval Postgraduate School, Monterey, USA

*Oleg M. Alifanov* – Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

*Fabio Celani* – Professor, Sapienza University of Rome, Rome, Italia (

*Rock Jeng-Shing Chern* – Professor, Ryerson University, Toronto, Canada

*Roberto Furfaro* – Professor, University of Arizona, Tucson, USA

*Paolo Gasbarri* – Professor, Sapienza University of Rome, Rome, Italia

*Giancarlo Genta* – Professor, Polytechnic University of Turin, Turin, Italia

*Ioannis Zois Gitas* – Professor, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, Greece

*Filippo Graziani* – Full Professor, Sapienza University of Rome, Rome, Italia

*Anna Guerman* – Professor, University of Beira Interior, Covilhã, Portugal

*Pini Gurfil* – Full Professor, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel

*Moriba Jah* – Associate Professor, University of Texas at Austin, Austin, USA

*Vladimir T. Kalugin* – Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*Vladimir M. Kapustin* – Professor, National University of Oil and Gas “Gubkin University” (Gubkin University), Moscow, Russia

*Junichiro Kawaguchi* – Professor, Japan Aerospace Exploration Agency, Tokyo, Japan

*Nikolay B. Kuznetsov* – Professor, Geological Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Richard Linares* – Professor, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA

*Maxim M. Matyushin* – Dr. (Technical Sciences), JSC “Central Research Institute for Machine Building” (JSC “TsNIIMash”), Korolev, Russia

*Andrey V. Medvedev* – Dr. (Physical and Mathematical Sciences), corresponding member of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Institute of Solar-Terrestrial Physics, Irkutsk, Russia

*Arun Misra* – Professor, McGill University, Montreal, Canada

*Seidu O. Mohammed* – Professor, National Space Research and Development Agency, Abuja, Nigeria

*Daniele Mortari* – Professor, Texas A&M University, College Station, USA

*Giovanni Palmerini* – Professor, Sapienza University of Rome, Rome, Italia

*Vyacheslav G. Petukhov* – Dr. (Technical Sciences), corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

*Yury S. Popkov* – Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Harri A. Popov* – member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Director of the Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

*Antonio Prado* – Professor, National Institute for Space Research, Sao Jose dos Campos, Brazil

*Ivan Y. Redko* – Professor, JSC “Krzhizhanovsky Energy Institute”, Moscow, Russia

*David B. Spencer* – Professor, Pennsylvania State University, University Park, USA

*Renuganth Varatharajoo* – Professor, University Putra Malaysia, Seri Kembangan, Malaysia

*Massimiliano L. Vasile* – Professor, University of Strathclyde, Glasgow, United Kingdom

*Antonio Viviani* – Professor, University of Campania Luigi Vanvitelli, Naples, Italy

*Tetsuo Yasaka* – Professor Emeritus, Kyushu University, Fukuoka, Japan

**RUDN JOURNAL OF ENGINEERING RESEARCHES**  
**Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)**

**ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)**

Publication frequency: quarterly.

Journal homepage: <http://journals.rudn.ru/engineering-researches> (Open Access).

Languages: Russian, English.

Indexed by Russian Index of Science Citation, DOAJ, Ulrich's Periodicals Directory, Cyberleninka, Google Scholar, WorldCat, East View, Dimensions, EBSCOhost.

### **Aims and Scope**

The RUDN Journal of Engineering Researches – is a peer-reviewed international academic journal publishing research in the field of computer science, computer engineering and control, aviation and space technology, earth sciences. The journal is international in terms of the composition of the editorial board, authors and topics of publications. The journal publishes the results of original scientific research by Russian and foreign scientists.

The aims of the journal:

- assistance in the development of Russian and foreign engineering schools;
- promotion and implementation into practice of modern advanced technologies in these areas;
- scientific exchange and collaboration between scientists.

The journal is addressed to researchers, engineers, graduate students. Included in the List of the Leading Scientific Journals and Editions of the Highest Certification Committee of the Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral theses are to be published.

The journal website operates on the Portal of RUDN University scientific journals <http://journals.rudn.ru/engineering-researches> and contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

Editorial Board strictly adheres to the international standards of publication ethics of the COPE: <http://publicationethics.org>

---

Copy Editor *Iu.A. Zaikina*  
Layout Designer *Iu.A. Zaikina*

**Address of the editorial board:**

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation  
Ph.: +7 (495) 955-07-16; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

**Address of the editorial board of RUDN Journal of Engineering Researches:**

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation  
Ph.: +7 (495) 955-07-92; e-mail: [engj@rudn.ru](mailto:engj@rudn.ru)

---

Printing run 500 copies. Open price.

Peoples' Friendship University of Russia  
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

**Printed at RUDN Publishing House:**

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation  
Ph.: +7 (495) 955-08-74; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Старков А.В., Емельянов А.А., Гришанцева Л.А., Жуковская К.И., Морозов А.А., Тришин А.А.</b> Методология управления потоками целевой информации в космической системе дистанционного зондирования Земли. Часть 3. Результаты применения .....	247
<b>Шмигирилов С.Ю.</b> Методология использования методов многокритериального анализа на примере выбора оптимальной архитектуры космического сегмента ГЛОНАСС .....	261
<b>Малинина Н.Л.</b> Обоснование введения дискретно-непрерывной топологии в интересах алгоритмизации сложных процессов функционирования .....	270
<b>Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.</b> Алгебраические поверхности для судовых корпусов .....	283
<b>Зверяев Е.М.</b> Температурная деформация длинной упругой полосы .....	293
<b>Иванова Е.С., Иванова Ю.Н.</b> Минералого-петрографическая характеристика вмещающих пород железо-скарнового рудопоявления Первая Рудная Горка, Полярный Урал .....	305

## CONTENTS

<b>Starkova A.V., Emelianov A.A., Grishantseva L.A., Zhukovskaya K.I., Morozov A.A., Trishin A.A.</b> Methodology for managing the flows of target information in the remote sensing space system. Part 3. Application results .....	247
<b>Shmigirilov S.Yu.</b> The methodology of using multicriteria analysis methods choosing the optimal architecture of the GLONASS space segment .....	261
<b>Malinina N.L.</b> Argumentation of introducing a discrete-continuous topology in the interests of algorithmization of complex functioning processes .....	270
<b>Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.</b> Analytical surfaces for ship hulls .....	283
<b>Zveryaev E.M.</b> Thermal deformation of a long elastic strip .....	293
<b>Ivanova E.S., Ivanova J.N.</b> Mineralogical and petrographic characteristics of the host rocks of the Pervaya Rudnaya Gorka Fe-skarn ore occurrence .....	305



DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-247-260  
УДК 629.78

Научная статья / Research article

## Методология управления потоками целевой информации в космической системе дистанционного зондирования Земли. Часть 3. Результаты применения

А.В. Старков <sup>a</sup>✉, А.А. Емельянов <sup>b</sup>, Л.А. Гришанцева <sup>c</sup>,  
К.И. Жуковская <sup>c</sup>, А.А. Морозов <sup>c</sup>, А.А. Тришин <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

<sup>b</sup>Научно-исследовательский институт точных приборов, Москва, Россия

<sup>c</sup>Научный центр оперативного мониторинга Земли, Москва, Россия

✉ starkov@goldstar.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 13 июля 2021 г.

Доработана: 22 сентября 2021 г.

Принята к публикации: 13 октября 2021 г.

### Ключевые слова:







дистанционное зондирование Земли, обработка данных, информационные потоки, результаты отработки, показатели эффективности, пункты приема информации, наземный комплекс приема, алгоритмы обработки информации, алгоритмы распределения информации

**Аннотация.** Исследование посвящено вопросам практической реализации представленной методологии управления потоками целевой информации в космической системе дистанционного зондирования Земли. Описаны архитектура и порядок применения программно-математических моделей комплекса, которые реализуют предложенную ранее модель организации потоков целевой информации и обеспечивают возможность определения состава и характеристик системы, включающей в себя космические аппараты, наземные приемные комплексы и каналы связи между ними, формирование сценариев работы с данными дистанционного зондирования Земли, формирование входных потоков информации, проведение расчетов по распределению целевой информации с разнотипных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли по составным частям космической системы дистанционного зондирования Земли, визуализацию результатов расчетов и сохранение полученных результатов. Это позволяет оптимизировать распределение процессов обработки информации по заявкам потребителей, используя как скалярный, так и векторный критерии, автоматизировать формирование плана распределения обработки заявок потребителей по узлам системы, проводить оценку текущего состояния инфраструктуры с точки зрения возможностей обработки заявок потребителей и выявлять возможные проблемы в будущем.

### Для цитирования

Старков А.В., Емельянов А.А., Гришанцева Л.А., Жуковская К.И., Морозов А.А., Тришин А.А. Методология управления потоками целевой информации в космической системе дистанционного зондирования Земли. Часть 3. Результаты применения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 247–260. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-247-260>


## Methodology for managing the flows of target information in the remote sensing space system. Part 3. Application results

Alexander V. Starkova <sup>a</sup>, Andrey A. Emelianov <sup>b</sup>, Lyubov A. Grishantseva <sup>c</sup>,  
Ksenia I. Zhukovskaya <sup>c</sup>, Alexander A. Morozov <sup>c</sup>, Alexey A. Trishin <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

<sup>b</sup>Research Institute of Precision Instruments, Moscow, Russia

<sup>c</sup>Research Center for Earth Operative Monitoring, Moscow, Russia

 starkov@goldstar.ru

### Article history

Received: July 13, 2021

Revised: September 22, 2021

Accepted: October 13, 2021

### Keywords:

remote sensing of the Earth, data processing, distribution of information resources, application results, efficiency, information reception points, ground-based information reception and distribution complex

**Abstract.** The article focuses on the practical implementation of the proposed methodology for managing target information flows in the Earth remote sensing (ERS) space system. Proposed is the description of architecture and order of application of software-mathematical models of the complex, which implements the previously presented model of the arrangement of target information flows and provides the possibility of determining composition and characteristics of the system, that includes satellite, ground receiving complexes and communication channels there between, generation of scenarios of operation with ERS data, generation of input information flows, calculation of the distribution of target information from various types of ERS satellite by components of the ERS space system, visualization of calculation results and preservation of the obtained results. This makes it possible to optimize the distribution of information processing processes according to customer requests, using both scalar and vector criteria, automate the formation of a plan for the distribution of customer requests processing among system nodes, assess the current state of infrastructure in terms of the capabilities of processing customer requests and identify possible problems in the future.

### For citation

Starkova AV, Emelianov AA, Grishantseva LA, Zhukovskaya KI, Morozov AA, Trishin AA. Methodology for managing the flows of target information in the remote sensing space system. Part 3. Application results. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3):247–260. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-247-260>

## Введение

В предыдущих статьях данной серии [1; 2] представлены результаты формализации актуальной задачи управления потоками целевой информации при функционировании космической системы дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), сформулирована техническая постановка задачи и предложен общий методический подход к решению поставленной технической задачи управления, который включает в себя: формулировку постановки оптимизационной задачи, выбор общего подхода к ее решению и определение условий применимости [3]. Сформирован перечень взаимосвязанных математических моделей, требующих дальнейшей разработки. В совокупности эти модели описывают процесс обработки (рис. 1), в том числе определяют, что происходит с объемом информации и вычисляют системные пока-

затели эффективности – время, требуемое для реализации процесса и его условную стоимость.

Это позволило окончательно представить модель обработки информации как взаимосвязанную последовательность функций изменения условного объема информации при применении к нему соответствующего процесса обработки (функция изменения трафика), а сама математическая постановка задачи была сведена к оптимизации маршрута прохождения заявки по графу.

Практическая реализация методологии предполагает построение программно-моделирующего комплекса (ПМК) для оптимизации распределения потоков целевой информации при функционировании космической системы ДЗЗ, на основе которого можно решать следующие задачи:

– оптимизировать распределение процессов обработки информации по заявкам потребителей,



используя как скалярный (стоимость или время), так и векторный критерий (стоимость + время);  
 – автоматизировать формирование плана распределения обработки заявок потребителей по узлам (технологическую карту);

– проводить оценку текущего состояние инфраструктуры с точки зрения возможностей обработки заявок потребителей и выявлять возможные проблемы в будущем.

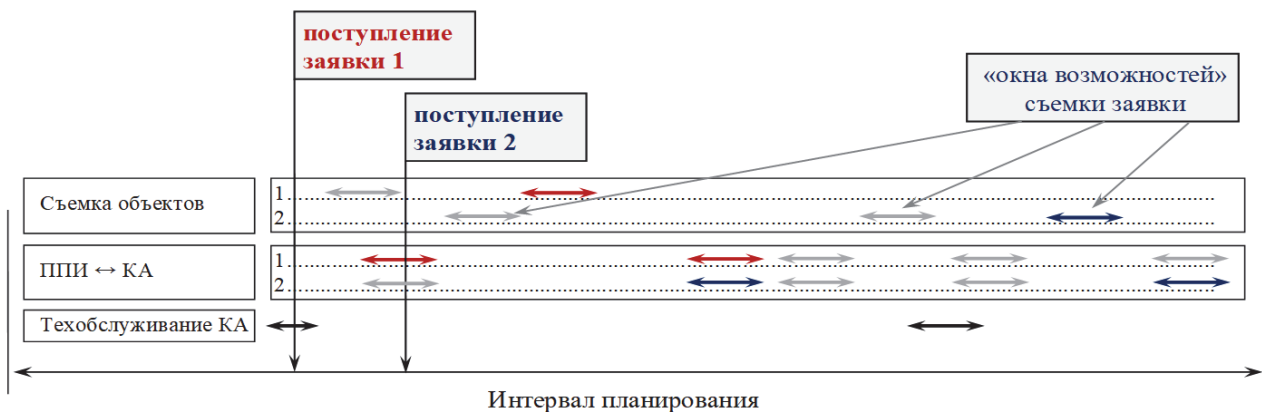


Рис. 1. Последовательность обработки заявок по мере их поступления:  
 ППИ – пункт приема информации; КА – космический аппарат

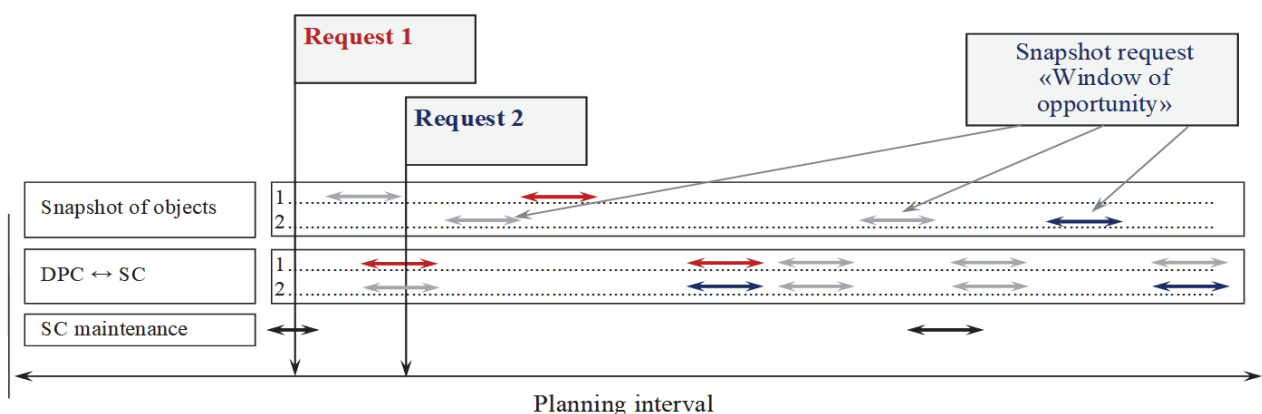


Figure 1. The sequence of processing applications as they are received:  
 DPC – Data Processing Center; SC – spacecraft

### 1. Программно-моделирующий комплекс

Сложность процессов, происходящих при обработке данных ДЗЗ, приводит к тому, что их исследование на основе аналитических моделей для широкого диапазона исходных данных возможно лишь при введении допущений, снижающих адекватность получаемых результатов. Одним из способов, позволяющих оценить качество заложенных алгоритмов оптимизации и информационного обмена, а также получить ряд частных статистических данных, необходимых для разработки адекватных аналитических моделей, является использование математического моде-

лирования на базе предлагаемого авторами специализированного программно-моделирующего комплекса. Основным назначением ПМК является: формализация процессов обработки и передачи данных; организация выполнения и взаимодействия процессов, их взаимодействия с программным обеспечением информационно-вычислительной системы в модельном и реальном времени; управление процессом решения задачи, как в диалоговом, так и в пакетном режиме работы с использованием сценариев обработки; оперативное отображение результатов в графическом и табличном виде; регистрация и обработка результатов.

ПМК должен отвечать требованиям экономичности, надежности, удобства использования, открытости архитектуры, сопровождаемости и адекватности.

Под экономичностью здесь понимаются ограничения на затраты времени для получения результатов и объем оперативной памяти.

Выполнение требования по удобству использования должно обеспечиваться за счет разработки удобной диалоговой программы, облегчающей использование тех или иных возможностей ПМК (доступ к исходным данным, проведение расчетов, построение графиков, внесение изменений в программный код).

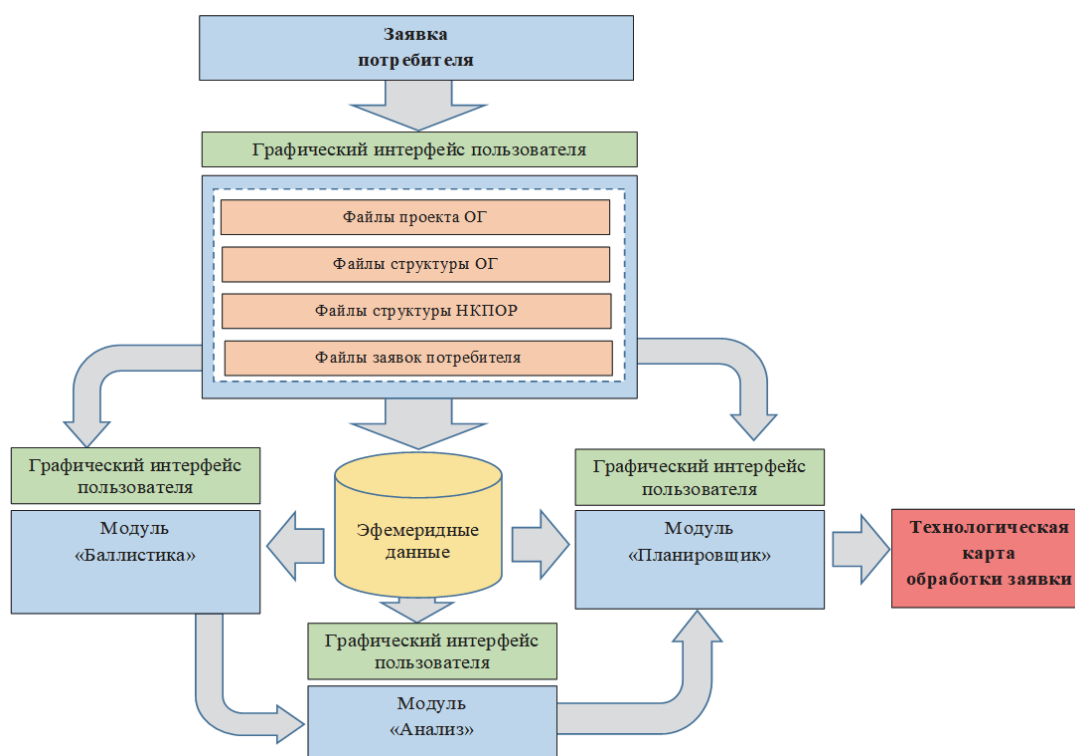
Выполнению требования к надежности ПМК способствует структурирование программы путем создания объектов, характерной чертой которых является инкапсуляция (объединение) данных и алгоритмов их обработки. Инкапсуляция позволяет в максимальной степени изолировать объект от внешнего окружения. Она существенно повышает надежность разрабатываемой программы, так как локализованные в объекте алгоритмы обмениваются с программой сравнительно небольшими объемами данных, причем ко-

личество и тип этих данных нетрудно тщательно контролировать.

Требование по сопровождаемости подразумевает обеспечение структурированности программы, что обеспечивается применением аппарата объектно-ориентированного программирования, а также наличие необходимой эксплуатационной документации.

Любая модель должна быть адекватна решаемой задаче, то есть достоверно отображать существенные для данной задачи свойства системы. При этом совокупность компонентов системы и ее внешней среды, характеристики которых существенно влияют на решение задачи, называются объектом моделирования. В объект моделирования входят те компоненты системы и среды, структуры и параметры которых признаны определяющими [1–3]. При этом объект моделирования целесообразно разбить на две составляющие: объект синтеза и внешнюю среду.

Для создания программно-моделирующего комплекса оптимизации распределения потоков целевой информации при функционировании космической системы ДЗЗ объект моделирования можно принять в виде, представленном на рис. 2.



**Рис. 2.** Архитектура программно-моделирующего комплекса:

ОГ – орбитальная группировка; НКПОР – наземный комплекс приема, обработки и распространения информации

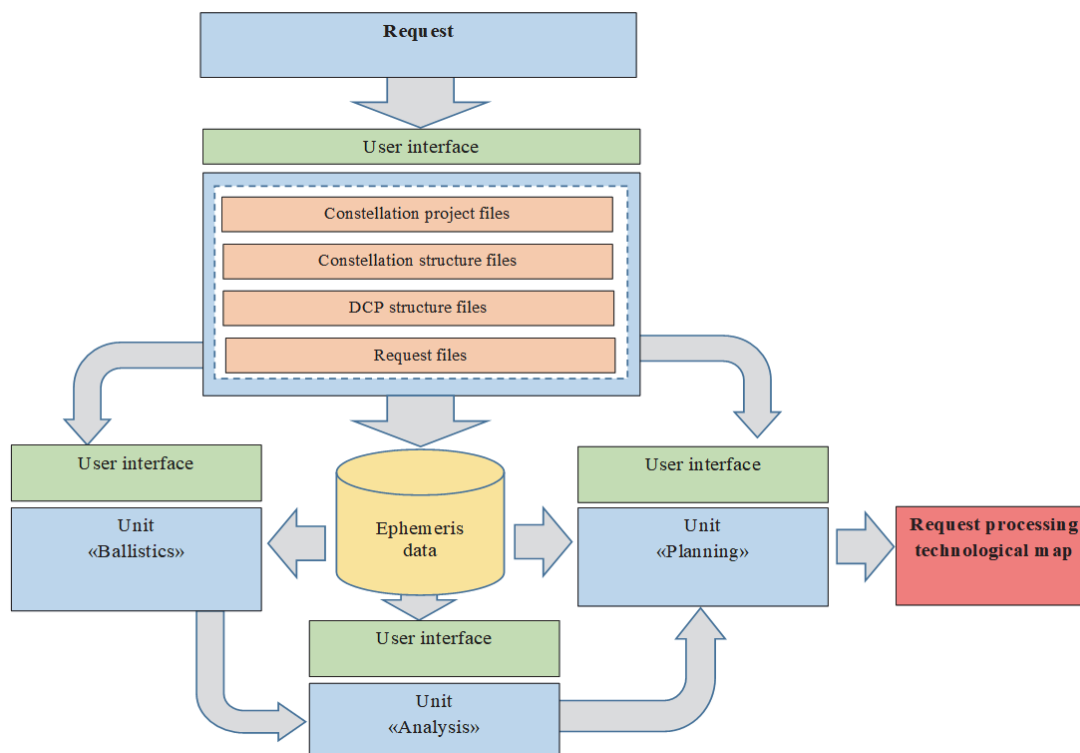


Figure 2. Software architecture

Комплекс построен по принципу модульности и состоит из трех модулей, имеющих условные названия «Баллистика», «Анализ» и «Планировщик».

Модуль «Баллистика» обеспечивает прогнозирование движения спутников орбитальной группировки с учетом принятой стратегии управления под действием различных возмущающих факторов на интервале планирования [4–20]. Он служит источником исходных данных для модуля «Анализ». Эфемеридная информация, сформированная однократно в модуле расчета возмущенного движения космического аппарата (КА), может быть использована для оценки показателей доступности и точности функционирования группировки, а также стратегии коррекции.

Модуль «Анализ» определяет возможные интервалы времени проведения съемки и сброса информации [4–6]. Он использует результаты прогнозирования возмущенного движения КА орбитальной группировки (ОГ) модулем «Баллистика». При работе с модулем «Анализ» пользователь выбирает файл структуры группировки (эфемеридные данные загружаются автоматически), редактирует параметры вычислений и получает результаты.

Модуль «Планировщик» на основании принятой заявки потребителя решает задачу оптими-

зации распределения процессов обработки информации по элементам наземной инфраструктуры [1–3]. Результатом применения модуля является технологическая карта прохождения заявки по узлам системы, в которой содержится информация по каждому этапу ее обработки (процессу обработки), включающая в себя:

- время поступления процесса в узел для обработки;
- время начала выполнения процесса;
- время окончания выполнения процесса;
- время окончания (с учетом ожидания) передачи данных на последующий узел обработки;
- объем входной информации;
- объем выходной информации;
- время выполнения;
- стоимость (обработка + передача).

## 2. Результаты применения

Обеспечение максимальной эффективности использования возможностей орбитальных группировок КА является основной функцией наземной космической инфраструктуры, что достигается рационализацией номенклатуры технического оборудования на наземных приемных комплексах, оптимизацией размещения пунктов приема и обработки данных на территории РФ и за ее пределами, применением

устойчивых средств связи между элементами наземной космической инфраструктуры (НКИ) (как наземных, так и через спутники-ретрансляторы).

Разработанный программно-моделирующий комплекс оптимизации распределения потоков целевой информации между узлами наземной космической инфраструктуры позволяет смоделировать нагрузку на НКИ в зависимости от состава ОГ и получить производительность всей системы, причем все характеристики системы можно задавать непосредственно пользователю с помощью модуля «Планировщик».

**Настройка пользовательских параметров системы.** Рассмотрим пользовательскую настройку параметров процессов системы.

Вследствие условности параметра стоимости обработки единицы информации (в данном случае заявки, или маршрута) разработаны формулы расчета зависимости стоимости процессов от средней заработной платы и длительности смены на элементах космической наземной инфраструктуры. Для удобства все полученные результаты нормировались на единицу.

$$C_{\text{чел/час}} = \frac{Z_{\text{сред}}}{DH(O+N+1)(P+1)},$$

$$C_{\text{прием}} = C_{\text{чел/час}}T,$$

$$C_{\text{обр}} = \frac{C_{\text{чел/час}}K}{V_{\text{инф}}},$$

где  $C_{\text{чел/час}}$  – условная стоимость одного часа работы оператора;  $Z_{\text{сред}}$  – средняя заработная плата в регионе<sup>1</sup>;  $D$  – среднее количество рабочих дней;  $H$  – длительность рабочего дня;  $O$  – процент отчислений;  $N$  – процент накладных;  $P$  – процент прибыли;  $C_{\text{прием}}$  – стоимость приема данных;  $T$  – длительность смены;  $C_{\text{обр}}$  – стоимость обработки данных;  $K$  – количество людей в смене;  $V_{\text{инф}}$  – объем информации.

Стоимость передачи данных между элементами НКИ вычислялась как отношение месячной аренды канала связи и максимально возможного объема передаваемой информации.

Время выполнения каждого из процессов, а также изменение объема информации в ходе его выполнения регламентированы – длительность про-

цесса приема определяется продолжительностью нахождения космического аппарата в зоне радиовидимости приемного пункта, объем информации в ходе выполнения (сброса) не меняется, для всех остальных процессов параметры определяются соответствующими алгоритмами обработки и эксплуатационной документацией (к примеру, процесс первичной обработки по регламенту занимает около 10 минут для каждого маршрута при увеличении объема информации в 4 раза).

На рис. 3 (модуль «Планировщик») проиллюстрирован процесс приема на наземные приемные комплексы за одни сутки для перспективной ОГ:

– 2 КА типа «Ресурс-ПМ»<sup>2</sup>;

– 1 КА типа «Обзор-Р»<sup>3</sup>;

– 2 КА типа «Кондор-ФКА»<sup>4</sup>;

– 2 КА типа «Ресурс-П»<sup>5</sup>;

– 4 КА типа «Канопус-В», в том числе и КА типа «Канопус-В-ИК»<sup>6</sup>;

– 2 КА типа «Канопус-ВО»<sup>7</sup>;

– 5 КА типа «Метеор-М»<sup>8</sup>.

График в верхней части рис. 3 (количество выполняемых процессов) иллюстрирует загруженность всех элементов НКИ, что видно из количества маршрутов в сбросе на данный момент времени на пункт приема, а объем принятой информации в Гбайт (в нижней части графика) демонстрирует, что пункт приема г. Москвы прини-

<sup>2</sup> Официальный сайт Единой информационной системы в сфере закупок. Сведения закупки (Шифр ОКР: «Ресурс-ПМ»). URL: <https://zakupki.gov.ru/epz/order/notice/ep44/view/documents.html?regNumber=0995000000216000215> (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>3</sup> Официальный сайт Единой информационной системы в сфере закупок. Сведения закупки (Шифр ОКР: «Обзор-Р»). URL: <https://zakupki.gov.ru/epz/order/notice/ok44/view/documents.html?regNumber=0173100007014000219> (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>4</sup> Официальный сайт Единой информационной системы в сфере закупок. Сведения закупки (Шифр ОКР: «Кондор-ФКА»). URL: <https://zakupki.gov.ru/epz/order/notice/ok44/view/documents.html?regNumber=0173100007014000217> (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>5</sup> Ресурс-П. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D1%81%D1%83%D1%80%D1%81-%D0%9F> (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>6</sup> Канопус-В. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D1%83%D1%81-%D0%92> (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>7</sup> Официальный сайт Единой информационной системы в сфере закупок. Сведения закупки (Шифр СЧ ОКР: «Канопус-В»-О). URL: <https://zakupki.gov.ru/epz/order/notice/ok504/view/documents.html?regNumber=0995000000220000025> (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>8</sup> Космический комплекс «Метеор-3М». URL: [http://www.vniim.ru/ru/index.php?option=com\\_content&view=article&id=609:-1-3r-new&catid=37:spaceprograms&Itemid=62](http://www.vniim.ru/ru/index.php?option=com_content&view=article&id=609:-1-3r-new&catid=37:spaceprograms&Itemid=62) (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>1</sup> Средняя зарплата в России по регионам в 2020–2021 годах. URL: <https://visasam.ru/russia/rabotavrf/zarplaty-v-rossii.html> (дата обращения: 18.08.2021).

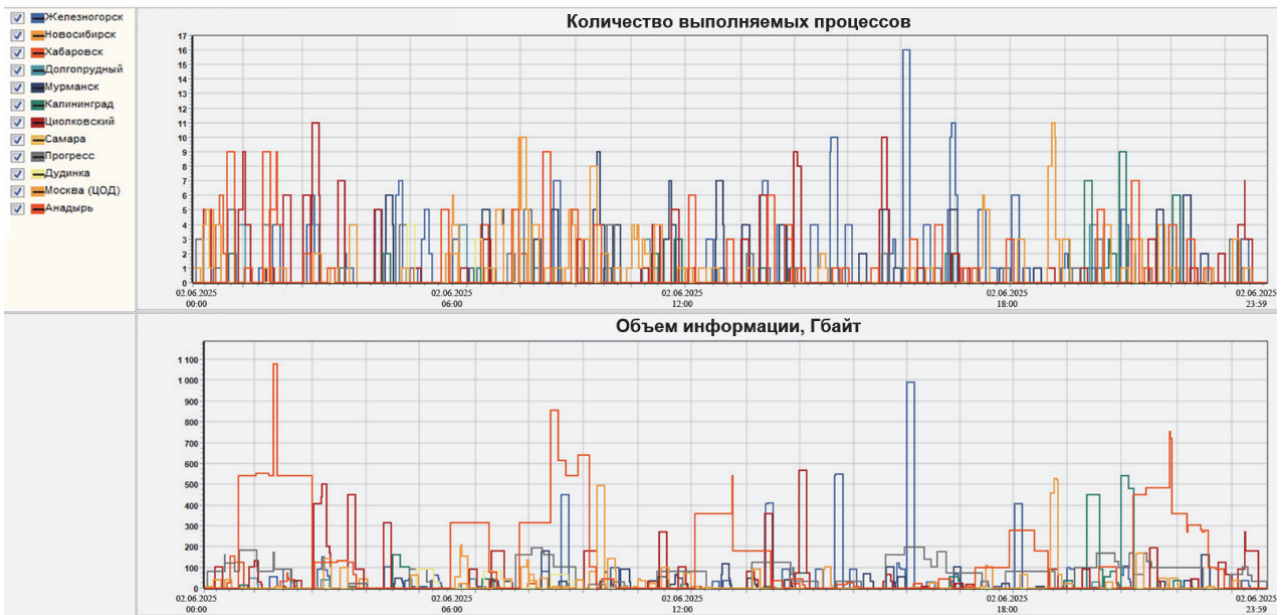


Рис. 3. Процесс приема на всех элементах НКИ за одни сутки

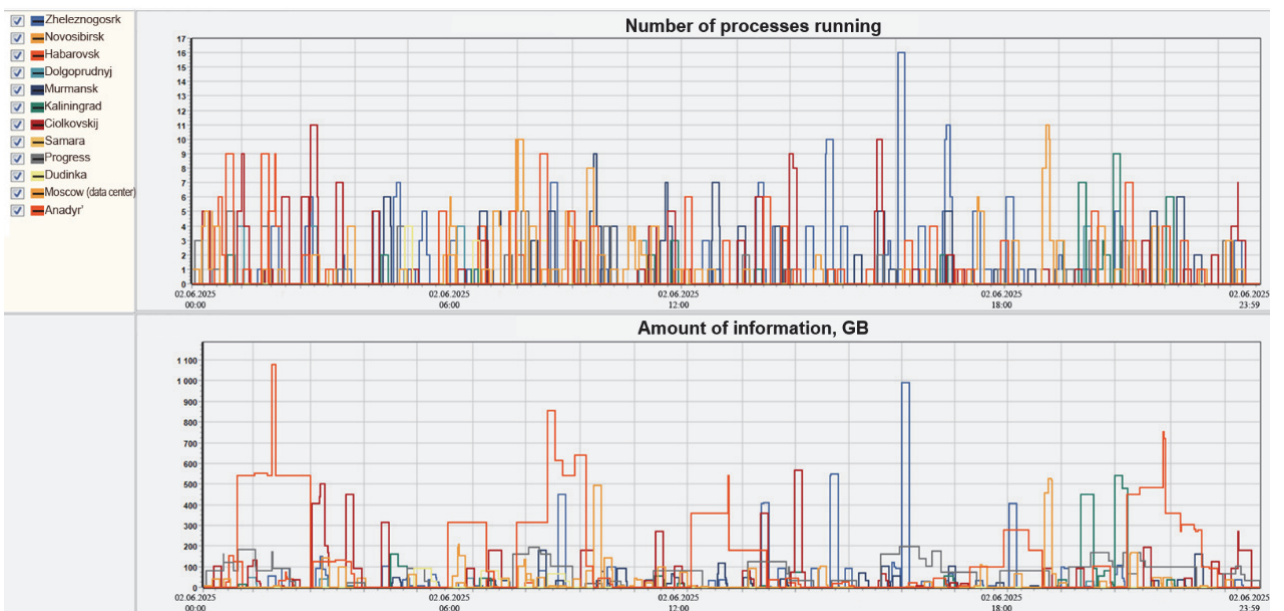


Figure 3. The admission process for all ground-based complexes for receiving and processing Earth remote sensing (ERS) data in one day

мает больший объем данных, что объясняется наличием большого числа приемных комплексов по сравнению с другими пунктами. Ограничения на количество выполняемых процессов, перерывы в работе и суммарный объем хранилищ (входная + выходная информация) задаются пользователем. По умолчанию ограничения в системе отсутствуют. Таким образом, пользователь может полностью смоделировать информационные процессы в наземной космической инфраструктуре.

**Сценарии работы.** На основе принятого порядка работы с приходящей с ОГ КА ДЗЗ информации отработка проводилась по двум направлениям (сценариям) – каталогизация и стандартная обработка.

В качестве НКИ взята ЕТРИС ДЗЗ [21], состоящая из 13 наземных приемных комплексов.

Сценарий каталогизации включает в себя процесс приема информации, первичную обработку (проверка маршрута на пригодность к дальнейшей

работе), каталогизацию и архивацию (внесение информации о маршруте в специализированную базу данных) и передачу маршрута между элементами НКИ. Сценарий стандартной обработки, в свою очередь, подразделяется на процессы выгрузки маршрута из архива, передачи маршрута между элементами НКИ, непосредственно самой стандартной обработки, а также выдачи обработанного маршрута потребителю. Процессы, входящие в каждый из сценариев, не закреплены по пунктам обработки (за исключением процесса приема), но известно, где они могут выполняться.

В качестве входных данных для первого сценария используются циклограммы работ по сбросам результатов съемки, состоящие из параметров сброса (дата сброса, время начала и время окончания сброса, виток, номер включения на витке, код пункта приема и код КА) и параметров маршрута (дата съемки, ее длительность, виток и номер включения на витке, объем маршрута). В одном сбросе может находиться несколько маршрутов, как правило, их число редко превышает 10 (рис. 3).

Для второго сценария используются циклограммы работ по заявкам потребителей на обработку информации, состоящие из даты и времени заявки, целевой аппаратуры, уровня обработки (от этого зависит время стандартной обработки, а также увеличение объема маршрута в ходе выполнения), кода космического аппарата и кода наземного комплекса, на котором должна обрабатываться заявка.

Каналы связи между элементами НКИ:

- наземный комплекс, расположенный в г. Анадыре, соединен с помощью МКСР «Луч» с комплексами г. Циолковского, а г. Дудинки и ст. Прогресс в Антарктиде соединены по спутниковой связи с наземным комплексом г. Железногорска;

- наземные комплексы г. Железногорска, г. Циолковского, Калининграда, г. Мурманска соединены с центром обработки данных (ЦОД) г. Москвы, ЦОД г. Москвы – с ЦОД в Европейской части РФ<sup>9</sup>.

**Моделирование оптимизации наземной космической инфраструктуры.** На настоящий момент ежедневно на наземную космическую инфраструктуру поступает около 1 Тбайт инфор-

мации с ОГ КА ДЗЗ. В перспективе ожидается рост числа российских КА ДЗЗ, что приведет к существенному увеличению информационных потоков борт – земля. Соответственно, при таких объемах информации любое несовершенство системы рискует стать критическим, поэтому именно сегодня необходимо найти оптимальную конфигурацию технического состава НКИ и подтвердить возможность работы действующих наземных комплексов с перспективной ОГ.

Оптимизация наземной космической инфраструктуры моделировалась для двух вариантов:

- 1) обработка проводится на средствах, расположенных в ряде региональных центров (РЦ), из состава НКИ, и двух центрах обработки данных в Европейской части РФ, один из которых – ЦОД в г. Москве, второй ЦОД соединен каналом связи высокой пропускной способности с первым. Результаты моделирования позволят сделать вывод о целесообразности централизации обработки маршрутов в ЦОД или распределению по РЦ;

- 2) часть маршрутов принудительно обрабатывается на средствах РЦ, часть – в двух ЦОД в Европейской части РФ. В случае каталогизации маршруты обрабатываются там, где были приняты – для минимизации передачи информации между комплексами, за исключением ряда РЦ, где таких средств нет (г. Анадырь, г. Дудинка и ст. Прогресс в Антарктиде). В случае стандартной обработки заявки распределяются по элементам НКИ в соотношении на основе текущего распределения заявок 1:0.9:0.7:0.7:0.3 между г. Москвой, г. Железногорском, г. Мурманском, г. Циолковским и Калининградом соответственно.

В табл. 1 указаны параметры процессов, используемых в моделировании<sup>10</sup>.

**Результаты моделирования.** Для первого варианта обработки (каталогизации) практически все маршруты, принятые в РЦ, ушли на обработку в ЦОД г. Москвы (рис. 4). В ЦОД, расположенный в Европейской части, маршруты не попали, что объясняется отсутствием каналов связи между ним и региональными элементами НКИ, а также достаточной технической мощностью ЦОД г. Москвы. Полученные результаты иллюстрируют невысокую целесообразность проведения обработки в региональных центрах вследствие существенных различий технического уровня аппаратных средств, участвующих в обработке.

<sup>9</sup> Единая территориально-распределенной информационная система дистанционного зондирования Земли (ЕТРИС ДЗЗ). URL: [http://www.ntsomz.ru/ks\\_dzz/nkpoi/etris\\_20200317](http://www.ntsomz.ru/ks_dzz/nkpoi/etris_20200317) (дата обращения: 18.08.2021); «Роскосмос» завершает создание ЕТРИС ДЗЗ. URL: <https://www.comnews.ru/content/119053/2019-04-12/roskosmos-zavershaet-sozdanie-etris-dzz> (дата обращения: 18.08.2021).

<sup>10</sup> РКС переходит на автоматическую обработку данных дистанционного зондирования Земли. URL: <http://russianspacesystems.ru/2020/03/05/rks-perekhodit-na-avtomaticheskuyu/> (дата обращения: 18.08.2021).

Таблица 1

**Параметры процессов, используемых в моделировании**

Название процесса	Изменение объема	Длительность, мин	Ограничения
Прием	Нет	10	Объем хранилищ в ряде РЦ
Первичная обработка	Рост в 3 раза	30 в РЦ и 10 в ЦОД	Количество одновременно обрабатываемых маршрутов в ЦОД без ограничений, в РЦ $\leq 10$
Каталогизация	Нет	25	Количество одновременно выполняемых маршрутов $\leq 10$
Стандартная обработка	Рост в 0,8 раз	30 в РЦ и 10 в ЦОД	Количество одновременно выполняемых маршрутов $\leq 5$ в РЦ, в ЦОД без ограничений
Выгрузка из архива	Нет	2	Выгрузка только из ЦОД, ограничения зависят от варианта обработки ( $\leq 5$ )
Архивация	Нет	2	Нет
Получение обработанных данных	Нет	8	Нет
Передача данных между НКПОР	Нет	0	Нет

*Примечание.* Время выполнения ряда процессов в региональных центрах в 3 раза больше, чем в ЦОД из-за существенных различий технического уровня аппаратных средств, предназначенных для обработки.

Table 1

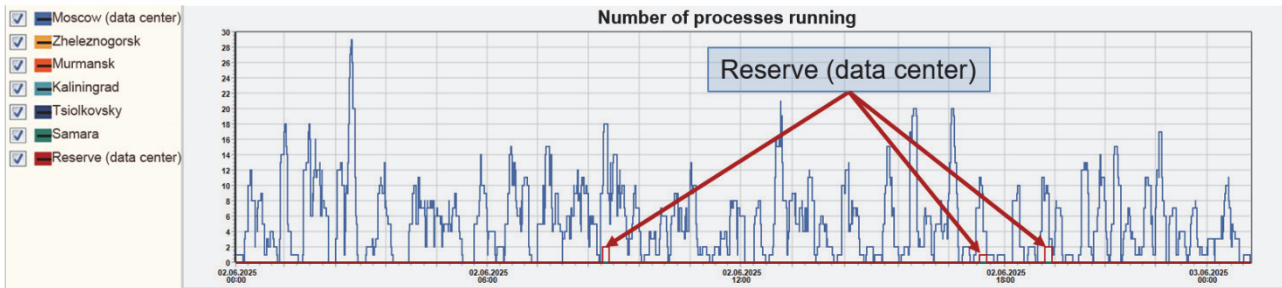
**Parameters of the processes used in the simulation**

Process name	Size change	Duration, minute	Restrictions
Receiving	No	10	Storage capacity in a number of regional centers (RC)
Primary processing	Growth by 3 times	30 in RC and 10 in the data center	The number of simultaneously processed routes in the data center without restrictions, in regional ground-based complexes for receiving and processing ERS data $\leq 10$
Cataloging	No	25	The number of routes running simultaneously $\leq 10$
Standard processing	Growth by 0.8 times	30 in RC and 10 in the data center	The number of routes running simultaneously $\leq 5$ in regional ground-based complexes for receiving and processing ERS data, in the data center without restrictions
Downloading from the archive	No	2	Uploading only from the data center, the restrictions depend on the processing option ( $\leq 5$ )
Archiving	No	2	No
Getting the processed data	No	8	No
Data transfer between ground-based complexes for receiving and processing ERS data	No	0	No

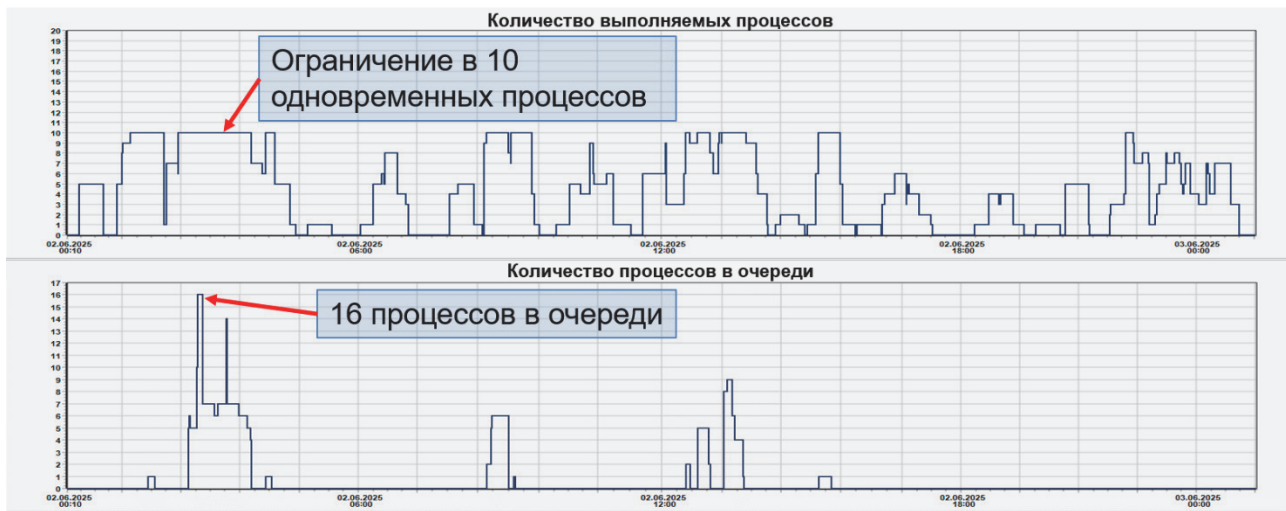
*Note.* The execution time of a number of processes in regional centers is 3 times longer than in a data center due to considerable differences in the technical level of equipment intended for processing.



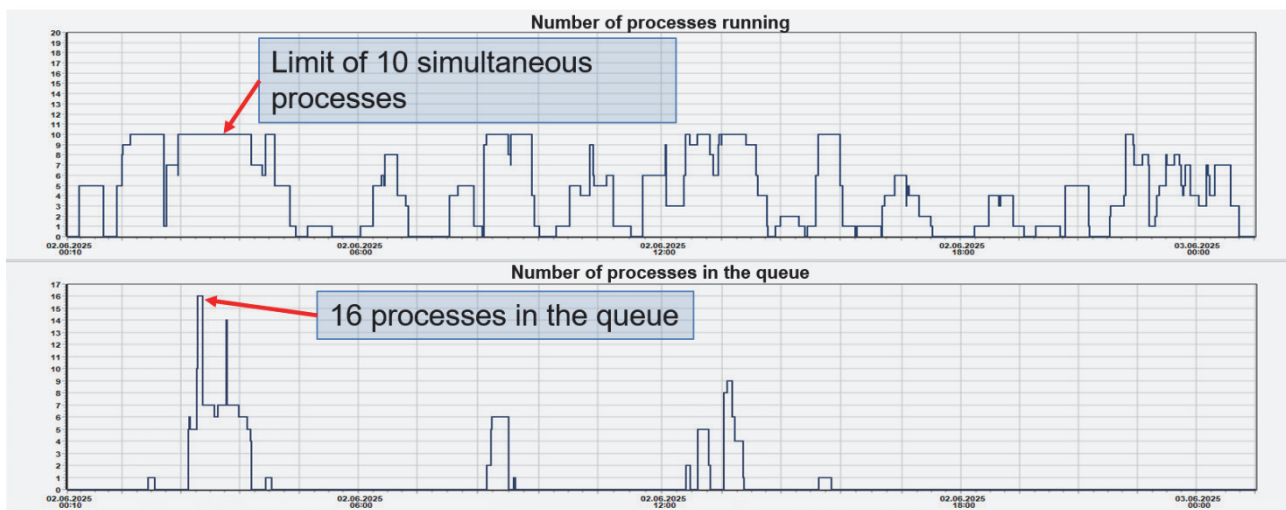
Рис. 4. Процесс первичной обработки на всех элементах НКИ для первого варианта



**Figure 4.** The process of primary processing on all ground-based complexes for receiving and processing ERS data for the first version



**Рис. 5.** Процесс первичной обработки на НКПОР г. Циолковский для второго варианта



**Figure 5.** The process of primary processing at ground-based complex for receiving and processing ERS data in Tsiolkovsky city for the second version



Таблица 2

**Сравнение средних величин стоимости и времени обработки  
для различных вариантов сценария обработки в региональных центрах и ЦОД**

Варианты сценария	Среднее время обработки маршрута, сут	Средняя стоимость обработки маршрута, у.е.
<i>Каталогизация</i>		
Обработка в двух ЦОД и региональных центрах	0,04	377,574
Обработка в двух ЦОД и региональных центрах с принудительной обработкой в региональных центрах	0,053	418,125
<i>Стандартная обработка</i>		
Без ограничения на выгрузку из архива, обработка в двух ЦОД и в региональных центрах	0,015	14,219
С ограничениями на выгрузку из архива, обработка в двух ЦОД и в региональных центрах	0,028	30,233
Без ограничения на выгрузку из архива, принудительная обработка в региональных центрах	0,206	14,684

Table 2

**Comparison of average values of cost and processing time  
for different versions of the processing script in regional centers and data centers**

Script versions	Average route processing time, day	Average route processing cost, standard units
<i>Cataloging</i>		
Processing in two data centers and regional centers	0.04	377.574
Processing in two data centers and regional centers with involuntary processing in regional centers	0.053	418.125
<i>Standard processing</i>		
Without restrictions on downloading from the archive, processing in two data centers and regional centers	0.015	14.219
With restrictions on downloading from the archive, processing in two data centers and regional centers	0.028	30.233
Without restrictions on downloading from the archive, involuntary processing in regional centers	0.206	14.684

В целях подтверждения вывода о целесообразности централизации обработки часть маршрутов принудительно отправлены на обработку в региональные центры (см. второй вариант моделирования). Для этого варианта каталогизации (так называемой принудительной обработки) отмечается возникновение очередей на выполнение процессов на всех элементах НКИ, опять же вследствие наличия ограничений, пример наличия ограничений на процессы обработки (и очередей) продемонстрирован на рис. 5.

Результаты расчета сценария стандартной обработки очень схожи с результатами, полученными при моделировании сценария каталогизации: оба варианта демонстрируют, что из-за ограниченной технической мощности образуются очереди на обработку (в пиковые моменты они составляли более 200 маршрутов), несмотря на то

что только ~20 % данных обрабатывались в региональных центрах, а остальные остались в ЦОД. Кроме того, отсутствие прямых каналов связи второго ЦОД в Европейской части РФ с региональными центрами приводит к тому, что во втором ЦОД, несмотря на его идентичные характеристики с ЦОД г. Москвы, идет на обработку только малая часть маршрутов. В табл. 2 приведено сравнение средних величин условной стоимости и времени обработки для различных вариантов сценария обработки в региональных центрах и ЦОД.

Разница в величинах среднего времени каталогизации для двух вариантов сценария составляет около 18 минут (0,013 суток), однако для больших информационных потоков это может стать критическим: к примеру, для пяти сотен маршрутов время обработки увеличится до 6 суток (500 маршрутов × 18 минут). Схожая ситуация и

на стандартной обработке – разница в средних временах обработки для разных вариантов сценария может привести к задержке до 11 часов на один маршрут.

Таким образом, моделирование функционирования наземной космической инфраструктуры показало, что региональные элементы НКИ целесообразно использовать только для приема данных, а всю обработку проводить в ЦОД высокой производительности. Кроме того, создание в Европейской части резервного ЦОД следует осуществлять только при наличии канала связи высокой пропускной способности с основным ЦОД.

## Заключение

Основной результат предложенной серии статей состоит в представлении новых научно обоснованных методологических основ для разрешения важной научной проблемы управления потоками целевой информации при функционировании космической системы дистанционного зондирования Земли, а также представлении новых технических решений, внедрение которых имеет существенное значение для совершенствования отечественной космической системы ДЗЗ, среди которых можно отметить следующие:

1) в интересах решения основной задачи впервые проведена декомпозиция космической системы ДЗЗ как сложной информационной организационно-технической системы;

2) сформулирована обладающая новизной математическая постановка оптимизационной задачи и определен перечень взаимосвязанным математических моделей, требующих разработки;

3) представлена единая математическая модель орбитальной группировки КА ДЗЗ;

4) предложена единая форма представления моделей обработки информации для космических аппаратов, наземных пунктов и линий связи как элементов единой космической системы ДЗЗ;

5) продемонстрирован новый программно-моделирующий комплекс для оптимизации распределения потоков целевой информации при функционировании космической системы ДЗЗ;

6) существенную практическую значимость имеют результаты, подтверждающие состоятельность предложенного подхода к решению научной проблемы управления потоками целевой информации при функционировании космической системы дистанционного зондирования Земли.

## Список литературы / References

1. Starkov AV, Emelianov AA, Grishantseva LA, Zubkova KI, Morozov AA, Trishin AA. Methodology for managing the flows of target information in the remote sensing space system. Part 1. Task formalization. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(1): 54–64. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-1-54-64>

Старков А.В., Емельянов А.А., Гришанцева Л.А., Жуковская К.И., Морозов А.А., Тришин А.А. Методология управления потоками целевой информации в космической системе дистанционного зондирования Земли. Ч. 1. Формализация задачи // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 1. С. 54–64. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-1-54-64>

2. Starkov AV, Emelianov AA, Grishantseva LA, Zubkova KI, Morozov AA, Trishin AA. Methodology for managing the flows of target information in the remote sensing space system. Part 2. Interrelated mathematical models systems formation. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(2):148–161. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-2-148-161>

Старков А.В., Емельянов А.А., Гришанцева Л.А., Жуковская К.И., Морозов А.А., Тришин А.А. Методология управления потоками целевой информации в космической системе дистанционного зондирования Земли. Ч. 2. Формирование системы взаимосвязанных математических моделей // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 2. С. 148–161. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-2-148-161>

3. Emelyanov AA, Malyshev VV, Smolyaninov YuA, Starkov AV. *Control of target information flows in the functioning of the space system of remote sensing of the Earth*. Moscow: Izdatel'stvo MAI Publ.; 2020. (In Russ.)

Емельянов А.А., Мальшев В.В., Смолянинов Ю.А., Старков А.В. Управление потоками целевой информации при функционировании космической системы дистанционного зондирования Земли. М.: Изд-во МАИ, 2020. 232 с.

4. Emelianov AA, Grishantseva LA, Zubkova KI, Malyshev VV, Nguyen VHN, Starkov AV, Zay YW. Mathematical model of ERS data processing ground segment operation in terms of processing distribution. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2020;170:495–504.

5. Leun EV, Leun VI, Sysoev VK, Zanin KA, Shulepov AV, Vyatlev PA. The active control devices of the size of products based on sapphire measuring tips with three degrees of freedom. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012073>

6. Zanin KA, Moskatinev IV. Improvement of methods for evaluating the resolving power of a space synthetic aperture radar. *Solar System Research*. 2018;52(7): 666–672. <https://doi.org/10.1134/S00380946180702137>

7. Zay YW, Malyshev VV, Bobronnikov VT, Starkov AV. The joint solution of problem of evasion and keeping in a neighborhood reference orbit. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2020;170:433–442.
8. Malyshev VV, Starkov AV, Fedorov AV. Orbital corrections of space vehicles while performing dynamic operations. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2013.52(2):313–325. <https://doi.org/10.1134/S1064230713010085>
9. Malyshev VV, Starkov AV, Zay YW. The decision of problems of evasion when holding the geostationary satellites in the neighborhood of the reference orbit. *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*. 2018;10(13):53–58.
10. Razoumny Y, Razoumny V, Kozlov P, Baranov A, Varatharajoo R. Method of optimization of the servicing space-based system orbits and detached units maneuvers parameters in the problem of on-orbit-servicing of the given multi-satellite space infrastructure. *67th International Astronautical Congress, IAC 2016*. Guadalajara; 2016.
11. Baranov AA, Razoumny VY, Razoumny YN, Malyshev VV. Low orbit spacecraft service planning. *Proceedings of the 68th International Astronautical Congress, IAC 2017: Unlocking Imagination, Fostering Innovation and Strengthening Security, Adelaide, SA, September 25–29, 2017*. Adelaide; 2017. p. 835–844.
12. Baranov AA, Grishko DA, Mayorova VI. The features of constellations' formation and replenishment at near circular orbits in non-central gravity fields. *Acta Astronautica*. 2015;116:307–317. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.06.025>
13. Krasilshchikov MN, Malyshev VV, Fedorov AV. Autonomous implementation of dynamic operations in a geostationary orbit. I. Formalization of control problem. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2015;54(6):916–930. <https://doi.org/10.1134/S1064230715060118>
14. Voikovskii AP, Krasilshchikov MN, Malyshev VV, Fedorov AV. Autonomous implementation of dynamic operations in a geostationary orbit. II. Synthesis of control algorithms. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2016;55(6):948–968. <https://doi.org/10.1134/S1064230716060113>
15. Petukhov VG. Application of the angular independent variable and its regularizing transformation in the problems of optimizing low-thrust trajectories. *Cosmic Research*. 2019;57(5):351–363. <https://doi.org/10.1134/S001095251905006X>
16. Ivanyukhin AV, Petukhov VG. Low-energy sub-optimal low-thrust trajectories to libration points and halo-orbits. *Cosmic Research*. 2019;57(5):378–388. <https://doi.org/10.1134/S0010952519050022>
17. Petukhov VG, Ivanyukhin AV, Sang Wook W. Joint optimization of control and main trajectory and design parameters of an interplanetary spacecraft with an electric propulsion system. *Cosmic Research*. 2019;57:188–203. <https://doi.org/10.1134/S0010952519030079>
18. Grechkoseev AK, Krasil'shchikov MN, Kruzhkov DM, Mararescul TA. Refining the Earth orientation parameters onboard spacecraft: concept and information technologies. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2020;59(4):598–608. <https://doi.org/10.1134/S106423072004006119>
19. Golubev SI, Malyshev VV, Piyavskii SA, Sypalo KI. Decision making in multicriteria problems at the image design stage of aviation rocket technique. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2020;59(2):223–231. <https://doi.org/10.1134/S1064230720020057>
20. Brusov VS, Korchagin PO, Malyshev VV, Piyavsky SA. Advanced “confident judgments” method when choosing multicriteria solutions in a multipurpose approach. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2020;59(1):83–94. <https://doi.org/10.1134/S106423072001004921>.
21. Tohijan OO, Kurlykov AM, Rajchenko BV. The main trends in the development of Russian ground-based means of targeted use of remote sensing satellite from space. *Distancionnoe Zondirovanie Zemli iz Kosmosa v Rossii*. 2020;(1):48–53. (In Russ). Available from: <https://www.roscosmos.ru/media/img/2020/May/zurnal.dzz.v.rossii.1.vipusk.2020.pdf> (accessed: 18.08.2021).

Тохиан О.О., Курлыков А.М., Райченко Б.В. Основные тенденции развития российских наземных средств целевого применения космических аппаратов ДЗЗ из космоса // Дистанционное зондирование Земли из космоса в России. 2020. № 1. С. 48–53. URL: [https://www.roscosmos.ru/media/pdf/dzz/dzz-2020-01\\_n.pdf](https://www.roscosmos.ru/media/pdf/dzz/dzz-2020-01_n.pdf) (дата обращения: 18.08.2021).

#### Сведения об авторах

Старков Александр Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры «Системный анализ и управление», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. ORCID: 0000-0002-2332-904X, Scopus ID: 56205648500, eLIBRARY SPIN-код: 5242-3413. E-mail: [starkov@goldstar.ru](mailto:starkov@goldstar.ru)

Емельянов Андрей Александрович, кандидат технических наук, заместитель генерального директора, Научно-исследовательский институт точных приборов, Российская Федерация, 127490, Москва, ул. Декабристов, вл. 51. Scopus ID: 57214857574, eLIBRARY SPIN-код: 4484-1479. E-mail: [info@niitpr.ru](mailto:info@niitpr.ru)

Гришанцева Любовь Александровна, кандидат физико-математических наук, начальник сектора Научного центра оперативного мониторинга Земли, АО «Российские космические системы», Российская Федерация, 127490, Москва, ул. Декабристов, вл. 51, стр. 25. ORCID: 0000-0003-4012-4086, Scopus ID: 14026859900, eLIBRARY SPIN-код: 9940-8756. E-mail: [contact@spacecorp.ru](mailto:contact@spacecorp.ru)

*Жуковская Ксения Ивановна*, ведущий инженер-программист, Научный центр оперативного мониторинга Земли, АО «Российские космические системы», Российская Федерация, 127490, Москва, ул. Декабристов, вл. 51, стр. 25. ORCID: 0000-0002-1969-8176, eLIBRARY SPIN-код: 4805-5960. E-mail: contact@spacecorp.ru

*Морозов Александр Андреевич*, инженер-исследователь 1 категории, Научный центр оперативного мониторинга Земли, АО «Российские космические системы», Российская Федерация, 127490, Москва, ул. Декабристов, вл. 51, стр. 25. ORCID: 0000-0002-9325-3829, eLIBRARY SPIN-код: 1394-5795. E-mail: contact@spacecorp.ru

*Тришин Алексей Александрович*, студент кафедры «Информационно-управляющие комплексы летательных аппаратов», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. ORCID: 0000-0001-8876-5945. E-mail: trishin0202@mail.ru

#### **About the authors**

*Alexander V. Starkov*, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of System Analysis and Management, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation. ORCID: 0000-0002-2332-904X, Scopus ID: 56205648500, eLIBRARY SPIN-code: 5242-3413. E-mail: starkov@goldstar.ru

*Andrey A. Emelyanov*, Candidate of Technical Sciences, Head of the Scientific Center for Operational Monitoring of the Earth, Joint Stock Company “Research Institute of Precision Instruments,” 51 Dekabristov St, Moscow, 127490, Russian Federation. Scopus ID: 57214857574, eLIBRARY SPIN-code: 4484-1479. E-mail: info@niitp.ru

*Lyubov A. Grishantseva*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Sector of the Scientific Center for Operational Monitoring of the Earth, Joint Stock Company “Russian Space Systems,” 51 Dekabristov St, bldg 25, Moscow, 127490, Russian Federation. ORCID: 0000-0003-4012-4086, Scopus ID: 14026859900, eLIBRARY SPIN-code: 9940-8756. e-mail: grishantseva\_la@ntsomz.ru

*Ksenia I. Zhukovskaya*, lead software engineer, Scientific Center for Operational Monitoring of the Earth, Joint Stock Company “Russian Space Systems,” 51 Dekabristov St, bldg 25, Moscow, 127490, Russian Federation. ORCID: 0000-0002-1969-8176, eLIBRARY SPIN-code: 4805-5960. E-mail: zubkova.k@ntsomz.ru

*Alexander A. Morozov*, research engineer of the 1st category, Scientific Center for Operational Monitoring of the Earth, Joint Stock Company “Russian Space Systems,” 51 Dekabristov St, bldg 25, Moscow, 127490, Russian Federation. ORCID: 0000-0002-9325-3829, eLIBRARY SPIN-code: 1394-5795. E-mail: aamorozko@mail.ru

*Alexey A. Trishin*, student, Department of Information and Control Systems of Aircraft, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation. ORCID: 0000-0001-8876-5945. E-mail: trishin0202@mail.ru



DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-261-269  
УДК 629.783

Научная статья / Research article

## Методология использования методов многокритериального анализа на примере выбора оптимальной архитектуры космического сегмента ГЛОНАСС

С.Ю. Шмигирилов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия  
✉ [sovietserega@gmail.com](mailto:sovietserega@gmail.com)

### История статьи

Поступила в редакцию: 10 сентября 2021 г.  
Доработана: 13 ноября 2021 г.  
Принята к публикации: 15 ноября 2021 г.

### Ключевые слова:

метод уверенных суждений, многокритериальная оптимизация, критерии, свертка критериев, весовые коэффициенты, навигационные услуги

**Аннотация.** Представлена методология выбора оптимальной архитектуры на примере глобальной навигационной спутниковой системы, а именно ее космического сегмента. В качестве примера для отработки методики взяты несколько потенциальных архитектур системы ГЛОНАСС. Применение традиционных методов многокритериального анализа в данном случае затруднительно по причинам наличия большого числа частных навигационных задач, которые выдвигают зачастую противоречивые и неопределенные требования к их разрешению. Также наличие большого количества частных критериев, необходимость привлечения большого числа лиц, принимающих решения, и, как следствие, конфликт интересов, трудность в настройке весовых коэффициентов, определении предпочтений существенно сужают выбор методов для решения задачи. Для реализации поставленной цели использован метод уверенных суждений. Произведена структуризация системы частных критериев, учитывая требования конкретных узких сегментов, и сформированы их предпочтения. После чего для каждой структуры построены таблицы по необходимому числу критериев и по трем разным частным задачам, а также выполнена нормировка и свертка критериев по каждой задаче в один критерий. Далее сформировано множество Парето-рациональных решений и рейтинг альтернатив. Конечный облик системы удовлетворил требованиям, предъявляемым со стороны потребительского сегмента.

### Для цитирования

Шмигирилов С.Ю. Методология использования методов многокритериального анализа на примере выбора оптимальной архитектуры космического сегмента ГЛОНАСС // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 261–269. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-261-269>

© Шмигирилов С.Ю., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## The methodology of using multicriteria analysis methods choosing the optimal architecture of the GLONASS space segment

Sergei Yu. Shmigirilov 

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

✉ [sovietserga@gmail.com](mailto:sovietserga@gmail.com)

### Article history

Received: September 10, 2021

Revised: November 13, 2021

Accepted: November 15, 2021

### Keywords:

confident judgments method, multi-criteria optimization, criteria, criteria convolution, weighting factors, navigation services

**Abstract.** The project presents a methodology for choosing the optimal architecture using, as an example, global navigation satellite system, namely its space segment. Several architectures of the GLONASS system were taken as an example for testing the methodology. The usage of traditional methods of multi-criteria analysis in this case is too way difficult due to the presence of a large number of particular navigation tasks, that often put forward contradictory and uncertain requirements for their resolution, the presence of a large number of private criteria, the need to involve a large number of decision makers (DM), and as a consequence, a conflict of interests, difficulty in setting weights, determining preferences, etc. The confident judgment method was used to implement the task. The system of private criteria was structured, taking into account the requirements of specific narrow segments, and their preferences were formed. After that, tables were built for each structure, according to the required number of criteria and for three different particular tasks, as well as to normalize and collapse the criteria for each task into one criterion. Then a set of Pareto-rational solutions and a rating of alternatives were formed. The final appearance of the system satisfied the requirements imposed by the consumer segment.

### For citation

Shmigirilov SYu. The methodology of using multicriteria analysis methods choosing the optimal architecture of the GLONASS space segment. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3):261–269. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-261-269>

### Введение

В работе рассматривались лишь те характеристики, которые непосредственно влияют на качество сигнала конечного потребителя, а именно точность навигационных услуг, доступность, непрерывность. Однако ввиду большого потребительского сегмента, его категорий, требования, выдвигаемые со стороны сегмента, зачастую несут противоречивый и неопределенный характер. По этой причине встает проблема выбора оптимальной архитектуры космического сегмента ГЛОНАСС [1]. Главной спецификой возникающей задачи является большое число частных критериев, которые вдобавок необходимо систематизировать. Наличие большого числа частных критериев при решении задачи многокритериальной оптимизации возлагает на эксперта или лицо, принимающее решение (ЛПР), большие знания прикладной области, так как ему необходимо производить настройку весовых коэффициентов, определять предпочтения и т. п. В конкретном случае подбор таких коэффициентов или

предпочтений становится практически невозможным, ввиду большого числа аспектов, отражающих функционирование глобальной спутниковой навигационной системы (ГНСС)<sup>1</sup> [2; 3].

Для решения возникшей задачи использован метод уверенных суждений (МУС), поскольку такой подход позволит более четко определить в каждом критерии используемые весовые коэффициенты и неопределенности, а также ввести понятие «важности». Таким образом, использование МУС для решения задачи многокритериальной оптимизации предлагается применить на новом множестве критериев.

### 1. Формирование системы частных критериев

При формировании системы частных критериев учитывались:

<sup>1</sup> Российский радионавигационный план. Утвержден приказом Минпромторга России от 02.09.2008 г. № 118. URL: <https://geostart.ru/doc/read/4441> (дата обращения: 22.03.2021).

– перечень стандартных задач, которые могут быть решены с использованием ГНСС (позиционирование, синхронизация шкал времени, специальные задачи и др.);

– исторически сложившаяся отраслевая сегментация потребителей (воздушная, морская или транспортная навигация, геодезия и др.);

– конкретные частные задачи (заход и посадка по требованиям ICAO, управление специальной техникой и т. п.) [4].

Таким образом, удалось сформировать систему частных критериев посредством вычленения определяющих критериев по каждому условному сегменту

потребителей. Ниже приведена структурная схема каждого из показателей качества навигационной задачи, исходя из назначений потребительских нужд, путем их максимальной адаптации и разделения [5].

Поскольку для точности определяющим фактором является уровень ошибки навигационных определений, этот критерий был разделен так, как представлено на рис. 1.

Для конечного числа стандартных навигационных услуг доступность, так же как и оценка точности, может являться обобщенной системной оценкой качества ГНСС и разделяться на несколько подкатегорий (рис. 2).

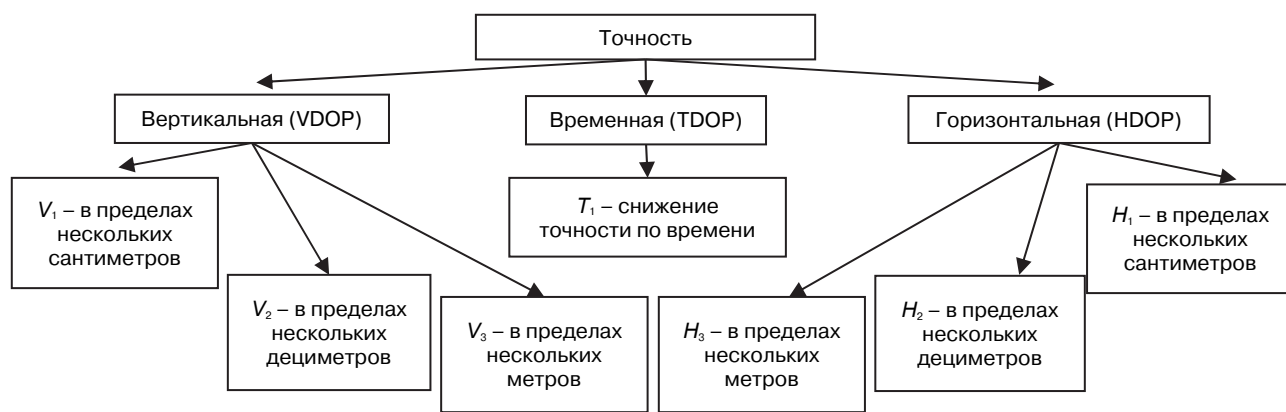


Рис. 1. Структурная схема показателя точности навигационных услуг

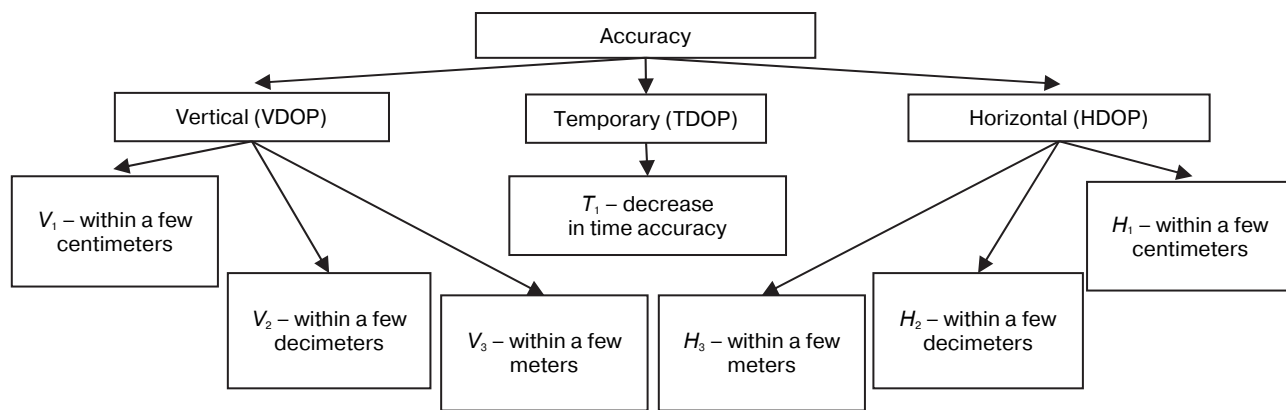


Figure 1. Accuracy indicator of the navigation services block diagram

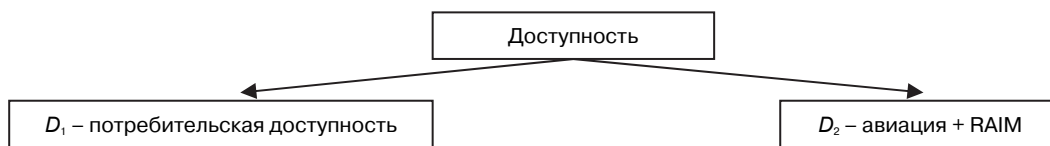


Рис. 2. Структурная схема показателя доступности навигационных услуг

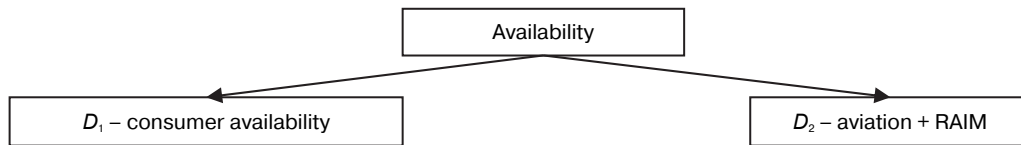


Figure 2. Availability indicator of the navigation services block diagram

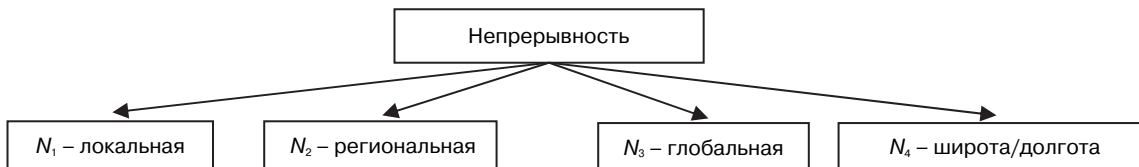


Рис. 3. Структурная схема показателя непрерывности навигационных услуг

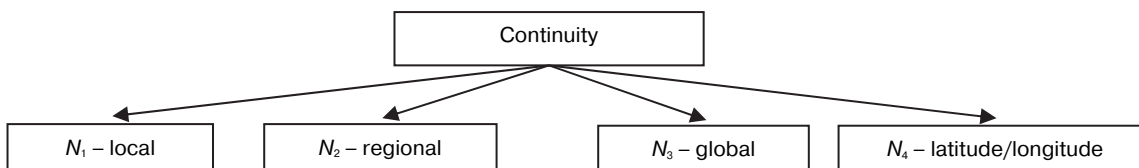


Figure 3. Continuity indicator of the navigation services block diagram

Непрерывность в зависимости от области осреднения также можно различать (рис. 3).

Полученная в результате новая система частных критериев обладает следующими преимуществами:

- отражает как существующие, так и перспективные потребности потребителей;
- позволяет формировать важность задач по отношению друг к другу (например, задача захода самолета на посадку важнее задачи движения по маршруту);
- может быть легко расширена<sup>2</sup>.

## 2. Сужение множества частных критериев

На этапе оптимизации возникла проблема, связанная с большим числом критериев. Таким образом, возникла необходимость в сужении множества частных критериев.

Существует несколько классических методов, относящихся к многокритериальной оптимизации. В работе использован метод взвешенных функций (method of objective weighting).

Обобщенный критерий записывается в следующем виде:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(X), \quad (1)$$

где  $\lambda_i \geq 0$  являются весовыми коэффициентами, которые задают предпочтение  $i$ -го критерия по сравнению с другими критериями.

Величина  $\lambda_i$  определяет важность  $i$ -го частного критерия. При этом более важному критерию приписывается больший вес, а общая важность всех критериев принимается равной 1, то есть

$$\min_{X \in D} f(X) = \min_{X \in D} \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(X). \quad (2)$$

Основным недостатком свертывания является сложность назначения весовых коэффициентов. В силу этого был взят достаточно узкий сегмент для свертывания, что позволило повысить качество свертки.

С другой стороны, использование свертки позволит существенно уменьшить количество критериев при решении задачи многокритериальной оптимизации [5–9].

<sup>2</sup> Федеральный радионавигационный план США. Редакция 2008 г. URL: <http://www.gisa.ru/file/file1716.pdf> (дата обращения: 22.03.2021).



### 3. Формирование предпочтений

На основании описанных показателей качества навигационных услуг, а также идеи о свертке показателей системы частных критериев, сфор-

мирована таблица предпочтений (табл. 1), которая отражает приоритеты, расставленные по сегментам потребителей каждого из частных критериев.

Таблица 1

Таблица предпочтений

Сегмент потребителей	Показатели качества навигационных услуг										Критерий
	Точность				Доступность		Непрерывность				
	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$	$L_8$	$L_9$	$L_{10}$	
$Z_1$											$J_1$
$Z_2$											$J_2$
...											...
$Z_N$											$J_N$

Примечание:  $L_i$  – частные критерии;  $Z_j$  – сегмент потребителей;  $J_j$  – совокупность частных критериев.

Table 1

Preference table

Consumer segment	Navigation services quality indicators										Criteria
	Accuracy				Availability		Continuity				
	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$	$L_8$	$L_9$	$L_{10}$	
$Z_1$											$J_1$
$Z_2$											$J_2$
...											...
$Z_N$											$J_N$

Note:  $L_i$  – private criteria;  $Z_j$  – consumer segment;  $J_j$  – convolutions of private criteria.

С учетом данной таблицы решение состоит из нескольких этапов:

- 1) формирование системы частных критериев;
- 2) выбор сегментов пользователей и проведение декомпозиции каждого из сегментов с целью выявления отдельных подзадач;
- 3) формирование предпочтений для каждого сегмента с использованием системы частных критериев;
- 4) свертывание критериев;
- 5) сортировка различных критериев по группам «важности» и решение задачи многокритериальной оптимизации методом уверенных суждений [4; 10–12].

### 4. Отработка результатов

Решение задачи многокритериальной оптимизации относительно новой системы критериев проводилось следующим образом:

- формирование множества Парето-равноценных решений;
- сужение множества неопределенностей за счет учета в нем уверенных суждений;

– оставшиеся неопределенности устраняются путем введения рейтинга решений: наилучшим принимается решение с максимальным жестким рейтингом, а при прочих равных условиях – с наилучшим мягким.

В качестве примера были выбраны восемь альтернатив: А – Структура 30\3, С – Структура 30\5, Е – Структура 24\6, Н – Структура 30\6, В – Структура 32\8, D – Структура 32\4, F – Структура 28\7, G – Структура 30\3Н, где первое значение – это общее количество спутников, второе – количество плоскостей. Далее было сформировано множество частных критериев (табл. 2)<sup>3</sup>.

Затем составлена таблица предпочтений (табл. 3).

Произведен расчет предпочтений по каждой альтернативе (рис. 4) [3; 13].

<sup>3</sup> Авиационная электросвязь. Т. I. Радионавигационные средства. Приложение 10 к Конвенции о международной гражданской авиации. URL: <http://airspot.ru/library/book/ikao-prilozhenie-10-k-konventsii-o-mezhdunarodnoy-grazhdanskoy-aviatsii-aviatsionnaya-elektrosvyaz-tom-1> (дата обращения: 22.03.2021).

Множество частных критериев

PDOP (локальный)	PDOP (район)	PDOP (глобальный)	Доступность	
			≥4	≥6

Таблица 2

Particular criteria variety

PDOP (local)	PDOP (area)	PDOP (global)	Availability	
			≥4	≥6

Table 2

Таблица предпочтений

Таблица 3

№ задачи	Критерии					Свертка
	PDOP (локальный)	PDOP (район)	PDOP (глобальный)	Доступность ≥4	Доступность ≥6	
1	+	-	-	-	+	J1
2	-	-	+	+	-	J2
3	-	+	-	+	-	J3

Preference table

Table 3

Task number	Criteria					Convolution
	PDOP (local)	PDOP (area)	PDOP (global)	Availability ≥4	Availability ≥6	
1	+	-	-	-	+	J1
2	-	-	+	+	-	J2
3	-	+	-	+	-	J3

№ задачи / Task number	Критерии / Criteria					Свертка / Convolution
	PDOP (локальный / local)	PDOP (район / area)	PDOP (глобальный / global)	Доступность / Availability ≥ 4	Доступность / Availability ≥ 6	
1	1.586	-	-	-	0.804	1.53
2	-	-	1.674	0.973	-	0.79
3	-	1.586	-	0.967	-	1.02

Рис. 4. Расчет всех предпочтений  
Figure 4. Calculation of all preferences

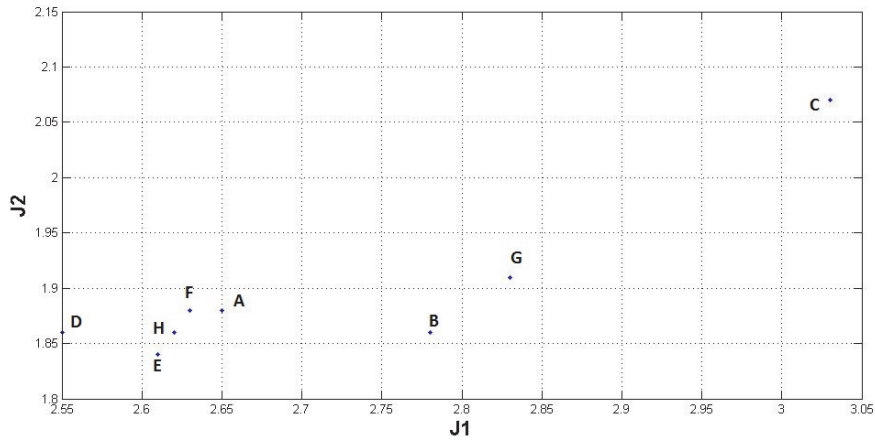
Таблица 4 / Table 4

Рассчитанные частные свертки критериев для выбранных альтернатив /  
Calculated partial convolutions of criteria for selected alternatives

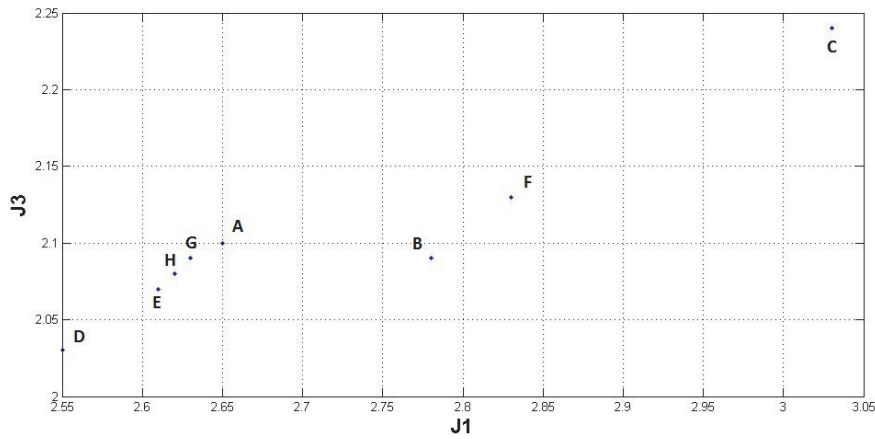
	A 30/3	B 32/8	C 24/6	D 30/5	E 32/4	F 28/7	G 30/3H	H 30/6
J1	2.65	2.78	3.03	2.55	2.61	2.83	2.63	2.62
J2	1.88	1.86	2.07	1.86	1.84	1.91	1.88	1.86
J3	2.1	2.09	2.24	2.03	2.07	2.13	2.09	2.08

Рассчитанные частные критерии для принятых альтернатив построения орбитального сегмента ГЛОНАСС представлены в табл. 4.

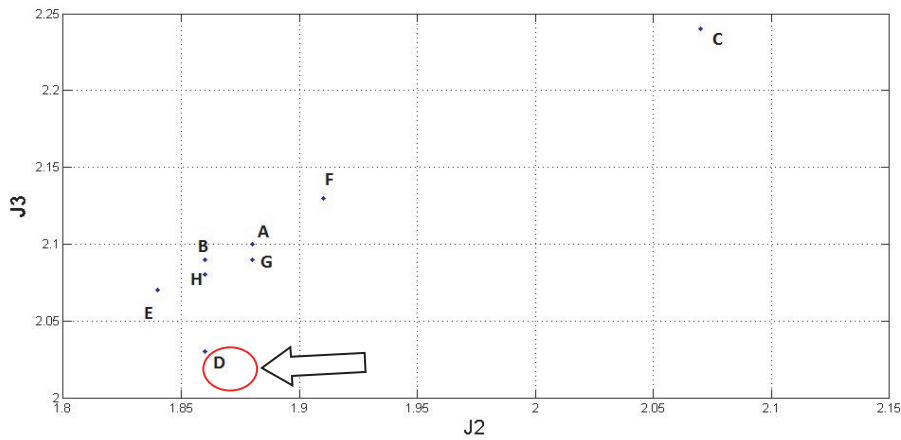
В соответствии с рассчитанным множеством альтернатив вид множества Парето представлен на рис. 5–7.



**Рис. 5.** График сверток  $J1$  и  $J2$   
**Figure 5.**  $J1$  and  $J2$  convolutions graph



**Рис. 6.** График сверток  $J1$  и  $J3$   
**Figure 6.**  $J1$  and  $J3$  convolutions graph



**Рис. 7.** График сверток  $J2$  и  $J3$   
**Figure 7.**  $J2$  and  $J3$  convolutions graph

Рейтинг альтернативы – вероятность того, что альтернатива окажется наилучшей с учетом всевозможных способов учета неопределенностей, которые допустимы в конкретной задаче принятия решения (табл. 5) [3; 14].

Таблица 5

Рейтинг альтернатив		
Структура	30/5	32/4
Рейтинг	0,9997	0,0003

Table 5

Rating of alternatives		
Structure	30/5	32/4
Rating	0.9997	0.0003

Анализ рис. 5–7 позволяет сразу определить решение – это альтернатива D (30/5). Тем не менее в соответствии с предложенной методологией выполнены все остальные этапы. Результаты совпали. Отличительной особенностью предлагаемого подхода является отказ от явного назначения весовых коэффициентов при решении задачи многокритериальной оптимизации для новой системы частных критериев [4]. Это достигается за счет использования метода уверенных суждений, согласно которому сужение множества альтернатив и выбор окончательного решения осуществляются путем расчета и сравнения их рейтингов<sup>4</sup> [15].

## Заключение

Методология на основе использования таблицы предпочтений и метода уверенных суждений позволяет достаточно обоснованно производить сравнительную оценку структур, характеризуемых набором количественных и качественных критериев в условиях неопределенности исходных данных, а также дает возможность не только классической многокритериальной оптимизации, но и учета важности сегментов по отношению друг к другу.

## Список литературы

1. Пиявский С.А., Брусов В.С., Хвилон Е.А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974. 168 с.

<sup>4</sup> ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ (редакция 5.1). 2008 г. URL: [https://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD\\_GLONASS\\_rus\\_v5.1.pdf](https://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD_GLONASS_rus_v5.1.pdf) (дата обращения: 22.03.2021).

2. Malyshev V.V., Piyavsky S.A. The confident judgment method in the selection of multiple criteria solutions // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2015. Vol. 54. No. 5. Pp. 754–764. <https://doi.org/10.1134/S1064230715050093>

3. Groves P.D. Principles of GNSS, inertial, and multi-sensor integrated navigation systems. 2nd ed. Artech House, 2013. 762 p.

4. Пиявский С.А. Методы оптимизации и оптимального управления. Самара: СГАСУ, 2005. 184 с.

5. Малышев В.В. Методы оптимизации сложных систем: учебное пособие. М.: МАИ, 1981. 76 с.

6. Brusov V.S., Korchagin P.O., Malyshev V.V., Piyavsky S.A. Advanced “confident judgments” method when choosing multicriteria solutions in a multipurpose approach // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2020. Vol. 59. No 1. Pp. 83–94. <https://doi.org/10.31857/S0002338820010047>

7. Raiffa H. Decision analysis: introductory readings on choices under uncertainty. McGraw Hill, 1997.

8. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical optimization. Philadelphia, 2019. 401 p. <https://doi.org/10.1137/1.9781611975604>

9. Лутвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. М.: Патент, 1996. 271 с.

10. Пиявский С.А., Бараховский Б.С. Блок обоснования решений в программном обеспечении МикроЭВМ // Калинин: Центр программ и систем, 1986. С. 7–10.

11. Malyshev V.V., Piyavsky B.S., Piyavsky S.A. A decision making method under conditions of diversity of means of reducing uncertainty // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2010. Vol. 49. No 1. Pp. 44–58. <https://doi.org/10.1134/S10642307100100656>

12. Сенаторов М.Ю., Сятковский Р.Б. Сравнительный анализ характеристик методов контроля целостности глобальных спутниковых навигационных систем // Безопасность информационных технологий. 2011. Т. 18. № 4. С. 106–108.

13. Odu G.O. Weighting methods for multi-criteria decision making technique // *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*. 2019. Vol. 23. No. 8. Pp. 1449–1457. <https://doi.org/10.4314/jasem.v23i8.7>

14. Смирнов О.Л., Падалко С.А., Пиявский С.А. САПР: формирование и функционирование проектных модулей. М.: Машиностроение, 1987. 272 с.

15. Brusov V.S., Piyavskii S.A. Multi-criteria analysis of high-altitude UAV concepts // *Russ. Aeronaut.* 2016. Vol. 59. Pp. 447–451. <https://doi.org/10.3103/S1068799816040024>

## References

1. Piyavsky SA, Brusov VS, Khvilon EA. *Multipurpose aircraft parameters optimization*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1974. (In Russ.)

2. Malyshev VV, Piyavsky SA. The confident judgment method in the selection of multiple criteria solu-

tions. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2015;54(5):754–764. <https://doi.org/10.1134/S1064230715050093>

3. Groves PD. *Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems*. 2nd ed. Artech House; 2013.

4. Piyavsky SA. *Optimization and optimal control methods*. Samara: SSASU Publ.; 2005. (In Russ.)

5. Malyshev VV. *Optimization of complex systems methods*. Moscow: MAI Publ.; 1981. (In Russ.)

6. Brusov VS, Korchagin PO, Malyshev VV, Piyavsky SA. Advanced “confident judgments” method when choosing multicriteria solutions in a multipurpose approach. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2020;59(1):83–94. <https://doi.org/10.31857/S0002338820010047>

7. Raiffa H. *Decision analysis: introductory readings on choices under uncertainty*. McGraw Hill; 1997.

8. Gill PE, Murray W, Wright MH. *Practical optimization*. Philadelphia; 2019. <https://doi.org/10.1137/1.9781611975604>

9. Litvak BG. *Expert assessments and decision-making*. Moscow: Patent Publ.; 1996. (In Russ.)

10. Piyavsky SA, Barakhovsky BS. *The block of substantiation solutions in microcomputer software*. Kalinin: Tsentri Programm i Sistem Publ.; 1986. p. 7–10. (In Russ.)

11. Malyshev VV, Piyavsky BS, Piyavsky SA. A decision making method under conditions of diversity of means of reducing uncertainty. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2010;49(1):44–58.

12. Senatorov MYu, Syatkovsky RB. The comparative analysis of methods characteristics of a monitoring of integrity of global navigation satellite systems. *IT Security*. 2011;18(4):106–108. (In Russ.)

13. Odu GO. Weighting methods for multi-criteria decision making technique. *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*. September 2019;23(8): 1449–1457. <https://doi.org/10.4314/jasem.v23i8.7>

14. Smirnov OL, Padalko SA, Piyavsky SA. *CAD: design modules formation and functioning*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1987. (In Russ.)

15. Brusov VS, Piyavskii SA. Multi-criteria analysis of high-altitude UAV concepts. *Russ. Aeronaut.* 2016;59: 447–451. <https://doi.org/10.3103/S1068799816040024>

#### Сведения об авторе

Сергей Юрьевич Шмигирилов, старший преподаватель, кафедра 604, аэрокосмический факультет, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; ORCID: 0000-0001-8439-6142, eLIBRARY SPIN-код: 7128-1602. E-mail: [sovietserega@gmail.com](mailto:sovietserega@gmail.com)

#### About the author

Sergei Y. Shmigirilov, senior lecturer, Department 604, Aerospace Faculty, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, 125993, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8439-6142, eLIBRARY SPIN-code: 7128-1602. E-mail: [sovietserega@gmail.com](mailto:sovietserega@gmail.com)



DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-270-282  
УДК 03.01

Научная статья / Research article

## Обоснование введения дискретно-непрерывной топологии в интересах алгоритмизации сложных процессов функционирования

Н.Л. Малинина 

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия  
✉ malinina806@gmail.com

### История статьи

Поступила в редакцию: 22 марта 2021 г.  
Доработана: 12 сентября 2021 г.  
Принята к публикации: 27 сентября 2021 г.

### Ключевые слова:

сложный процесс, дискретно-непрерывная топология, модель, теория графов

**Аннотация.** Цель исследования – показать и доказать необходимость введения новой, дискретно-непрерывной топологической структуры для описания сложных систем и процессов их функционирования. В настоящее время существуют две топологические структуры: непрерывная и дискретная. Также имеются функциональные подходы к описанию сложных систем и процессов их функционирования, основанные на непрерывной топологии. До сих пор не удалось построить полный функционал для систем проектирования сложных технических объектов, по этой причине функциональный подход не в полной мере соответствует усложняющимся задачам современности. И поэтому введение дискретно-непрерывной топологии важно для исследования и моделирования сложных систем и процессов функционирования. В качестве доказательства описываются свойства сложных процессов на примерах процесса полета и процесса проектирования. Изучение этих процессов как самых сложных показывает, что они, при условии введения новой дискретно-непрерывной топологии, могут быть представлены в виде ориентированного графа. Обосновываются топологические инварианты сложных систем и процессов функционирования. Представление сложных процессов в виде ориентированного графа позволяет более основательно перейти к их алгоритмизации и программированию, что необходимо для существующей практики. Кроме того, представление сложного процесса как ориентированного графа позволит применить для этих целей аппарат теории графов, что позволит значительно расширить возможности программистов.

### Для цитирования

Малинина Н.Л. Обоснование введения дискретно-непрерывной топологии в интересах алгоритмизации сложных процессов функционирования // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 270–282. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-270-282>

© Малинина Н.Л., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Argumentation of introducing a discrete-continuous topology in the interests of algorithmization of complex functioning processes

Natalia L. Malinina 

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

✉ malinina806@gmail.com

### Article history

Received: March 22, 2021

Revised: September 12, 2021

Accepted: September 27, 2021

### Keywords:

complicated process, discrete-continuous topology, model, graph theory

**Abstract.** The main aim of the research is to show and prove the necessity of introducing a new, discrete-continuous topological structure to describe complicated systems and processes of their functioning. Currently, there are two topological structures: continuous and discrete. At the same time, there are functional approaches in order to describe complicated systems and processes of their functioning, based on continuous topology. Until now, it has not been possible to build full functionality for the design of complicated technical objects. Therefore, the functional approach does not fully correspond to the increasingly complicated tasks of our time. The introduction of discrete-continuous topology is especially important for the exploring and modeling of complicated systems and processes of their functioning. In order to prove this fact, the present study describes the properties of complicated processes using examples of the flight process and the design process. The examination of these processes, as the most complicated, proves that the complicated systems and processes are topological spaces with metric, so they can be represented in the form of an oriented progressively bounded graph. Also, it proves the topological invariants of complicated systems and the processes of functioning. Presentation of the complicated processes in the form of a directed graph allows getting shorter path to their algorithmicization and programming, which is necessary for existing practice. In addition, the presentation of a complicated process as a directed graph will allow using the apparatus of graph theory for such purpose and will significantly expand the capabilities of programmers.

### For citation

Malinina NL. Argumentation of introducing a discrete-continuous topology in the interests of algorithmization of complex functioning processes. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3):270–282. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-270-282>

### Введение

Для описания мира и построения моделей различных объектов топологи применяют исключительно две топологии: антидискретную или дискретную [1–3]. Однако в современном мире существуют сложные системы, и процессы их функционирования тоже сложные. Невозможно представить самолет, вертолет, автомобиль или подводную лодку с помощью непрерывной топологии (структуры). Мы не можем смять самолет, как глину, и слепить из него вертолет или подводную лодку одним непрерывным и взаимно-однозначным преобразованием. Аналогично мы не можем разобрать сложный объект на элементы и создать из этих элементов новый объ-

ект, тоже при условии соблюдения требования взаимно-однозначного преобразования [1–3].

Поэтому жизненно необходимо ввести еще одну топологическую структуру, которая поможет справиться с проблемами, возникающими при создании сложных систем и процессов, а именно дискретно-непрерывную топологию. О ней примерно 20 лет тому назад было написано В. Коруховым [4; 5], но в этих книгах она была описана в терминах философии.

Попробуем обосновать введение подобной абстракции с позиций практической жизни на некоторых конкретных примерах и посмотрим, что это может дать для возможностей моделирования сложных процессов и систем.

## 1. Сложный процесс как объект моделирования

Понятие сложного процесса, как и понятие сложной системы, не является строго определенным. В технике под словом «система» определяется главным образом организованно действующее целое, некоторая совокупность объектов, объединенных некоторой взаимной зависимостью [6]. Особенностью сложных систем в настоящее время являются информационные процессы, которые направлены на обеспечение оптимального управления [7]. Поэтому под сложным процессом следует понимать процесс функционирования сложной системы. Примерами подобных сложных процессов являются:

- строительство, ремонт, эксплуатация сложной техники;
- обработка деталей, сборка агрегатов или машин;
- управление войсками и боевыми средствами;
- полеты летательных аппаратов;
- управление транспортными системами;
- реализация программ на ЭВМ, математическое моделирование;
- функционирование конечных автоматов;
- государственное управление.

Любой сложный процесс состоит из набора последовательных или параллельных операций (по существу, технологических, конструкторских, в том числе и творческих), а также моментов начала и окончания указанных операций или моментов перехода от одних операций к другим. Попробуем дать определения таким элементам.

Элементы первого подмножества – это операции, протекающие во времени и требующие для своего осуществления затрат энергии (элементарные операции). Это могут быть сигналы, которые определяют возможность (или необходимость) начала или окончания элементарных операций. В совокупности они составляют физическое содержание исследуемого процесса.

Элементы второго подмножества – это моменты начала и моменты окончания операций или моменты перехода от одних операций к другим. Они также могут включать связи между операциями и логические условия перехода от одних операций к другим. Элементы этого подмножества практически не требуют ни времени, ни затрат энергии для своей реализации. Они представляют собой логическую структуру сложного процесса.

Очевидно, что любой из перечисленных процессов может быть представлен в виде дизъюнктивной суммы указанных подмножеств элементов. Физически весь такой процесс в целом может быть представлен как непрерывный, но с дискретными переходами от одних элементов процесса к другим. Иными словами, мы имеем физически непрерывный процесс с дискретной логической структурой.

Однако при различных попытках автоматизации сложных процессов многие исследователи определяют их как функционал, применяя к ним антидискретную структуру. К сожалению, до сих пор не удалось разработать функционал сложного процесса, который бы описывал весь процесс, а не только его крошечную часть.

## 2. Анализ сложного процесса

Рассмотрим сложный процесс на примере процесса полета (или проектирования) летательного аппарата, чтобы сделать обобщения на другие сложные процессы.

К элементам полета для самолета могут быть отнесены, например, разбег, набор высоты, горизонтальный полет, отдельные фигуры пилотажа, атака в воздушном бою и т. д. Сложность процесса полета современных летательных аппаратов и необходимость его более детального изучения приводят к тому, что исследованию подвергаются все более и более мелкие элементы полета. При этом такие элементы могут относиться уже не только к летательному аппарату в целом, но также и к отдельным его агрегатам, системам и составным частям, включая и экипаж. Основным фактом является то, что любой сложный процесс можно разделить на элементы, в каждом из которых решаются некоторые частные задачи общей задачи сложного процесса.

Особенность процесса проектирования состоит в разработке и создании новых, ранее не существовавших объектов, процессов или систем. Здесь творчество человека тесно переплетается с инженерным синтезом, который в настоящее время осуществляется только человеком [8; 9]. Определение проектирования как сложного дискретно-непрерывного процесса ни в коей мере не противоречит творческим аспектам проектирования [10; 11].

Составными частями сложного процесса, обычно называемыми его элементами, считают относительно ограниченные по времени и доста-



точно однородные по физическому содержанию операции, которые могут быть описаны сравнительно небольшим числом математических выражений. Взаимосвязи элементов более сложны и не всегда очевидны из простого их перечисления. Многие элементы сложного процесса, в частности полета, особенно очень мелкие, часто должны выполняться одновременно.

Практическое применение понятия «элемент полета» в исследованиях и летной практике позволяет сделать некоторые общие выводы:

1) каждый элемент полета (сложного процесса) может иметь математическое описание или математическую модель, в которую входят те или иные параметры самолета (объекта, подвергнутого действию процесса);

2) каждый элемент полета (сложного процесса) имеет такие характеристики, как время выполнения, вероятность успешного выполнения и т. д.;

3) каждый элемент реального полета (сложного процесса) имеет вполне определенные моменты начала и окончания.

В качестве элемента полета (сложного процесса) могут служить такие простейшие операции, которые, особенно при необходимости детального исследования, могут рассматриваться отдельно от других.

Все то же самое можно перенести как на процесс проектирования, так и на другие сложные процессы функционирования. В итоге анализ любого сложного процесса предшествует разработке модели сложного процесса и включает определение:

– элементов процесса;

– перечня элементов сложного процесса, входящих в каждый исследуемый этап сложного процесса;

– основных параметров и характеристик для каждого элемента процесса, в том числе временных и вероятностных;

– системы связей и отношений между элементами процесса, или системы бинарных отношений на множестве этих элементов.

Человеческий фактор, неизменно присутствуя в разработке, создании или реализации любого сложного процесса [8; 9], тесно переплетается с его синтезом, который, попадая в разряд NP-полных задач<sup>1</sup>, в настоящее время осуществляет-

ся практически только человеком. Нет иной возможности проверить правильность тех или иных творческих решений, как «собрав» из частей всю сложную систему и проверив на практике соответствие процесса ее функционирования заданному критерию эффективности [10; 12].

Следовательно, любой сложный процесс включает в себя ряд последовательных и параллельных операций (технологических, конструкторских, в том числе и творческих), а также моменты начала и окончания указанных операций или моменты перехода от одних операций к другим. Каждый раз, когда создается программное обеспечение для автоматизации управления сложным процессом, считается, что сложный процесс состоит из большого количества элементарных операций. У элементарных операций есть общие свойства, но одновременно они могут быть и уникальными. Постараемся дать более точное определение понятию элемента процесса.

Элементами или элементарными операциями сложного процесса называются ограниченные по времени и однородные по своему физическому содержанию и функциональному назначению участки сложного процесса.

Каждая подобная операция имеет вполне определенное начало – вход (момент начала) и вполне определенное окончание – выход (момент окончания). Входы и выходы элементов сложного процесса составляют второе из подмножеств элементов сложного процесса, о которых упоминалось ранее. Посредством соединения входов и выходов различные элементарные операции сложного процесса объединяются в единый сложный процесс. Каждый из элементов может быть соединен со всем процессом только посредством входа и выхода.

Поэтому в основу деления любого сложного процесса на этапы и элементы следует положить функционально-логический принцип, согласно которому каждый этап сложного процесса будет представлять систему элементов, направленную на решение одной из частных задач сложного процесса и оцененную соответствующим частным критерием эффективности для данного сложного процесса. При этом частная задача, решаемая на данном этапе сложного процесса, является на этом этапе главной функциональной задачей, от решения которой зависит также и исход сложного процесса в целом. Реализация всей совокупности элементов сложного процесса, составляющих

<sup>1</sup> Имеется в виду сложность  $n!$ . Относится к переборным задачам комбинаторики.

данный этап, должна быть подчинена главной функциональной задаче сложного процесса.

Очевидно, что любой сложный процесс, включает в себя не только элементарные операции и их совокупности (этапы), но также и моменты начала и окончания элементов (этапов) сложного процесса и моменты перехода от одних операций (элементов, этапов) к другим.

Основываясь на понятиях элемента и этапа сложного процесса, которые соответствуют содержанию и целям данного исследования, примем следующее, предварительное определение сложного процесса: сложный процесс является дискретно-непрерывным, протекающим во времени и пространстве процессом. Он включает в себя отдельные взаимосвязанные элементы (этапы) этого процесса, а также моменты начала, окончания и переходов между ними.

Итак, множество элементов сложного процесса состоит из двух подмножеств, связанных между собой, и поэтому может быть представлено как система, объединяющая эти два подмножества:  $H_0 = Q_0 \times V_0$ .

Процесс обычно реализуется с помощью какого-либо средства или сложной системы. Рассмотрим эти положения на примере анализа полета самолета или его проектирования.

### 3. Физическое и структурное подобие сложного процесса и модели

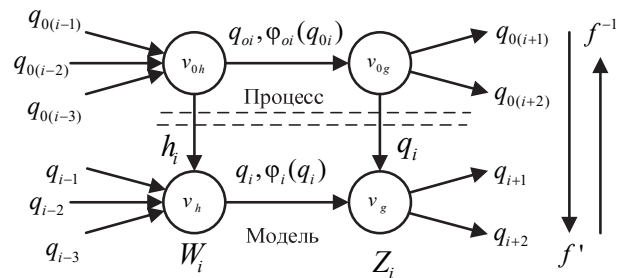
В основе моделирования как метода исследований лежит теория подобия. Можно утверждать, что моделирование имеет место лишь тогда, когда имеется подобие.

Однако часто исследователи, имея в виду физическое или механическое подобие, ограничиваются только критериями физического подобия, поскольку далеко не всегда понятно, как установить логическое и структурное подобие. Это происходит потому, что до сих пор в топологии существует только два варианта структуры: антидискретная и дискретная. В обе эти структуры сложные процессы не вписываются и остаются за бортом изучения с помощью топологических и комбинаторных средств, хотя частично они и употребляются в виде блок-схем или граф-схем.

Вопросы физического подобия модели и процесса достаточно хорошо изучены, однако следует обратить внимание на вопросы связи структурного и физического подобия. Из понятия структурного подобия следует, что каждому элементу

сложного процесса должен быть поставлен во взаимно однозначное соответствие элемент модели этого процесса при помощи некоторого отображения  $f$ . Физическое подобие элементов модели и сложного процесса также непосредственно связано с отображением  $f$  [2].

Рассмотрим прямоугольную диаграмму  $WZ$  (рисунок). На этой диаграмме стрелкой  $q_{0i}$  обозначен элемент реального процесса, которому, посредством отображения  $f$  поставлен во взаимно однозначное соответствие элемент модели  $q_i$ . Начало реализации элемента  $q_{0i}$  обозначено вершиной  $v_{0h}$ , в которую входят концы стрелок (окончания элементов)  $q_{0(i-1)}$ ,  $q_{0(i-2)}$  и т. д. Окончание реализации элемента  $q_{0i}$  обозначено вершиной  $v_{0g}$ , в которой начинаются стрелки (начала реализаций элементов)  $q_{0(i+1)}$ ,  $q_{0(i+2)}$  и т. д. В модели этим вершинам соответствуют вершины  $v_h$  и  $v_g$ , которыми обозначены начало и конец реализации элемента модели  $q_i$ .



Прямоугольная диаграмма  $WZ$

*Примечание:*  $W_{0i}$  – множество параметров на входе элемента  $q_{0i}$ ;  $Z_{0i}$  – множество параметров на выходе элемента  $q_{0i}$ ;  $W_i$  – множество параметров на входе элемента  $q_i$ ;  $Z_i$  – множество параметров на выходе элемента  $q_i$ ;  $\varphi_{0i}(q_{0i}) = \varphi_{0i}$ :  $W_{0i} \rightarrow Z_{0i}$  – преобразование (отображение) параметров входа в параметры выхода, осуществляемое при реализации элемента реального сложного процесса  $q_{0i}$ ;  $\varphi_i(q_i) = \varphi_i$ :  $W_i \rightarrow Z_i$  – преобразование (отображение) параметров входа в параметры выхода, осуществляемое при моделировании элемента сложного процесса  $q_i$ ;  $h_i$ :  $W_{0i} \rightarrow W_i$  – «масштабный коэффициент» между входами элементов процесса и модели;  $q_i$ :  $Z_{0i} \rightarrow Z_i$  – «масштабный коэффициент» между выходами элементов процесса и модели.

В силу структурного подобия:

$$q_i = f^1(q_{0i}) \text{ и } q_{0i} = f^{-1}(q_i). \quad (1)$$

Обозначим:  $k_{0i} = \{k_{0j}\}_i$  – множество критериев физического подобия для элемента  $q_{0i}$ ;  $j = 1, 2, \dots$  – индексы критериев;  $k_i = \{k_{0j}\}_i$  – множество критериев физического подобия для элемента  $q_i$ ;  $j = 1, 2, \dots$  – индексы критериев.

При моделировании критерии физического подобия реального сложного процесса и его модели должны быть равны:

$$k_{oi} = k_i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n_Q. \quad (2)$$

Для обеспечения физического подобия элементов  $q_{oi}$  и  $q_i$  отображения  $\varphi_{oi}$ ,  $\varphi_i$ ,  $h_i$ ,  $g_i$  должны отвечать условию

$$\left. \begin{aligned} h_i \circ \varphi_i \circ g_i^{-1} \circ \varphi_{oi}^{-1} &\equiv \text{idem.} \\ \varphi_{oi} \circ g_i \circ \varphi_i^{-1} \circ h_i^{-1} &\equiv \text{idem.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Это возможно только тогда, когда отображения  $\varphi_{oi}$ ,  $\varphi_i$ ,  $h_i$ ,  $g_i$  являются взаимно однозначными. Из равенств (3) следует, что:

$$\left. \begin{aligned} h_i \circ \varphi_i &\equiv \varphi_{oi} \circ g_i \\ h_i^{-1} \circ \varphi_{oi} &\equiv \varphi_i \circ g_i^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Это означает, что диаграмма  $WZ$  – бикоммутативна [2]. Следовательно, при соблюдении структурного и физического подобия между элементами процесса и модели:

– параметры входа элемента процесса однозначно определяют параметры выхода элемента модели и наоборот;

– параметры входа элемента модели однозначно определяют параметры выхода элемента процесса и наоборот;

Поскольку

$$\begin{aligned} h_i^{-1} \circ \varphi_{oi} &\equiv \varphi_i \circ g_i^{-1}, \\ \text{то } \varphi_i &\equiv h_i^{-1} \circ \varphi_{oi} \circ g_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) означает, что отображение  $\varphi_i$  определяется не только отображением  $\varphi_{oi}$ , но и отображениями  $h_i^{-1}$  и  $g_i$ . Последние являются частными значениями отображения  $f$ , которое отражает структурное подобие реального сложного процесса и его модели (систем  $H_0$  и  $H$ ). Таким образом, если отображение  $\varphi_{oi}$  представляет собой преобразование реальных физических характеристик элемента процесса  $q_{oi}$ , то модель этого преобразования  $\varphi_i$  определяется не только преобразованием  $\varphi_{oi}$ , но зависит также и от «масштабных коэффициентов»  $h_i$  и  $g_i$ , зависящих, в свою очередь, от структурного подобия процесса и его модели.

Следовательно, выражение (5) устанавливает в самом общем виде связь между структурным и физическим подобием процесса и модели. В частном случае, когда коэффициенты  $h_i$  и  $g_i$  представляют собой тождественные преобразования (масштаб 1:1), имеем

$$\varphi_i \equiv \varphi_{oi}. \quad (6)$$

Отсюда следует формула (1).

Рассмотрим процесс полета, а в его представлении любой сложный процесс как топологическое пространство  $F$ . Изучение элементов и взаимосвязей между ними в сложных процессах на примерах процессов полета и проектирования показывает, что сложные процессы отвечают трем условиям, которые называются аксиомами топологической структуры [3], поэтому сложный процесс является топологическим пространством. Кроме того, сложный процесс, рассматриваемый как система  $H_0 = Q_0 \times V_0$ , является метрическим. Метрика этого пространства задается временной программой или порядком выполнения процесса.

Любая модель сложного процесса должна формироваться как некоторая математическая структура. Эта математическая структура превращается в модель в случае, когда элементам модели дается некоторая физическая интерпретация. Вопрос о подобии или эквивалентности сложного процесса и его модели упирается в проблему подобия или эквивалентности их структур. Поэтому следует установить их топологическое подобие и найти систему топологических инвариантов, чтобы иметь возможности для точного сравнения.

Если говорить о процессе полета любого летательного аппарата, то для формирования его модели совершенно недостаточно описать динамику его полета. Любой полет характеризуется еще и временной программой или графиком полета, процессами формирования не только управляющих сигналов, но и моментами их реализации и т. д. Если исходить из требований подобия, то следует рассматривать и это, причем весьма большое, множество характеристик и свойств полета.

Если говорить о процессе проектирования, то для формирования его модели недостаточно создать календарный план процесса. В процессе проектирования могут возникнуть новые технические решения (и не только), которые могут в корне изменить весь процесс.

В результате становится необходимым рассматривать не только физическое подобие элементов сложного процесса и элементов его модели, но также и структурное подобие процесса и его модели. Попробуем рассмотреть топологические инварианты сложного процесса, применяя в качестве примера два таких сложных процесса, как проектирование и процесс полета самолета, и найти у них общие свойства и характеристики.

#### 4. Топологические инварианты сложного процесса и его модели

Введение дискретно-непрерывной топологии на множествах  $Q_0$  и  $V_0$  позволяет описать свойства этих множеств с помощью топологических инвариантов.

Каждое из множеств  $Q_0$  и  $V_0$  конечно. Поэтому одним из инвариантов системы  $H_0 = Q_0 \times V_0$  является конечность множеств, которая численно выражается их мощностью:

- $n_{0Q}$  – мощность множества  $Q_0$ ;
- $n_{0V}$  – мощность множества  $V_0$ .

Из этих двух величин мощность  $n_{0Q}$  множества  $Q_0$  является топологическим инвариантом системы  $H_0$ , а мощность  $n_{0V}$  множества  $V_0$  – не является, так как она вполне определяется через мощность  $n_{0Q}$  множества  $Q_0$  и его порядковый тип  $R_0$ .

Одним из основных топологических свойств выступает свойство компактности. В применении к сложному процессу оно означает, что любая последовательность элементов имеет по крайней мере одну предельную точку, за которой не может быть ни одного элемента процесса. Свойство компактности эквивалентно свойству множества быть замкнутым и ограниченным. Действительно, процесс полета проектирования как множество  $H_0$  включает в себя граничные точки (замкнутость), кроме того, никакая последовательность ни процесса полета, ни процесса проектирования не может устремиться в бесконечность.

Все элементы сложного процесса имеют вполне определенную ориентацию во времени и пространстве. Каждый элементарный процесс может реализовываться только в одном направлении: от начала к концу, поскольку течение времени необратимо.

Перечисленные свойства системы  $H_0 = Q_0 \times V_0$ : конечность, замкнутость, ограниченность и направленность позволяют представлять модель процес-

са проектирования в виде конечного, прогрессивно-ограниченного, ориентированного графа  $H = Q \times V$ . Граф  $H = Q \times V$  имеет конечное число дуг (ориентированных ребер) и вершин, может иметь циклы, но не имеет контуров. Реальный сложный процесс (проектирования или полета) невозможно представить состоящим из совершенно независимых, несвязанных между собой элементов. Это означает, что и соответствующий ему граф не может состоять из несвязанных между собой компонент, то есть граф  $H = Q \times V$  имеет одну компоненту связности.

Итак, установлены следующие топологические свойства множества  $H_0$  как системы множеств  $Q_0$  и  $V_0$ :

- конечность;
- ограниченность;
- замкнутость;
- связность.

Следовательно, и модель сложного процесса тоже может быть представлена в виде графа  $H = Q \times V$ . Графы, кроме указанных свойств и числа, входящих в них элементов, могут иметь и различные характеристические числа. Особый интерес при этом представляет собой цикломатическое число графа  $H = Q \times V$ , которое определяется следующей формулой:

$$v(H) = m_H - n_H + 1, \quad (7)$$

где  $m_H$  – число дуг;  $n_H$  – число вершин графа  $H$ .

Цикломатическое число равно наибольшему числу независимых циклов графа [13; 14] и определяет сложность структуры графа, а следовательно, определяет сложность как процесса (системы), так и его модели. Цикломатическое число является очень важным инвариантом системы  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ .

Изучение свойств порядка, определенного на множествах  $Q_0$  и  $V_0$  показывает, что эти множества линейно упорядочены, индуктивны и всегда могут быть упорядочены, то есть могут иметь порядковые типы, поэтому могут быть пронумерованы.

При этом оказывается, что порядковый тип  $F_0$  множества  $V_0$  вполне определяется порядковым типом  $R_0$  множества  $Q_0$ . Это означает, что способ упорядочения множества  $V_0$  вполне определяется способом упорядочения множества  $Q_0$ .

Таким образом, для обеспечения подобия сложного процесса и его модели необходимо, чтобы были равны порядковый тип  $R_0$ , задан-

ный на множестве  $Q_0$  элементов сложного процесса, и порядковый тип  $R$ , определенный на множестве дуг графа  $H(V, Q)$ , то есть  $R_0 = R$ . Равенство  $F_0 = F$  обеспечивается при этом автоматически.

Теоремы, доказывающие топологические свойства, а именно: конечность, замкнутость, ограниченность и связность, приведены далее.

### Свойства множеств $Q_0, V_0$ и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$

*Теорема 1.* Множество  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  конечно [11].

*Доказательство.* Каждый элемент  $q_{0i} \in Q_0$  имеет конечное время реализации ( $0 < \Delta t_i < \infty$ ). Если число одновременно выполняемых элементов процесса не превышает конечного числа возможных исполнителей (в процессе проектирования программного продукта это могут быть системы, программы, агрегаты, люди), то общее время протекания всего процесса в целом также конечно. Теорема доказана.

Мощность множества  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  равна числу  $n_{0Q}$  элементов  $q_{0i}$ .

*Теорема 2.* Множество  $V_0 = \{v_{0h}\}$  конечно [11].

*Доказательство.* Множество  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  конечно, а каждому элементу  $q_{0i} \in Q_0$  могут быть поставлены в соответствие в точности два элемента  $v_{0h} \in V_0$ . Обозначим их  $v_h^{(+)}(q_{0i})$  и  $v_h^{(-)}(q_{0i})$  соответственно. Имеем  $V_0 = \{v_h^{(+)}(q_{0i})\} \cup \{v_h^{(-)}(q_{0i})\}$ . Очевидно, что  $\overline{\{v_h^{(+)}(q_{0i})\} \cup \{v_h^{(-)}(q_{0i})\}} = \emptyset$  и, следовательно,  $V_0$  конечно. Теорема доказана.

Мощность множества  $V_0$  равна числу  $n_{0V}$  элементов  $v_{0h}$ .

Из доказанных теорем следует, что множество  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  конечно.

*Теорема 3.* Множество  $V_0 = \{v_{0h}\}$  является метрическим пространством [11].

*Доказательство.* Так как  $v_{0h} \in V_0$  – суть точки на оси времени (числовой оси), то каждой паре  $(v_{0x}, v_{0y})$  можно поставить в соответствие число  $\rho(v_{0x}, v_{0y}) > 0$ , называемое интервалом (расстоянием) и удовлетворяющее аксиомам метрики:

- 1)  $\rho(v_{0x}, v_{0y}) \geq 0$ ;
- 2)  $\rho(v_{0x}, v_{0y}) = 0$ ;
- 3)  $\rho(v_{0x}, v_{0y}) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- 4)  $|\rho(v_{0x}, v_{0y})| = |\rho(v_{0y}, v_{0x})|$  – симметрия;
- 5)  $|\rho(v_{0x}, v_{0z})| \leq |\rho(v_{0x}, v_{0y})| + |\rho(v_{0y}, v_{0z})|$  – правило треугольника.

Теорема доказана.

*Следствие 1.* Метрика на множестве  $Q_0$  является следствием метрики на множестве  $V_0$ .

*Следствие 2.* Множества  $V_0 = \{v_{0h}\}$ ,  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  и  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  являются топологическими пространствами [1–3]. Введение топологии на множестве  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  позволяет рассматривать вопрос о топологических инвариантах системы  $H_0$ .

Одним из основных топологических свойств пространства является свойство компактности. Докажем это.

*Теорема 4.* Если  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  – множество элементов процесса, а  $V_0 = \{v_{0h}\}$  – множество моментов их начала и окончания, то множество  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  компактно [11].

Для доказательства теоремы 4 покажем вначале, что компактны множества  $Q_0$  и  $V_0$ . В качестве первой части доказательства используем достижения теоремы 6.1 Н. Стиррода и У. Чинна [15] и введем лемму.

*Лемма 4.1.* Любой замкнутый элемент  $\Delta v_{0h} \in V_0$  компактен. Доказательство леммы приведено в [15]. Результат доказательства: элемент  $\Delta v_{0h}$  компактен. Для дальнейших рассуждений воспользуемся теоремой 6.4 Стиррода и У. Чинна [15] и снова введем лемму.

*Лемма 4.2.* Пусть  $X$  – компактное пространство, а функция  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна, тогда образ  $f_x$  компактен [15]. Доказательство леммы приведено в [15].

Из лемм 4.1 и 4.2 с очевидностью вытекает, что любой замкнутый элемент сложного процесса  $q_{0i} \in Q_0$  компактен. Следовательно, множество  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  компактно.

Перейдем к доказательству второй части теоремы, что множество  $V_0 = \{v_{0h}\}$  компактно. Для этого составим множество  $V_0^* = \{v_h^{(+)}(q_{0i}); v_h^{(-)}(q_{0i})\}$ .

Очевидно, что  $V_0^*$  конечно и вполне покрывает множество, то есть  $V_0^*$  – конечное покрытие  $V_0$ . Следовательно,  $V_0$  компактно. Так как  $Q_0$  компактно и  $V_0$  компактно, очевидно, что  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  компактно [11]. Теорема доказана.

Поскольку топологическое пространство  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  является метрическим и компактным, то оно компактно в себе. В применении к процессу проектирования (а также к любому сложному процессу, протекающему во времени) это означает, что предельные точки процесса принадлежат самому процессу. Свойство компактности

эквивалентно свойствам множества быть замкнутым и ограниченным.

*Определение.* Множество  $X = R^m$  называется ограниченным, если оно содержится в некотором, достаточно большом шаре, то есть если существуют такие точки  $x_0$  и число  $r > 0$ , что  $X \subset N(x_0, r)$  [15].

*Определение.* Пусть  $X$  – множество в  $R^m$ . Подмножество  $A \subset X$  называется замкнутым в  $X$ , если его дополнение в  $X$  является открытым множеством в  $X$ . Короче,  $A$  замкнуто в  $X$ , если  $X - A$  открыто в  $X$  [15].

*Теорема 5.* Компактное множество  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  ограничено и замкнуто [12].

В качестве леммы 4.1 была использована первая часть теоремы 6.1 из [15].

Полностью теорема гласит: каждое компактное подмножество  $R^m$  ограничено и замкнуто в  $R^m$ . Из этой теоремы следует справедливость теоремы 5. Таким образом,  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  – замкнутое и ограниченное множество. Теорема доказана.

В применении к рассматриваемому сложному процессу полета или проектирования свойство ограниченности означает, что никакая последовательность элементов процесса не может устремиться в бесконечность. Замкнутость, в свою очередь, означает, что сложный процесс как множество включает и все свои граничные точки (замыкание множества). Ограниченность и замкнутость множества  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  являются топологическими инвариантами сложного процесса и позволяют установить некоторые свойства ориентированного графа, с помощью которого может быть представлена модель такого сложного процесса, как проектирование.

Покажем далее, что множество  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  как математический объект представляет собой граф.

*Определение.* Граф есть пара, состоящая из множества  $X$  и отображения  $\Gamma: X \rightarrow X$ , или, что то же самое, пара  $G(X, \Gamma)$  – суть граф, в котором  $X$  – множество вершин, а  $\Gamma: X \rightarrow X$  – множество ребер.

*Теорема 6.* Если  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  – множество элементов сложного процесса, а  $V_0 = \{v_{0h}\}$  – множество моментов их начала и окончания, то пара  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  – суть граф [11].

*Доказательство.* Очевидно, что каждому  $q_{0i} \in Q_0$  соответствует пара  $(v_h^{(+)}(q_{0i}); v_h^{(-)}(q_{0i}))$

и, если  $V_0^* = \{v_h^{(+)}(q_{0i}); v_h^{(-)}(q_{0i})\}$  – множество всех таких пар, то  $\overline{V_0^*} = \overline{\{v_h^{(+)}(q_{0i}); v_h^{(-)}(q_{0i})\}} = \emptyset$ .

Следовательно,  $V_0^* \equiv f(Q_0)$  и существует однозначное отображение  $\Gamma_V: V_0 \rightarrow V_0$ , такое, что все  $q_{0i} \in \Gamma_V(v_{0h})$ , а также существует  $f$  – однозначное отображение множества  $Q_0$  на множество  $V_0$ , такое, что все  $f_{q_{0i}} \in V_0$ .

Тогда по определению  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  – суть граф, в котором  $V_0$  – множество вершин, а  $Q_0$  – суть множество ребер. Теорема доказана.

Свойства графа  $H_0(V_0, Q_0)$  определяются, в частности, тем, что множество  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  замкнуто и ограничено.

*Определение.* Граф называется прогрессивно-ограниченным в вершине  $v_{0h}$ , если существует такое целое число  $m$ , что длина каждого пути, начинающегося в вершине  $v_{0h}$ , не превосходит  $m$ ; граф, прогрессивно-ограниченный в каждой своей точке, прогрессивно ограничен [13].

Значит, кроме того, что граф  $H_0(V_0, Q_0)$  – прогрессивно-ограниченный, он является еще и прогрессивно-конечным, хотя обратное утверждение неверно [13]. Все элементы процесса проектирования (или полета) имеют вполне определенную ориентацию во времени и пространстве. Отсюда следует, что  $H_0(V_0, Q_0)$  – ориентированный граф. Ребра ориентированного графа называются дугами.

Перейдем к рассмотрению вопроса о связности графа.

*Определение.* Топологическое пространство  $(X, Y)$  называется связным тогда и только тогда, когда множество нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств [1; 3].

Реальный сложный процесс (полет или проектирование) отличается от произвольного набора его элементов, прежде всего, взаимной зависимостью его отдельных элементов и участков между собой. Сложный процесс (полет или проектирование) невозможно представить себе в виде совершенно независимых участков, несмотря на то что при изучении сложного процесса и формировании его модели никогда нельзя утверждать, что нам известны все связи элементов сложного процесса между собой.

Процесс проектирования или полета всегда состоит из одной и только одной компоненты связности, а это, в свою очередь, означает, что

граф  $H_0(V_0, Q_0)$  должен быть всегда связным. Данные рассуждения можно применить к любому сложному процессу, модель которого мы хотим построить для его изучения.

*Определение.* Граф  $H_0(V_0, Q_0)$  называется полным, если  $(v_{0y}; v_{0x}) \notin Q_0 \Rightarrow (v_{0x}, v_{0y}) \in Q_0$ , то есть если любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении [13; 14].

*Определение.* Граф  $H_0(V_0, Q_0)$  называется сильно связным, когда для любых двух вершин  $v_{0x}$  и  $v_{0y}$  ( $v_{0x} \neq v_{0y}$ ) существует путь, идущий из  $v_{0x}$  в  $v_{0y}$  (или обратно) [13; 14].

*Теорема 7.* Граф  $H_0(V_0, Q_0)$ , в котором  $V_0 = \{v_{0h}\}$  – множество моментов начала и окончания элементов процесса проектирования, а  $Q_0$  – множество всех пар  $(v_{0x}; v_{0y})$ , таких, что  $v_{0x} < v_{0y}$  (в том числе и по транзитивности), сильно связан [11].

*Доказательство.*

*По определению.* Процесс проектирования (или полета), точнее, его модель, может включать в качестве элементов не все пары  $(v_{0x}; v_{0y})$ , такие, что  $v_{0x} < v_{0y}$ , а только необходимую их часть, которая обеспечивает связность графа  $H_0$ .

*Определение.* Частичным графом графа  $H'_0(V'_0, Q'_0) = H'_0(V'_0, \Gamma)$  называется граф  $H_0(V_0, Q_0) = H_0(V_0, \Delta)$ , где  $v_{0h} = \Gamma_{v_{0h}}$  при всех  $v_{0h} \in V_0$  [16].

Из теоремы 7 и приведенного выше определения следует, что граф  $H_0(V_0, Q_0)$  является частичным графом графа  $H'_0(V'_0, Q'_0)$ .

Очевидно, что в рассматриваемом частичном графе  $H_0(V_0, Q_0)$  не обязательно все  $(v_{0h}; v_{0g}) \in Q_0$ , то есть если граф  $H'_0(V'_0, Q'_0)$  связан, то из этого еще не следует, что связан граф  $H_0(V_0, Q_0)$ . Однако, имея в виду определение, принятое для всюду плотных и всюду не плотных элементов процесса проектирования, мы можем дополнить множество  $Q_0$  таким числом всюду не плотных элементов  $(v_{0x}; v_{0y}) \in Q_0$ , чтобы граф  $H_0(V_0, Q_0)$  был всегда связан [11].

Рассмотрим условия, необходимые для обеспечения связности графа  $H_0(V_0, Q_0)$ .

Максимально возможное число дуг в связном графе без петель определяется теоремой 2.2.4. Оре [14]:

$$N_Q(n_V, 1) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * n,$$

где  $n_V$  – число вершин в графе.

Из теоремы 2.2.5 [14] следует, что если в графе с  $n_V$  вершинами дуг больше, чем  $N_Q(n_V, 1) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * (n_V - 2)$ , то граф связан. Таким образом, имеет место следующая теорема [11].

*Теорема 8.* Для того чтобы граф  $H_0(V_0, Q_0)$ , в котором  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  – множество всюду плотных элементов процесса проектирования, а  $V_0 = \{v_{0h}\}$  – множество моментов их начала и окончания, был связан, достаточно дополнить множество  $Q_0$  всюду не плотными элементами процесса проектирования так, чтобы соблюдалось условие

$$N_q(n_V, 1) \geq n_{0Q} + \Delta N_Q(v_{0x}, v_{0y}) \geq N_Q(n_V, 2),$$

где  $n_{0Q}$  – число элементов процесса проектирования (всюду плотных) или мощность множества  $Q_0$ ;  $\Delta N_Q(v_{0x}, v_{0y})$  – дополнительное число всюду не плотных элементов процесса проектирования;  $n_V$  – число моментов начала и окончания элементов сложного процесса [11].

*Следствие 8.1.* Минимально необходимое число дополнительных всюду не плотных элементов процесса проектирования, обеспечивающих связность графа  $H_0(V_0, Q_0)$  не превышает

$$N_{Q_{\min}}(v_{0x}; v_{0y}) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * (n_V - 2) - n_{0Q}.$$

*Следствие 8.2.* Максимально-возможное дополнение графа  $H_0(V_0, Q_0)$  всюду не плотными элементами процесса проектирования (полета) определится формулой

$$N_{Q_{\max}}(v_{0x}; v_{0y}) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * n_V - n_{0Q}.$$

*Следствие 8.3.* Условие связности графа  $H_0(V_0, Q_0)$ , определенное теоремой 10, всегда может быть выполнено [11]. Действительно,

$$N_{Q_{\max}}(v_{0x}; v_{0y}) - N_{Q_{\min}}(v_{0x}; v_{0y}) = n_V - 1 > 0.$$

Это позволяет сформулировать следующую теорему.

*Теорема 9.* Проектирование как дискретно-непрерывный процесс, рассматриваемый в виде системы  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ , всегда может быть представлено связным графом  $H_0(V_0, Q_0)$  [11].

Итак, если проектирование (или полет) как дискретно-непрерывный процесс рассматривается в виде множества  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ , где  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  –

множество элементов процесса, а  $V_0 = \{v_{0h}\}$  – множество моментов их начала и окончания, то множество  $H_0$  конечно, ограничено и замкнуто и всегда может быть представлено в виде связного прогрессивно-ограниченного, ориентированного графа.

**Свойства системы отношений, определенных на множествах  $Q_0, V_0$  и  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$**

На множествах  $Q_0, V_0$  и  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  определены бинарные отношения вида  $a_x \leq a_y$ . Рассмотрим свойства этих отношений (отношений порядка).

*Определение.* Отношение типа  $a_x \leq a_y$  называется частичным упорядочением или отношением включения, при наличии следующих свойств [1; 3]:

- 1)  $a_x \leq a_y$  – рефлексивность;
- 2) если  $a_x \leq a_y$  и  $a_y \leq a_x$ , то  $a_x = a_y$  – антисимметричность;
- 3) если  $a_x \leq a_y$  и  $a_y \leq a_z$  – транзитивность.

*Определение.* Отношение  $a_x \leq a_y$  называется отношением строго упорядочения или строго включения, если оно удовлетворяет двум условиям [1; 3]:

- 1)  $a_x < a_y$  и  $a_y < a_x$  не имеют место одновременно;
- 2) транзитивность.

Отношение строго упорядочения называют также линейным упорядочением. Линейно упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если любое непустое подмножество в множестве  $X$  имеет первый элемент.

Далее будет приведен ряд теорем, которые позволят (с учетом того обстоятельства, что сложный процесс может быть представлен ориентированным графом  $H_0(V_0, Q_0)$ ) установить следующие свойства множеств  $Q_0$  и  $V_0$  системы  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  и их порядка:

- 1) множество  $V_0$  может быть определено в том и только в том случае, если задано множество  $Q_0$  и отношение порядка на множестве  $Q_0$ ;
- 2) способ упорядочения (нумерации элементов) множества  $V_0$  вполне определяется способом упорядочения (нумерации элементов) множества  $Q_0$ ;
- 3) для того чтобы множество  $V_0$  было линейно упорядочено, необходимо и достаточно, чтобы было линейно упорядоченным множество  $Q_0$ .

Отсюда следует, что если множество  $V_0$  линейно упорядочено, то и множество  $Q_0$  линейно упорядочено.

Реальный процесс проектирования в действительности всегда, так или иначе, организован, то есть упорядочен. Из этого следует теорема 10.

*Теорема 10.* Множество  $V_0$  линейно упорядочено.

Доказательство теоремы приведено в [11].

Из сказанного выше и теоремы 10 получаем, что множество  $Q_0$  также линейно упорядочено. Это, в частности, означает, что в ориентированном графе  $H_0(V_0, Q_0)$  не должно быть (и не может быть) контуров. В реальном процессе проектирования (или полета) возможное наличие контуров означает, что может иметь место последовательное выполнение одинаково обозначенных элементов, однако это не означает повторения одних и тех же элементов.

Действительно, если во время проектирования (полета) или другого сложного процесса некоторые элементы повторяются, то такое повторение, по сути, является выполнением нового элемента, так как при этом неминуемо меняется по крайней мере интервал времени реализации и область пространства, в которых производится «повторное» выполнение элемента. Подобное содержание имеют контуры в итерационных вычислительных процессах и системах с обратной связью, реализующих дискретно-непрерывные процессы. Представление такого «повторения» в виде графа с контурами позволяет существенно сократить размерность графического или матричного представления графа.

Поскольку множества  $Q_0$  и  $V_0$  линейно упорядочены, то каждое из них может иметь порядковые типы [2]. Порядковый тип множества  $Q_0$  может быть определен как множество вариантов упорядочения на множестве  $Q_0$  или множество вариантов процесса проектирования.

Введем обозначения:  $R_0$  – порядковый тип множества  $Q_0$ ,  $F_0$  – порядковый тип множества  $V_0$ . Способ задания порядковых типов может быть различным. Удобно задавать порядковые типы в матричной форме с помощью матриц смежности или матриц отношения следования. Рассмотрим вопросы вполне упорядочения множеств  $Q_0$  и  $V_0$ .

На основании теоремы Цермело [14] справедливо утверждение: множество  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  может быть вполне упорядочено. Следовательно, множество  $Q_0$  имеет минимальный элемент, а лю-



бое подмножество  $X_0$  множества  $Q_0$  имеет первый элемент. Действительно, процесс проектирования (или полета) в целом и любой его участок или этап имеют минимальный или первый элемент. Порядковый тип вполне упорядоченного множества называется порядковым числом [2].

Введем обозначение  $\Omega_0$  – порядковое число множества  $Q_0$ .

Наличие порядкового числа  $\Omega_0$  означает, что элементы  $q_{0i} \in Q_0$  можно перенумеровать, притом несколькими способами. Все элементы любого конкретного процесса полета (проектирования) можно перенумеровать, к тому же в нескольких вариантах, в соответствии с реализацией конкретного сложного процесса.

*Теорема 11.* Множество  $Q_0 = \{q_{0i}\}$  индуктивно.

Доказательство теоремы приведено в [11].

На основании леммы Цорна [2; 13] или принципа максимальной Хаусдорфа – Куратовского [2], множество  $Q_0$  имеет максимальный элемент, а на основании теоремы Цорна, любое непустое подмножество множества  $Q_0$  имеет по крайней мере один максимальный элемент. Для реального сложного процесса всегда можно указать элемент, определяющий начало процесса, и элементы, определяющие начало и окончание любого участка сложного процесса.

Поскольку множество  $V_0$  линейно упорядочено, то на множестве  $V_0$  определены отношения антисимметрии и транзитивности. Как и множество  $Q_0$ , множество  $V_0$  может быть вполне упорядочено, следовательно, множество  $V_0$  имеет минимальный элемент. Любое подмножество  $Y_0$  множества  $V_0$  имеет первый элемент. Множество  $V_0$  имеет порядковое число. Элементы множества  $V_0$  можно перенумеровать, притом несколькими способами, однако способ нумерации элементов множества  $V_0$  определяется способом нумерации элементов множества  $Q_0$ . Обозначим порядковое число множества  $V_0$  через  $\Lambda_0$ .

*Теорема 12.* Множество  $V_0 = \{v_{0h}\}$  индуктивно.

Доказательство теоремы приведено в [11].

Из вышеприведенных теорем следует, что отношения порядка на множествах  $Q_0$  и  $V_0$ , которые определяются порядковыми типами  $R_0$  и  $F_0$ , не могут быть независимыми. Это означает, что порядковый тип  $F_0 = V_0 \times V_0$  не может быть задан независимо от множества  $Q_0$  и его порядкового типа  $R_0 = Q_0 \times Q_0$ .

## Заключение

Основной результат исследования – показать, что промежуточная, дискретно-непрерывная структура необходима. Только с введением такой топологической структуры получается доказать, что сложный процесс или система, а также модель представляют собой прогрессивно-ограниченный ориентированный граф.

Таким образом, мы получаем возможность перевести исследование сложных процессов в область комбинаторики и воспользоваться достижениями теории графов, топологии и т. п., чтобы установить топологические инварианты или критерии структурного подобия для возможности сравнения между собой как различных сложных процессов, так и созданных для их реализации продуктов.

Сложные процессы как дискретно-непрерывные процессы и их модели имеют следующие топологические инварианты или критерии структурного подобия:

1) мощность множеств  $Q_0$  и  $Q$ . Обозначим их соответственно  $n_{0Q}$  и  $n_Q$ ;

2) замкнутость множеств  $Q_0$  и  $Q$ . Это свойство не имеет численной характеристики, однако показывает, что все граничные точки сложного процесса принадлежат этому процессу. Каждой граничной точке сложного процесса взаимнооднозначно соответствует одна из граничных точек графа  $H(V, Q)$ , представляющего собой модель сложного процесса;

3) ограниченность множеств  $Q_0$  и  $V_0$  накладывает на граф  $H(V, Q)$  требование отсутствия контуров;

4) связность множества  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$  требует, чтобы граф  $H(V, Q)$  также был связным, то есть состоял из единственной компоненты;

5) порядковый тип множества  $Q_0$ . Сложный процесс и его модель будут только тогда подобны, когда равны порядковые типы множеств элементов  $Q_0$  и  $Q$ , то есть  $R_0 = R$ :

а) временная программа сложного процесса есть не что иное, как вариант порядкового типа  $F_0$  множества  $V_0$ . Поскольку  $F_0$  зависит от  $R_0$ , то невозможно формирование временной программы независимо от порядкового типа  $R_0$ . Таким образом, наличие логической структуры сложного процесса, определяющей порядковый тип  $R_0 = Q_0 \times Q_0$ , является необходимым условием формирования временной программы сложного процесса;

б) поскольку порядковый тип  $F_0$  вполне определяется порядковым типом  $R_0$  при заданном  $Q_0$ , то должно существовать однозначное соответствие  $f$ , такое, что  $f: R_0 \rightarrow F_0$ . Следовательно, для формирования временной программы сложного процесса при известных  $Q_0$  и  $R_0$  могут быть определены и заданы формализованные в полном виде правила (алгоритмы), допускающие автоматизированное применение;

в) если порядковый тип  $R_0$  не задан, то формирование временной программы процесса проектирования, то есть определение  $F_0$  возможно только при одновременном определении  $R_0$  и, следовательно, не может выполняться по правилам, формализованным в конечном виде, а потребует применения каких-либо итерационных методов.

Цикломатическое число системы  $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ , представленной на модели в виде графа  $H(V, Q)$ , определяется формулой  $\nu(H) = m_H - n_H + 1$ . Этот инвариант является особым. Требование равенства цикломатических чисел сложного процесса и модели не всегда обязательно.

#### Список литературы

1. Kelley D.L. General topology. New York, Toronto, London: D. van Nostrand Company, Inc., 1955. 298 p.
2. Куратовский К., Мостовский А. Топология. М.: Мир, 1970. 416 с.
3. Viro O.Ya., Ivanov O.A., Netsvetaev N.Yu., Kharlamov V.M. Elementary topology. Problem textbook. AMS, 2008. 400 p.

#### Сведения об авторе

Малинина Наталья Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 604, Аэрокосмический факультет, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. ORCID: 0000-0003-0116-5889, eLIBRARY AuthorID: 502378. E-mail: malinina806@gmail.com

4. Корухов В.В. Модель дискретно-непрерывного пространства-времени // Философия науки. 2001. № 2 (10). С. 4.

5. Корухов В.В., Шарыпов О.В. Структура пространства-времени и проблема физического вакуума: состояние и перспективы // Философия науки. 2006. № 1 (28). С. 20–36.

6. Chorafas D.N. Systems and simulation. 1st ed. Academic Press, 1965. 503 p.

7. Quade E.S. Analysis for military decisions. Santa Monica: RAND Corporation, 1964. 389 p.

8. Малинина Н.Л. Математические аспекты процесса проектирования // Прикладная геометрия, инженерная графика, компьютерный дизайн. 2006. № 3 (5). С. 12–18.

9. Hill P.H. The science of engineering design. New York: Tufts University; Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970. 264 p.

10. Мусеев Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 223 с.

11. Малинина Н.Л., Малинин Л.И. Топологические свойства процесса проектирования // Труды МАИ. 2008. № 30. С. 3.

12. Малинин Л.И., Малинина Н.Л. Изоморфизм графов в теоремах и алгоритмах. М.: URSS, 2009. 249 с.

13. Berge C. The theory of graphs and its applications. London: Methuen; New York: Wiley, 1962. 247 p.

14. Ore O. Theory of graphs. Providence: American Mathematical Society, 1962. 270 p.

15. Chinn W.G., Steenrod N.E. First concepts of topology: the geometry of mappings of segments, curves, circles, and disks. Washington: Mathematical Association of America, 1966. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859339>

16. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгоритмов. М.: Наука, 1984. 282 с.



DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-283-292  
УДК 629.5.083.5

Научная статья / Research article

## Алгебраические поверхности для судовых корпусов

С.Н. Кривошапко , В.Н. Иванов 

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
✉ sn\_krivoshapko@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 12 августа 2021 г.  
Доработана: 1 ноября 2021 г.  
Принята к публикации: 11 ноября 2021 г.

### Ключевые слова:

гидродинамическая поверхность, батокс, ватерлиния, мидель-шпангоут, судовой корпус, оптимизация формы

**Аннотация.** Выбор оптимальной формы поверхности для судовых корпусов – одна из главных задач корабельных архитекторов и проектировщиков. Часто выбор формы основывается на эмпирических формулах или интуиции проектировщика. В статье приводится методика определения явных алгебраических уравнений теоретической формы корпуса судна с наперед заданными тремя главными поперечными сечениями, совпадающими с ватерлинией, главным батоксом и мидель-шпангоутом. Эти алгебраические поверхности названы гидродинамическими. Методика проиллюстрирована для трех троек главных сечений корпуса судна, то есть построены девять гидродинамических поверхностей. Для удобства компьютерного моделирования все явные алгебраические уравнения переведены в параметрическую форму. С их помощью визуализированы девять судовых поверхностей, предлагаемых к внедрению. Изменяя константы, содержащиеся в уравнениях поверхностей, то есть корректируя формы трех главных геометрических параметров корпуса судна, можно подобрать наиболее рациональную форму судовой поверхности в первом приближении, а затем приступить к планированию цилиндрических вставок или комбинировать носовую и кормовую оконечности судна из различных фрагментов алгебраических поверхностей, но с одинаковыми мидель-шпангоутами. Исследование охватывает только геометрические вопросы проектирования теоретической формы судна.

### Для цитирования

Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Алгебраические поверхности для судовых корпусов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 283–292. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-283-292>

## Analytical surfaces for ship hulls

Sergey N. Krivoshapko , Vyacheslav N. Ivanov 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia  
✉ sn\_krivoshapko@mail.ru

### Article history

Received: August 12, 2021  
Revised: November 1, 2021  
Accepted: November 11, 2021

**Abstract.** The choice of optimal shape of ship hull surface is one of the main problems of ship architects and designs. A choice of the form is based on empirical formulae or on intuition of designers. In the article a method of determination of explicit algebraic equations of theoretical



**Keywords:**

hydrodynamic surface, buttock line, waterline, midship section, ship hull, optimization of shape

shape of ship hull with three main cross-sections given in advance and coinciding with the design waterline, the midship section, and with the main buttock line is given. The forms of the lines in the main cross-sections are chosen from conditions taken in advance. These surfaces are called hydrodynamic. A method is illustrated for three three of main cross-sections of the ship hulls, i.e. nine hydrodynamic surfaces were constructed. All algebraic equations were converted to parametrical form for comfort of computer modelling. With their help, all nine ship surfaces proposed for the introduction were visualized. Having changed constants containing in the surface equations, i.e. correcting the forms of three main geometric parameters of ship hull, one can select the most rational shape of hull surface for the first approach. Further, it is possible to begin planning parallel middle bodies or to combine bow and stern extremities of a ship from different fragments of algebraic surfaces but with the same midship sections. In a paper, only geometrical problems of design of theoretical hull shape are described.

**For citation**

Krivoshapko SN, Ivanov VN. Analytical surfaces for ship hulls. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3): 283–292. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-283-292>

**Введение**

В настоящее время построено много судов различного назначения с разнообразными формами судовых корпусов (рис. 1). Выбор формы корпуса обусловлен многими факторами: назначение судна, очертание ватерлинии, сопротивление воды, трудоемкость изготовления [1], разделение на конструктивные модули [2], скорость движения судна [3], архитектурные требования и др. Например, в [4] приводятся результаты испытаний 20 моделей корабельных корпусов и показывается большое влияние главных геометрических параметров на гидродинамические качества корпуса.

Некоторые конструкторы предлагают использовать для формообразования судовых корпусов аэро/гидродинамические поверхности с тремя наперед заданными плоскими кривыми, лежащи-

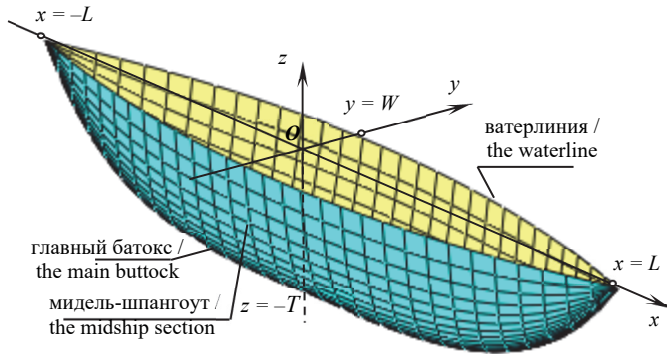
ми в главных взаимно перпендикулярных сечениях корпуса судна (рис. 2). Наиболее активно в этом направлении работают Е.Я. Авдоньев [5; 6] и С.М. Протодяконов [7], С.Н. Кривошапко [8; 9], А.Ю. Логинов [10], Kwang Hee Ko [11] и др.

Имея три плоские кривые, которые совпадают с мидель-шпангоутом (в сечении плоскостью  $yOz$ ), главным батоксом (в сечении диаметральной плоскостью  $xOz$ ) и ватерлинией (в сечении плоскостью  $xOy$ ), можно построить три отличающиеся друг от друга алгебраические поверхности. Одну из них можно взять в первом приближении за форму проектируемого судового корпуса. Далее по необходимости можно приступить к формированию цилиндрической вставки или принять форму корпуса, состоящую из двух разных поверхностей (носовая часть и кормовая оконечность) и стыкующихся по мидель-шпангоуту.



**Рис. 1.** Формы судовых корпусов:  
а – грузовое судно; б – пассажирское судно; в – корпус строящейся яхты  
(фотографии б и в С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванова)

**Figure 1.** The shapes of ship hulls:  
а – a cargo vessel; б – a passenger ship; в – a hull of the building yacht  
(photos б and в by S.N. Krivoshapko, V.N. Ivanov)



**Рис. 2.** Гидродинамическая поверхность с каркасом из квадратной параболы, параболы 4-го порядка и параболы 4-го порядка  
**Figure 2.** A hydrodynamic surface with the frame from the second order parabola, the fourth order parabola, and the fourth order parabola



**Рис. 3.** Корпус судна, аппроксимированный кусками торсовой обшивки (фотография с сайта <http://www.ladverf.ru/page/3/>)  
**Figure 3.** The ship hull that is approximated by the fragments of torse skin (photo from the website <http://www.ladverf.ru/page/3/>)

В [12] используется метод оптимизации формы корпуса, когда базовая форма выбирается как первый шаг к получению новой формы путем итерации.

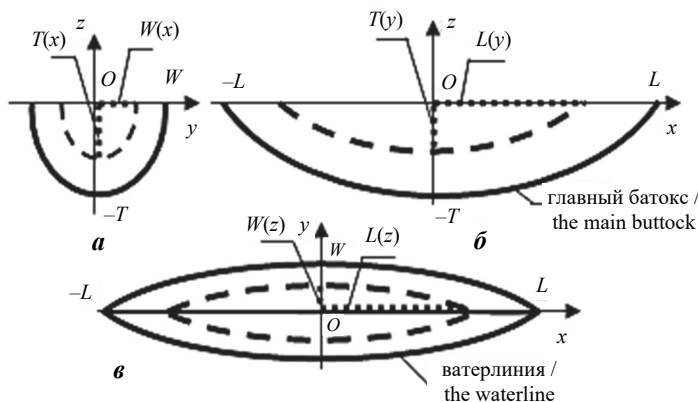
В настоящей статье будем называть рассматриваемые поверхности просто гидродинамическими, как в [9], а более точно – гидродинамическими поверхностями с главным каркасом из заданных плоских кривых, совпадающими с ватерлинией, мидель-шпангоутом и главным батоксом (килевой линией).

Гидродинамические поверхности не могут быть разворачивающимися [13], что удорожает формообразование корпуса, поэтому их часто аппроксими-

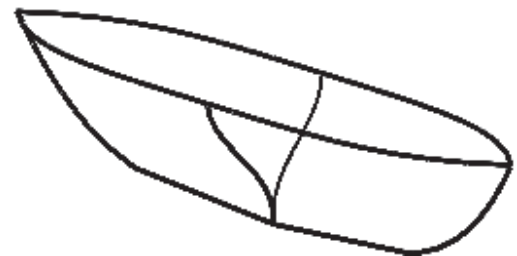
руют кусками разворачивающихся (торсовых) поверхностей (рис. 3), что мало влияет на ходовые качества судна [14], но упрощает их изготовление [15].

### 1. Примеры алгебраических поверхностей с одинаковым каркасом из трех плоских линий

При построении гидродинамических поверхностей будем использовать методику, изложенную в [5] и апробированную в [9]. Все основные наперед заданные габариты ( $T$ ,  $W$ ,  $L$ ) проектируемого судового корпуса показаны на рис. 4.



**Рис. 4.** Главные сечения гидродинамической поверхности  
**Figure 4.** The main sections of hydrodynamic surface



**Рис. 5.** Главный каркас из кривых (1)–(3)  
**Figure 5.** The main frame from the (1)–(3) curves

### Алгебраические поверхности с каркасом из параболы 4-го порядка, кривой 6-го порядка с особой точкой и параболы 4-го порядка

Пусть задан каркас из трех плоских кривых (рис. 5):

– ватерлиния в форме параболы 4-го порядка в плоскости  $xOy$ :

$$y = \pm W(1 - x^4/L^4); \quad (1)$$

– мидель-шпангоут в форме кривой 6-го порядка в плоскости  $yOz$ :

$$z = -T\sqrt{1 \mp (y/W)^{1/3}}; \quad (2)$$

– главный батокс в форме параболы 4-го порядка в плоскости  $xOz$ :

$$z = T \left( \frac{x^4}{L^4} - 1 \right), \quad (3)$$

тогда уравнение плоской кривой в сечении  $z = \text{const}$  (рис. 4, в) будет

$$y = \pm W(z) \left( 1 - \frac{x^4}{L(z)^4} \right), \quad (4)$$

где

$$L(z) = L^4 \sqrt{1 + z/T} \text{ из (3),} \quad (5)$$

$$W(z) = -W(z^2 - T^2)^3 / T^6 \text{ из (2).} \quad (6)$$

Подставляя значения  $L(z)$  и  $W(z)$  из формул (5), (6) в формулу (4), получаем уравнение искомой алгебраической бортовой поверхности:

$$y = \mp \frac{W}{T^6} (z^2 - T^2)^3 \left[ 1 - \frac{x^4 T}{L^4(z + T)} \right]. \quad (7)$$

Представим уравнение (7) в параметрической форме:

$$z = -uT, x = x(u, v) = vL^4 \sqrt{1 - u},$$

$$y = y(u, v) = \pm (1 - u^2)^3 (1 - v^4) W, \quad (8)$$

$$0 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1 \text{ (рис. 6, а).}$$

Уравнение плоской кривой в сечении  $x = \text{const}$  (рис. 4, а) будет по аналогии с (2)

$$z = -T(x) \sqrt{1 \mp \left( \frac{y}{W(x)} \right)^{1/3}}, \quad (9)$$

тогда

$$W(x) = W \left( 1 - \frac{x^4}{L^4} \right) \text{ из (1),} \quad (10)$$

$$T(x) = -T \left( \frac{x^4}{L^4} - 1 \right) \text{ из (3).} \quad (11)$$

Подставляя два последних выражения в (9), находим

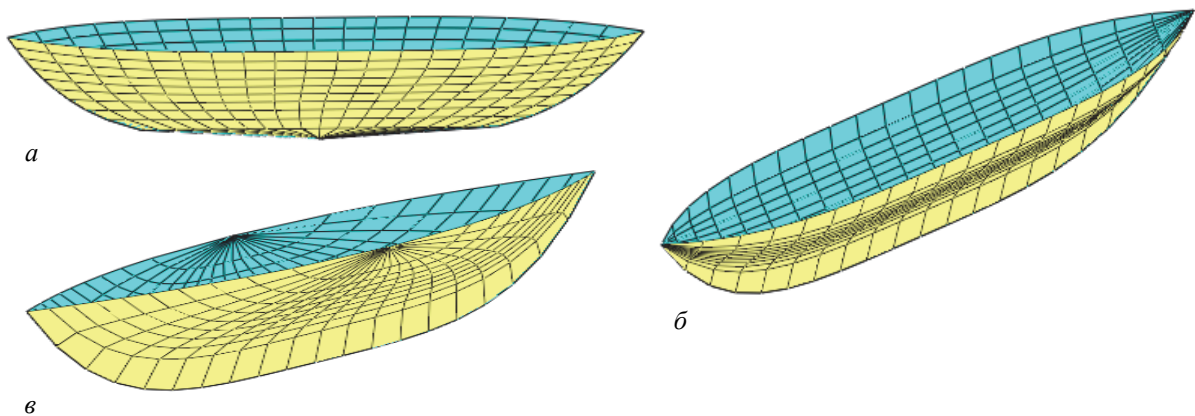
$$z = T \left( \frac{x^4}{L^4} - 1 \right) \sqrt{1 - \left( \frac{y}{W(1 - x^4/L^4)} \right)^{1/3}}. \quad (12)$$

Это и есть уравнение второй гидродинамической поверхности с каркасом (1)–(3). Представим уравнение поверхности (12) в параметрической форме:

$$x = uL, y = y(u, v) = vW(1 - x^4/L^4) = vW(1 - u^4),$$

$$z = z(u, v) = -T(1 - u^4) \sqrt{1 \mp v^{1/3}}, \quad (13)$$

$$-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1 \text{ (рис. 6, б).}$$



**Рис. 6.** Алгебраические бортовые поверхности с каркасом из параболы 4-го порядка, кривой 6-го порядка с особой точкой и параболы 4-го порядка:  
 а – поверхность построена по (8); б – поверхность построена по (13); в – поверхность построена по (17)  
**Figure 6.** The algebraic board surfaces with the frame from the 4th order parabola, the 6th order parabola with a singular point, and the 4th order parabola:  
 а – a surface was built by the (8); б – a surface was built by the (13); в – a surface was built by the (17)

Уравнение плоской кривой в сечении  $y = \text{const}$  (рис. 4, б) будет по аналогии с (3)

$$z = T(y) \left( \frac{x^4}{L(y)^4} - 1 \right), \quad (14)$$

где

$$T(y) = T \sqrt{1 \mp (y/W)^{1/3}},$$

$$L(y) = L^4 \sqrt{(W \mp y)/W} \text{ из (1)}. \quad (15)$$

Подставляя выражения (15) в (14), находим алгебраическое уравнение третьей гидродинамической поверхности с каркасом (1)–(3):

$$z = T \sqrt{1 \mp \sqrt[3]{\frac{y}{W}} \cdot \left[ \frac{W}{L^4(W \mp y)} x^4 - 1 \right]}. \quad (16)$$

Представим уравнение поверхности (16) в параметрической форме:

$$y = uW, x = x(u, v) = vL^4 \sqrt{(W \mp y)/W} = vL^4 \sqrt{1 \mp u},$$

$$z = z(u, v) = -T \sqrt{1 \mp u^{1/3}} (1 - v^4), \quad (17)$$

$$-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1 \text{ (рис. 6, в)}.$$

Во всех полученных формулах верхние знаки для правой части корпуса (относительно плоскости  $xOz$ ), а нижние – для левой части корпуса (рис. 4, б).

На рис. 6 представлены все три гидродинамические поверхности с каркасом (1)–(3), построенные по (8), (13) и (17).

### **Алгебраические поверхности с каркасом из параболы 4-го порядка, пулевидной кривой и параболы 4-го порядка**

Рассмотрим алгебраические поверхности с каркасом из параболы 4-го порядка (1), пулевидной кривой

$$z = \pm \frac{yT \sqrt{a^2 - W^2}}{W \sqrt{a^2 - y^2}} - T \quad (18)$$

в качестве мидель-шпангоута в плоскости  $yOz$  и параболы 4-го порядка (3) в плоскости  $xOz$ . В (18) через  $a$  обозначена произвольная константа, но  $a > W$ . Параметр  $a$  можно определить, задав какое-нибудь условие. Например, заранее задать значение угла наклона  $\alpha_0$  касательной к кривой (18) к оси  $Oy$  в точке  $y = 0$ , то есть  $\text{tg}\alpha_0 = dz/dy$  считать известным.

Уравнение плоской кривой в сечении  $z = \text{const}$  (рис. 4, в) будет

$$y = \pm W(z) \left( 1 - \frac{x^4}{L(z)^4} \right), \quad (19)$$

где

$$L(z) = L^4 \sqrt{1 + z/T} \text{ из (3)}, \quad (20)$$

$$W(z) = \frac{aW(z + T)}{\sqrt{T^2(a^2 - W^2) + W^2(z + T)^2}}. \quad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в (19), получим алгебраическое уравнение первой гидродинамической поверхности с каркасом (1), (18), (3)

$$y = \pm \frac{aW(z + T - x^4 T/L^4)}{\sqrt{T^2(a^2 - W^2) + W^2(z + T)^2}}. \quad (22)$$

Представим уравнение поверхности (22) в параметрической форме (рис. 7, а):

$$z = -uT, x = x(u, v) = vL^4 \sqrt{1 - u},$$

$$y = \pm \frac{aW(1 - u)(1 - v^4)}{\sqrt{(a^2 - W^2) + W^2(1 - u)^2}}, \quad (23)$$

$$0 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1.$$

Уравнение плоской кривой в сечении  $x = \text{const}$  (рис. 4, а) будет по аналогии с (18)

$$z = \pm \frac{yT(x) \sqrt{a^2 - W(x)^2}}{W(x) \sqrt{a^2 - y^2}} - T, \quad (24)$$

где  $W(x)$  находится по (10), а  $T(x)$  – по (11). Подставляя эти значения (10) и (11) в (24), находим

$$z = \pm \frac{T}{W} \sqrt{a^2 - W^2 \left( 1 - \frac{x^4}{L^4} \right)^2} \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} - T \left( 1 - \frac{x^4}{L^4} \right). \quad (25)$$

Для удобства построения поверхности (25) на компьютере представим ее уравнение в параметрической форме (рис. 7, б):

$$x = uL, y = y(u, v) = vW(1 - x^4/L^4) = vW(1 - u^4),$$

$$z = z(u, v) =$$

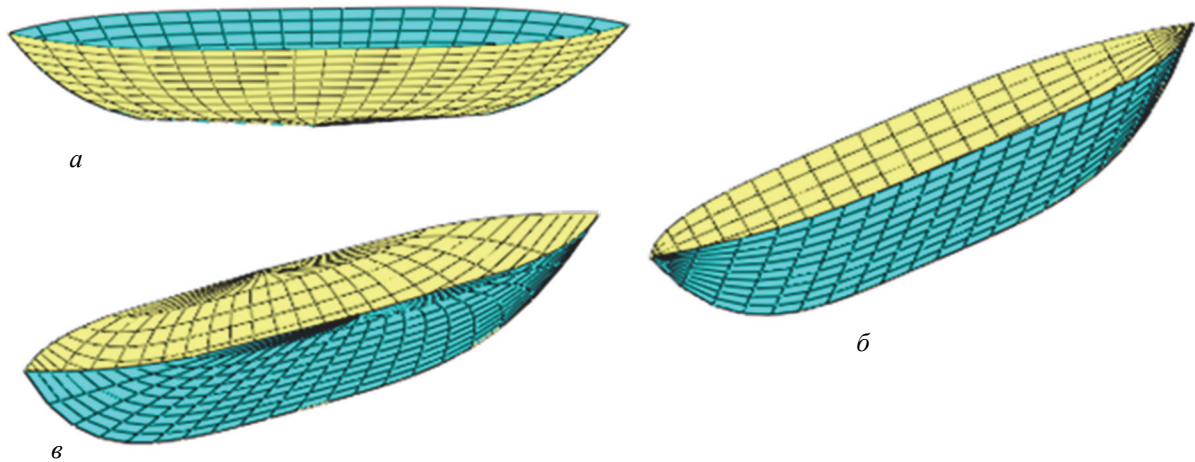
$$= -T(1 - u^4) \left[ 1 \mp v \cdot \sqrt{\frac{a^2 - W^2(1 - u^4)^2}{a^2 - v^2 W^2(1 - u^4)^2}} \right]. \quad (26)$$

И наконец, рассмотрим кривую в сечении поверхности плоскостью  $y = \text{const}$ . Уравнение кривой получено в виде (14), значения  $L(y)$  определяются по одной из (15), а

$$T(y) = \pm \frac{yT}{W} \frac{\sqrt{a^2 - W^2}}{\sqrt{a^2 - y^2}} - T, \quad (27)$$

где  $T(y)$  это  $z$  в формуле (18), рис. 4, б. Подставляя значения  $T(y)$  из (27) и  $L(y)$  из (15) в уравнение кривой (14), получим уравнение третьей гидродинамической поверхности с заданным каркасом (1), (18), (3):

$$z = -T \left( \pm y \frac{\sqrt{a^2 - W^2}}{\sqrt{a^2 - y^2}} - W \right) \left[ \frac{x^4}{L^4(W \mp y)} - \frac{1}{W} \right]. \quad (28)$$



**Рис. 7.** Алгебраические поверхности с каркасом из параболы 4-го порядка, пулевидной кривой и параболы 4-го порядка: а – поверхность построена по (23); б – поверхность построена по (26); в – поверхность построена по (29)  
**Figure 7.** The algebraic board surfaces with the frame from the 4th order parabola, the bullet surface, and the 4th order parabola: а – a surface was built by the (23); б – a surface was built by the (26); в – a surface was built by the (29)

### Алгебраические поверхности с каркасом из парабол 4-го порядка

Пусть все три плоские кривые главного каркаса представляют собой параболы 4-го порядка, то есть в плоскости  $xOy$  лежит парабола (1), в плоскости  $yOz$  – парабола

$$z = -T \left( 1 - \frac{y^4}{W^4} \right), \quad (30)$$

а в плоскости  $xOz$  парабола (3).

В сечении поверхности плоскостью  $z = \text{const}$  должна лежать кривая (4), где  $L(z)$  находится по (5), а

$$W(z) = W \sqrt[4]{1 + z/T}. \quad (31)$$

Уравнение поверхности (27) можно представить в параметрической форме (рис. 7, в):

$$y = y(u) = uW, \quad x = x(u, v) = vL^4 \sqrt[4]{1 \mp u},$$

$$z = z(u, v) = \left( \pm u \sqrt[4]{\frac{a^2 - W^2}{a^2 - u^2 W^2}} - 1 \right) T [1 - v^4]. \quad (29)$$

Как и в первом примере, верхние знаки для правой части корпуса (относительно плоскости  $xOz$ ), а нижние – для левой части корпуса (рис. 4, а).

На рис. 7 представлены все три гидродинамические бортовые поверхности с каркасом (1), (18), (3), построенные по (23), (26) и (29).

В этом случае уравнение первой гидродинамической поверхности получаем из (4):

$$y = \pm W^4 \sqrt[4]{1 + \frac{z}{T}} \left[ 1 - \frac{x^4}{L^4 \left( 1 + \frac{z}{T} \right)} \right]. \quad (32)$$

Запишем уравнение поверхности (32) в параметрической форме (рис. 8, а):

$$z = z(u) = -uT,$$

$$x = x(u, v) = vL^4 \sqrt[4]{1 - u},$$

$$y = y(u, v) = \pm \sqrt[4]{1 - u} (1 - v^4). \quad (33)$$

Следуя подробно рассмотренной ранее методике, запишем уравнение кривой, лежащей в



плоскости  $x = \text{const}$ . Это уравнение записывается на основании (30):

$$z = -T(x) \left( 1 - \frac{y^4}{W(x)^4} \right), \quad (34)$$

где  $W(x)$  определяется по (10), а  $T(x)$  – по (11). Подставляя  $W(x)$  и  $T(x)$  в (34), находим

$$z = -T \left[ 1 - \frac{x^4}{L^4} - \frac{y^4}{W^4(1 - x^4/L^4)^3} \right]. \quad (35)$$

Для удобства компьютерного построения поверхности (34) запишем ее параметрические уравнения (рис. 8, а):

$$x = x(u) = uL,$$

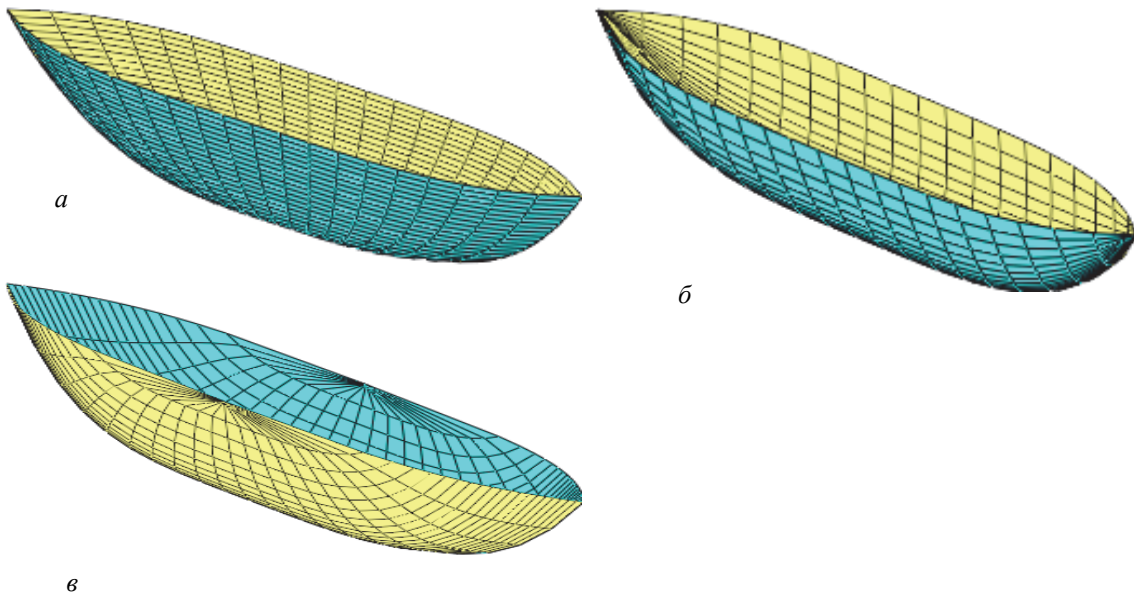
$$y = y(u, v) = vW(1 - u^4),$$

$$z = z(u, v) = -T[(1 - u^4)(1 - v^4)]. \quad (36)$$

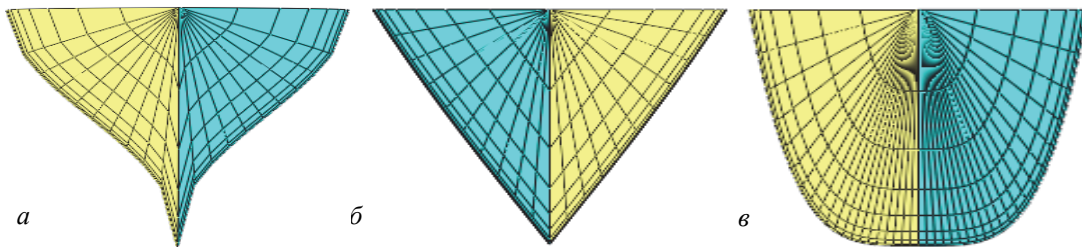
Третья поверхность с каркасом из парабол 4-го порядка формируется семейством плоских парабол, лежащих в параллельных плоскостях  $y = \text{const}$ , то есть ее уравнение можно записать по аналогии с уравнением (3) как

$$z = T(y) \left( \frac{x^4}{L(y)^4} - 1 \right), \quad (37)$$

$$\text{где } T(y) = T \left( 1 - \frac{y^4}{W^4} \right), L(y) = L^4 \sqrt{1 \mp \frac{y}{W}}.$$



**Рис. 8.** Алгебраические поверхности с каркасом из парабол 4-го порядка:  
 а – поверхность построена по (33); б – поверхность построена по (36); в – поверхность построена по (39)  
**Figure 8.** The algebraic board surfaces with the frame from the 4th order parabolas:  
 а – a surface was built by the (33); б – a surface was built by the (36); в – a surface was built by the (39)



**Рис. 9.** Проекция рассмотренных гидродинамических поверхностей на плоскость  $yOz$ :  
 а – поверхность представлена на рис. 6, б; б – поверхность представлена на рис. 7, б; в – поверхность представлена на рис. 8, б  
**Figure 9.** The projections of the shown hydrodynamic surfaces on the  $yOz$  plane:  
 а – a surface is presented on Figure 6, б; б – a surface is presented on Figure 7, б; в – a surface is presented on Figure 8, б

Подставляя последние два выражения в (37), получаем явное уравнение искомой гидродинамической поверхности:

$$z = -T \left( 1 - \frac{y^4}{W^4} \right) \left( 1 - \frac{x^4}{L^4 \left( 1 \mp \frac{y}{W} \right)} \right). \quad (38)$$

Запишем уравнение поверхности (38) в параметрической форме (рис. 8, *в*):

$$\begin{aligned} y &= y(u) = uW, \\ x &= x(u, v) = vL^4 \sqrt[4]{1 \mp \frac{y}{W}}, \\ z &= z(u, v) = -T(1 - u^4)(1 - v^4). \end{aligned} \quad (39)$$

Все три гидродинамические бортовые поверхности с каркасом (1), (30), (3), построенные по (33), (36) и (39), показаны на рис. 8.

Для лучшего представления о формах рассмотренных корпусов судов на рис. 9 продемонстрированы проекции корпусов на плоскость  $yOz$  (рис. 4, *а*).

## 2. Результаты

На трех примерах показана методика определения трех троек новых гидродинамических поверхностей с одинаковым главным каркасом из заданных заранее плоских кривых (рис. 6–8). Получены их явные и параметрические уравнения. Все поверхности визуализированы с помощью компьютерного комплекса MathCad [16]. Полученные гидродинамические поверхности могут привлечь внимание судовых архитекторов при проектировании корпусов судов различного назначения, яхт и лодок. Апробированная методика может быть применена для конструирования корпусной поверхности в первом приближении. Однако, когда поверхность корпуса корабля в первом приближении выбрана, появляется масса других проблем, требующих решения. Это подробно рассмотрено на примере двух судовых корпусов в [17].

Помимо представленных в статье девяти новых гидродинамических поверхностей, известны около десятка поверхностей, предложенных Е.Я. Авдоньевым [5; 7], шесть поверхностей описаны ранее С.Н. Кривошапко [9], одна поверхность с главным батоксом в форме прямой линии изучается в [18]. Аналогичная гидродинамическая поверхность, известная в научной литературе под названием Wigley hull, имеет мидель-шпангоут и

ватерлинию в форме квадратной параболы, а главный батокс представляет собой прямую линию. Гидродинамические поверхности составляют отдельный класс [8]. В основном, как показали результаты данной статьи, они задаются в неортогональной криволинейной системе координат. Их можно отнести также к разновидностям вела-роидальных поверхностей [19].

## Заключение

Предложены для рассмотрения девять новых гидродинамических поверхностей, заданных параметрическими уравнениями. Из них три образованы семейством плоских линий, параллельных ватерлинии, три – семейством линий, параллельных мидель-шпангоуту, и три – семейством линий, параллельных главному батоксу. Расширение числа предлагаемых к применению в судостроении гидродинамических поверхностей, заданных аналитически, поможет проектировщикам выбрать рациональные формы судовых корпусов.

## Список литературы

1. Морозов В.Н., Цветков В.В. К вопросу выбора схемы изготовления днищевых секций корпусов // Вестник Российской академии естественных наук: сб. науч. тр. Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО «КГТУ», 2013. Вып. 7. С. 80–85.
2. Розинев А.Я. Технологическое совершенствование конструкции корпуса катеров и процесса их сборки // Технология машиностроения. 2020. № 5. С. 15–23.
3. Бронский А.И., Глоzman М.К., Козляков В.В. Основы выбора конструкций корпуса судна. Л.: Судостроение, 1974. 250 с.
4. Doctors L.J. Optimization of marine vessels on the basis of tests on model series // J. Mar. Sci. Technol. 2020. No. 25. Pp. 887–900. <https://doi.org/10.1007/s00773-019-00687-4>
5. Авдоньев Е.Я. Аналитическое описание корпусных поверхностей // Прикладная геометрия и инженерная графика. Киев, 1972. Вып. 15. С. 156–160.
6. Авдоньев Е.Я. Математическая модель корпусной поверхности // Прикладная геометрия и инженерная графика. Киев, 1979. Вып. 28. С. 46–49.
7. Авдоньев Е.Я., Протодьяконов С.М. Исследование геометрии некоторых поверхностей высших порядков // Прикладная геометрия и инженерная графика. Киев, 1975. Вып. 20. С. 138–142.
8. Кривошапко С.Н. К вопросу об аэродинамических поверхностях, заданных алгебраическими плос-

кими кривыми // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 2. С. 3–4.

9. Кривошапко С.Н. Гидродинамические поверхности // Судостроение. 2021. № 3. С. 64–67. [http://dx.doi.org/10.54068/00394580\\_2021\\_3\\_64](http://dx.doi.org/10.54068/00394580_2021_3_64)

10. Логинов А.Ю. Графо-аналитическое решение задачи о трансформации плоских корабельных кривых // Труды ВГАВТ. Вып. 276. Н. Новгород: ВГАВТ, 1997.

11. Kwang H.K. A survey: application of geometric modeling techniques to ship modeling and design // *Inter. J. Nav. Archit. Oc. Engng.* 2010. Vol. 2. Pp. 177–184. <http://dx.doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0034>

12. Janson C., Larsson L. A method for the optimization of ship hulls from a resistance point of view // *Twenty-First Symposium on Naval Hydrodynamic*. Washington: The National Academies Press, 1997. Pp. 680–696. <https://doi.org/10.17226/5870>

13. Кривошапко С.Н. Применение торсовых поверхностей в судостроении // Судостроение. 1983. № 7. С. 5–7.

14. Пятецкий В.Ю. Судна спрощених форм для обмеженого фарватеру. Київ: АН УРСР, 1962.

15. Кривошапко С.Н. О параболическом изгибании плоского металлического листа в торсовую конструкцию // *Технология машиностроения*. 2020. № 11 (221). С. 14–24.

16. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad, AutoCad: монография. М.: Изд-во АСВ, 2016. 412 с.

17. Tober H. Evaluation of drag estimation methods for ship hulls. Stockholm: KTH Royal Institute of Technology, School of Engineering Sciences, 2020. 67 p.

18. Dambrine J., Pierre M., Rousseaux G. A theoretical and numerical determination of optimal ship forms based on Michell's wave resistance // *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations*. 2016. Vol. 22. No. 1. Pp. 88–111. <https://doi.org/10.1051/cocv/2014067>

19. Алборова Л.А. Возможности велароидальных оболочек // *Инженерные системы – 2020: труды научно-практической конференции с международным участием, посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов: в 2 т. М., 2020. Т. 1. С. 59–65.*

## References

1. Morozov BN, Tzvetkov VV. On the question of choice of scheme of making bottom section of hulls. *Vestnik RAEN*. 2013;(7):80–85. (In Russ.)

2. Rozinov AY. Technological improvement of the hull boats design and the process of their assembly. *Tekhnologiya Mashinostroeniya*. 2020;(5):15–23. (In Russ.)

3. Bronskiy AI, Glozman MK, Kozlyakov VV. *The basis of choice of structures of ship hull*. Leningrad: Sudostroeniye Publ.; 1974. (In Russ.)

4. Doctors LJ. Optimization of marine vessels on the basis of tests on model series. *J. Mar. Sci Technol*. 2020;(25):887–900. <https://doi.org/10.1007/s00773-019-00687-4>

5. Avdonev EYa. Analytical description of the ship hull surfaces. *Prikladnaya Geometriya i Inzhenernaya Grafika*. 1972;(15):156–160. (In Russ.)

6. Avdonev EYa. Mathematical model of hull surface. *Prikladnaya Geometriya i Inzhenernaya Grafika*. 1979;(28):46–49. (In Russ.)

7. Avdonev EYa, Protodyakonov SM. Research of geometry of some surfaces of the highest orders. *Prikladnaya Geometriya i Inzhenernaya Grafika*. 1975;(20):138–142. (In Russ.)

8. Krivoshapko SN. On aero-hydro-dynamical surfaces given by algebraic plane curves. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2010;(2):3–4. (In Russ.)

9. Krivoshapko SN. Hydrodynamic surfaces. *Sudostroeniye*. 2021;(3):64–67. (In Russ.) [http://dx.doi.org/10.54068/00394580\\_2021\\_3\\_64](http://dx.doi.org/10.54068/00394580_2021_3_64)

10. Loginov AY. Graphical-and-analytical solution on transformation of plane ship curves. *Trudy VGAVT* (issue 276). Nizhny Novgorod: VGAVT Publ.; 1997. (In Russ.)

11. Kwang HK. A survey: application of geometric modeling techniques to ship modeling and design. *Inter. J. Nav. Archit. Oc. Engng.* 2010;2:177–184. <http://dx.doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0034>

12. Janson C, Larsson L. A method for the optimization of ship hulls from a resistance point of view. *Twenty-First Symposium on Naval Hydrodynamic*. Washington: The National Academies Press; 1997. p. 680–696. <https://doi.org/10.17226/5870>

13. Krivoshapko SN. Application of tangential developable surfaces in shipbuilding. *Sudostroeniye*. 1983;(7):5–7. (In Russ.)

14. Pyatetzkiy VYu. *Ships of simplified forms for river deep stream*. Kiev: AN URSR Publ.; 1962. (In Ukr.)

15. Krivoshapko SN. About parabolic bending of a flat metal sheet into a torso structure. *Tekhnologiya Mashinostroeniya*. 2020;(11(229)):14–24. (In Russ.)

16. Ivanov VN, Romanova VA. *Constructive forms of spatial structures (visualization of surfaces in MathCad, AutoCad)*. Moscow: ASV Publ.; 2016. (In Russ.)

17. Tober H. *Evaluation of drag estimation methods for ship hulls*. Stockholm: KTH Royal Institute of Technology, School of Engineering Sciences; 2020.

18. Dambrine J, Pierre M, Rousseaux G. A theoretical and numerical determination of optimal ship forms based on Michell's wave resistance. *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations*. 2016;22(1):88–111. <https://doi.org/10.1051/cocv/2014067>

19. Alborova LA. Opportunities of velaroidal shells. *Engineering Systems – 2020: Proceedings of the Scientific and Practical Conference with International Participation Dedicated to the 60th Anniversary of the RUDN University*. 2020;1:59–65. (In Russ.)

### **Сведения об авторах**

*Кривошапко Сергей Николаевич*, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-9385-3699, Scopus Author ID: 6507572305, eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966. E-mail: sn\_krivoshapko@mail.ru

*Иванов Вячеслав Николаевич*, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академии, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-4023-156X, Scopus Author ID: 57193384761, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909. E-mail: i.v.ivn@mail.ru

### **About the authors**

*Sergey N. Krivoshapko*, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation. ORCID: 0000-0002-9385-369, Scopus Author ID: 6507572305; eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966. E-mail: sn\_krivoshapko@mail.ru

*Vyacheslav N. Ivanov*, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation. ORCID: 0000-0003-4023-156X, Scopus Author ID: 57193384761, eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909. E-mail: i.v.ivn@mail.ru



DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-293-304  
УДК 539.3:534.1

Научная статья / Research article

## Температурная деформация длинной упругой полосы

Е.М. Зверяев

*Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
Московский авиационный институт, Москва, Россия*

✉ zveriaev@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 21 мая 2021 г.  
Доработана: 14 сентября 2021 г.  
Принята к публикации: 27 сентября 2021 г.

### Ключевые слова:

принцип сжатых отображений, теорема о неподвижной точке, упругость, полоса, полное решение, метод Сен-Венана – Пикара – Банаха, граничные условия, краевой эффект

**Аннотация.** Предложен общий метод постановки и решения температурных задач теории упругости для тонкостенных тел при заданном распределении температуры с сохранением порядка дифференциальных уравнений и выполнением всех граничных условий. Соотношения упругости с учетом температурных деформаций преобразованы к виду, позволяющему в соответствии с методом Сен-Венана – Пикара – Банаха произвести итерационное вычисление всех искомым неизвестных задачи. Процедура построения решения сводится к замене четырех дифференциальных уравнений первого порядка исходной системы теории упругости на четыре соответствующих интегральных уравнения Пикара с малым множителем относительной тонкостенности. Вычисленные путем прямого интегрирования семь неизвестных исходной задачи выражены через четыре основных неизвестных. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы приводит к решению четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся и быстро меняющихся компонентов основных неизвестных. Медленно меняющиеся компоненты описывают классическое напряженно-деформированное состояние. Быстро меняющиеся определяют краевые эффекты в точках разрыва непрерывности медленно меняющегося классического решения и выполнение неудовлетворенных ими граничных условий из-за понижения порядка дифференциальных уравнений, основанных на гипотезе Кирхгофа. В общем случае решение представляется в виде асимптотических рядов по малому параметру тонкостенности с коэффициентами в виде степенных рядов по поперечной координате. Изложение проиллюстрировано примерами коробления свободной полосы и возникновения напряжений и перемещений только краевого эффекта в жестко заземленной по концам полосе при линейном распределении температуры по высоте.

### Для цитирования

Зверяев Е.М. Температурная деформация длинной упругой полосы // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 293–304. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-293-304>

© Зверяев Е.М., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Thermal deformation of a long elastic strip

Evgeny M. Zveryaev 

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia*

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

✉ zveriaev@mail.ru

### Article history

Received: May 21, 2021

Revised: September 14, 2021

Accepted: September 27, 2021

### Keywords:

contraction mapping principle, elasticity, strip, complete solution, Saint-Venant – Picard – Banach method, boundary conditions, boundary effect

**Abstract.** A general method is proposed for the formulation and solution of temperature problems of the theory of elasticity for thin-walled bodies for a given temperature distribution with the preservation of the order of differential equations and the fulfilment of all boundary conditions. The elasticity relations, taking into account temperature deformations, are transformed to a form that allows, in accordance with the Saint-Venant – Picard – Banach method, to perform iterative calculation of all the looking for unknowns of the problem. The procedure for constructing a solution is reduced to replacing four differential equations of the first order of the original system of elasticity theory with four corresponding integral Picard equations with a small factor of relative thinness. Seven unknowns of the original problem calculated by direct integration are expressed in terms of four basic unknowns. The fulfilment of the boundary conditions on the long sides of the strip leads to the solution of four ordinary differential equations for slowly varying and rapidly changing components of the main unknowns. Slowly changing components describe the classical stress-strain state. The rapidly changing ones determine the edge effects at the points of discontinuity of the slowly changing classical solution and the fulfilment of the unsatisfied boundary conditions due to the lowering of the order of the differential equations based on the Kirchhoff hypothesis. In the general case, the solution is represented in the form of asymptotic series in the small parameter of thinness with coefficients in the form of power series in the transverse coordinate. The presentation is illustrated by examples of warping of a free strip and of the occurrence of stresses and displacements of only the edge effect in a strip rigidly clamped at the ends with a linear temperature distribution along the height.

### For citation

Zveryaev EM. Thermal deformation of a long elastic strip. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3):293–304. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-293-304>

### Введение

«Находящееся в условиях температурного воздействия тонкостенное тело ведет себя так, как если бы оно было нагружено внешними и внутренними напряжениями. Тонкие стержни и листы в результате температурного воздействия коробятся, принимая новую форму. Такого рода явления объясняются наличием внутренних температурных напряжений. Напряжения являются эквивалентом, с помощью которого можно сравнивать степень силового и температурного воздействия. Считается, что температурные напряжения возникают как следствие температурных деформаций тела и условий закрепления его краев. В общем случае они зависят от законов

распределения температуры, от температурных свойств материала и условий закрепления тела. В простейшем упругом материале температурные напряжения пропорциональны модулю упругости, коэффициенту линейного расширения и изменению температуры. Эти воздействия подчиняются принципу суперпозиции. При нагреве конструкции и одновременном нагружении ее внешними силами температурные напряжения определяются как часть суммарных напряжений, приходящаяся на долю теплового воздействия. Температурные напряжения возникают вследствие температурных деформаций. Если деформация тела ограничена, то полная деформация может быть равной ну-

лю, и тогда силовая деформация равна температурной»<sup>1</sup>.

В силу малой наглядности теплового воздействия на тело в литературе имеется мало решенных задач. В частности, отсутствуют работы по определению коробления тонкостенных тел. Это можно объяснить тем, что решение задач для тонкостенных тел с незакрепленными границами имеет большие трудности из-за наличия полиномиальных решений, вид которых обычно приходится угадывать при использовании теорий в усилиях и моментах.

Еще Ляв отмечал, «что развитие взглядов на постановку задач приводит к тому, что существующие методы постановки задач приводятся во все более тесную связь с новыми. Несмотря на то что иногда приходится встречаться с ошибками в математической теории упругости, состоящими в принятии неясных гипотез, имеет место непрерывный прогресс во всех отношениях» [1]. Несомненным преимуществом и удобством обладает процесс построения решения задачи на основе принципа сжатых отображений, в целом не зависящий от начальных гипотез, так как итерационный процесс при выполнении условий сжатия для операторов исходных уравнений является сходящимся независимо от выбора величин начального приближения и может быть распространен на новые задачи для анизотропных и композиционных материалов при воздействии полей различной природы.

В связи с появлением новых материалов большой интерес представляет изучение уточненных температурных задач, учитывающих разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания. «Сопутствующее приближенным теориям понижение порядка дифференциального уравнения при решении задач в усилиях и моментах в сочетании с потерей граничного условия является характерной чертой асимптотических явлений в тонкостенных конструкциях, возникающих из приближенного описания» [2]. Цель асимптотического анализа задачи температурной деформации тонкостенного тела заключается в описании медленно меняющегося ре-

шения граничной задачи не только вдали от краев, но и в описании быстро меняющегося внутри приграничного слоя.

Потребность в уточненных теориях связана с тем, что уточнение классической теории требуется для более полного понимания самой классической теории. Уточненные теории тонкостенных систем позволяют лучшим образом охарактеризовать погрешность классических теорий [3–5]. «Построение уточненных теорий является более сложной задачей, чем построение классических моделей. Классическая теория учитывает „грубые“ эффекты или медленно меняющиеся напряженные состояния, и, для того чтобы разобраться в них, зачастую достаточно интуиции. В уточненных теориях включаются в рассмотрение малые эффекты, и построение теорий, последовательных в смысле учета всех малых одного порядка, крайне трудно сделать, руководствуясь только интуицией и не располагая регулярными методами» [6].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого мнения лежит различие в методах построения определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось в некоторой степени на основе математической теории упругости, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений без использования уравнений теории упругости. При этом граничные условия заимствуются из теории балок. Однако, если все эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек строить на одной математической основе с помощью метода простых итераций, являющегося методом построения решения, удовлетворяющим принципу сжатых отображений, различие между ними исчезает [7]. В связи с этим в настоящей работе методом интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем Сен-Венана – Пикара – Банаха решена задача определения всех неизвестных задачи температурной деформации длинной полосы. Процесс построения решения и выполнения всех граничных условий на всех сторонах, описанный для полосы, без каких-либо принципиальных изменений с сохранением техники вычислений переносится на более громоздкие задачи для пластин и оболочек [7–12].

<sup>1</sup> Лекция-беседа В.И. Феодосьева «О температурных напряжениях». URL: <https://prosopromat.ru/lekcii-besedy-izbrannye-voprosy-i-zadachi-v-i-feodoseva/lekcija-beseda-v-i-feodoseva-o-temperaturnyx-napryazheniyax.html> (дата обращения: 14.02.2021).

### 1. Интегрирование уравнений произвольно нагруженной по длинным сторонам нагретой полосы

Прямоугольную полосу длины  $l$  и высоты  $2h$  отнесем к прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так что  $0 \leq x^* \leq l$ ,  $-h \leq z^* \leq h$ . Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагружены. Такую полосу можно рассматривать как уточненную модель балки прямоугольного поперечного сечения.

Уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в следующем виде:

– уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0;$$

– соотношения упругости:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x^* - \nu \sigma_z^*), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z^* - \nu \sigma_x^*),$$

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau^*;$$

– формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Введем безразмерные координаты  $x = x^*/l$ ,  $z = z^*/h$ , безразмерные перемещения  $u = u^*/h$ ,  $w = w^*/h$  вдоль осей  $X, Z$  соответственно и безразмерные напряжения  $\sigma_x = \sigma_x^*/E$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^*/E$ ,  $\tau = \tau^*/E$  (размерные перемещения, напряжения и нагрузки отмечаются звездочкой). Безразмерные уравнения в этих переменных принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0,$$

$$\varepsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_z, \quad \varepsilon_z = \sigma_z - \nu \sigma_x,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x},$$

где величина  $\varepsilon = h/l$  – малый параметр.

Преобразуем их так, чтобы, выбрав в качестве величин начального приближения некоторые  $w_{(0)} = w_0(x, z)$  и  $\tau_{(0)} = \tau_0(x, z)$ , можно было последовательно вычислить все остальные искомые неизвестные

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0, \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}' + \alpha T,$$

$$\frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0', \quad \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)},$$

$$\varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2)\sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)} + \alpha T, \quad \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)},$$

$$\frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \sigma_{x(0)}', \quad \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{(1)} \dots$$

методом последовательных приближений, заменив дифференциальные уравнения интегральными [7]. Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения. Штрих означает дифференцирование по координате  $x$ . Во второй и пятой формулах для деформаций добавлены учитывающие температурную деформацию члены  $\alpha T$ :  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения материала полосы,  $T$  – температура, взятая относительно некоторой нулевой температуры, при которой температурные деформации считаются отсутствующими. В общем случае они являются функциями обеих координат.

Будем интересоваться уравнениями нулевого и первого приближений при выборе величин начального приближения  $w_{(0)} = w_0(x)$  и  $\tau_{(0)} = \tau_0(x)$ , принятыми не зависящими от координаты  $z$ . В силу этого процесс вычислений может быть записан в квадратурах по координате  $z$  таким образом, чтобы сжатие по Банаху было обеспечено за счет малого параметра  $\varepsilon$  как множителя в правой части интегральных операторов Пикара. Вследствие этого вычисленная в первом приближении величина приобретает множитель  $\varepsilon^2$  относительно величины нулевого приближения

$$w_{(0)} = w_0, \quad \tau_{(0)} = \tau_0,$$

$$u_{(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dz + 2(1+\nu) \int \tau_0 dz + u_0(x),$$



$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial \tau_0}{\partial x} dz + \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x},$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)},$$

$$\varepsilon_{z(0)} = (1 - \nu^2) \sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)},$$

$$\tau_{(1)} = \tau_0 - \varepsilon \int \frac{\partial \sigma_{x(0)}}{\partial x} dz, \quad w_{(1)} = w_0 + \int \varepsilon_{z(0)} dz \dots$$

Нижним индексом 0 обозначены производные интегрирования. Заданные величины начального приближения  $w_0$  и  $\tau_0$  записаны также в первом приближении. Итерационный процесс вычисления неизвестных может быть продолжен, в результате будем иметь формулы для неизвестных в любом приближении. Видно, что все искомые неизвестные выражаются через четыре основных неизвестных  $u_0(x)$ ,  $\sigma_{z0}(x)$ ,  $w_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$ , которые при вычислении интегралов будут умножаться на поперечную координату  $z$  с соответствующим степенным показателем.

Найденные в нулевом неизвестные  $u, \varepsilon_x, \sigma_z$ ,  $\sigma_x, \varepsilon_z$  и  $w, \tau, \sigma_z$  в первом будем считать вычисленными с достаточной степенью точности. Они имеют следующий вид:

$$u = \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \right] z + u_0,$$

$$\varepsilon_x = \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + 2(1 + \nu) \varepsilon \tau_0' \right] z + \varepsilon u_0' + \alpha T,$$

$$\sigma_x = \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' \right] z + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_z = \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] z -$$

$$- \nu \varepsilon u_0' + (1 - \nu^2) \sigma_{z0} + (1 - \nu) \alpha T,$$

$$w = \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} -$$

$$- \left[ \nu \varepsilon u_0' - (1 - \nu^2) \sigma_{z0} \right] z + (1 - \nu) \int_0^z (\alpha T) dz + w_0,$$

$$\tau = \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} -$$

$$- \left[ \varepsilon^2 u_0'' + \nu \varepsilon \sigma_{z0}' \right] z + \tau_0 - \varepsilon \int_0^z (\alpha T)' dz,$$

$$\sigma_z = \left[ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6} +$$

$$+ \left[ \varepsilon^3 u_0''' + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \right] \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' z +$$

$$+ \sigma_{z0} + \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^z (\alpha T)'' dz dz. \quad (1)$$

Из формул видно, что, задав в качестве единиц измерения искомых функций  $w_0(x)$  и  $\tau_0(x)$  как величины  $O(\varepsilon^0)$ , величины, вычисленные в нулевом и первом приближении, приобретают дополнительные члены с множителем  $\varepsilon^2$ , показывающие в практических задачах порядок поправки относительно главной величины.

Получив аналитические выражения для всех искомых неизвестных задачи, можно приступить к выполнению граничных условий на длинных и коротких сторонах заданной прямоугольной области.

## 2. Выполнение граничных условий на длинных сторонах

На лицевых поверхностях полосы  $z^* = \pm h$  надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Примем их такими:

$$\sigma_z^* = Z_+, \quad \tau^* = X_+ \quad \text{при } z^* = h,$$

$$\sigma_z^* = Z_-, \quad \tau^* = X_- \quad \text{при } z^* = -h.$$

В безразмерном виде эти условия записываются так:

$$\sigma_z = Z_+, \quad \tau = X_+ \quad \text{при } z = 1,$$

$$\sigma_z = Z_-, \quad \tau = X_- \quad \text{при } z = -1.$$

Безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость  $E$ . Предполагается,

что они заданы медленно меняющимися функциями координаты  $x$ .

Условия будем выполнять величинами первого приближения из формул (1), считая, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 w_0'''' \frac{1}{2} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} - \varepsilon^2 u_0'' - \\ & - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+ + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz, \\ & \varepsilon^3 w_0'''' \frac{1}{2} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} + \varepsilon^2 u_0'' + \\ & + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_- + \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\ & -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0'''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0'''' \frac{1}{2} + \\ & + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+ - \varepsilon^2 \int_0^{\bar{z}} (\alpha T)'' dz dz, \\ & \varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} - (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0'''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0'''' \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \\ & + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_- - \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz dz. \quad (2) \end{aligned}$$

Складывая и вычитая попарно первые два уравнения и последние два, получим систему из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 w_0'''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2\tau_0 = \\ & = X_+ + X_- + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\ & -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{3} + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0'''' \frac{1}{3} - 2\varepsilon \tau_0' = \\ & = Z_+ - Z_- - \varepsilon^2 \int_0^{\bar{z}} (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2\varepsilon^2 u_0'' - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' = \\ & = X_+ - X_- + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz - \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\ & \varepsilon^3 u_0'''' + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_- - \\ & - \varepsilon^2 \int_0^{\bar{z}} (\alpha T)'' dz dz - \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz dz, \quad (3) \end{aligned}$$

распадающуюся на две независимые: первая пара уравнений служит для определения неизвестных  $w_0$  и  $\tau_0$ , вторая – для  $u_0$  и  $\sigma_{z_0}$ .

Заметим, что формулы для  $\tau_{(1)}$  и  $\sigma_{z(1)}$  из списка (1) после выполнения граничных условий на длинных сторонах на основе выражений (3) приводятся к простому виду:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 (1 - z^2) + (X_+ + X_-) \frac{z^2}{2} - \\ & - (X_+ - X_-) z - \varepsilon \int_0^{\bar{z}} (\alpha T)' dz + \\ & + \varepsilon \left[ \int_0^1 (\alpha T)' dz + \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] \frac{z^2}{2} - \\ & - \varepsilon \left[ \int_0^1 (\alpha T)' dz - \int_0^{-1} (\alpha T)' dz \right] z, \\ \sigma_z &= \varepsilon \tau_0' (z^3 - z) + \sigma_{z_0} (1 - z^2) + \\ & + \frac{1}{2} (Z_+ - Z_-) z^3 + \frac{1}{2} (Z_+ + Z_-) z^2 + \\ & + \varepsilon^2 \int_0^{\bar{z}} (\alpha T)'' dz dz - \\ & - \varepsilon^2 \left[ \int_0^{\bar{z}} (\alpha T)'' dz dz + \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz dz \right] \frac{z^3}{2} - \\ & - \varepsilon^2 \left[ \int_0^{\bar{z}} (\alpha T)'' dz dz - \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz dz \right] \frac{z^2}{2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Отбрасывая в первом уравнении в (3) величину  $\varepsilon^2 \tau_0''$  по сравнению  $\tau_0$  как величину  $O(\varepsilon^2)$

и  $\varepsilon^3 \tau_0'''$  во втором уравнении по сравнению с  $\varepsilon \tau_0'$  также как величину  $O(\varepsilon^2)$ , получим уравнения для медленно меняющихся величин  $W_0^s$  и  $\tau_0^s$ , определенные на координате  $X$ :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 W_0^{s''''} + 2\tau_0^s = \\ & = X_+ + X_- + \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz, \\ & -\varepsilon^4 W_0^{s''''} \frac{1}{3} - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = Z_+ - Z_- - \\ & -\varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz, \end{aligned} \quad (5)$$

и известное уравнение краевого эффекта [6], определенное на координате  $x/\varepsilon$ , которая является независимой в силу произвола параметра на координате  $\varepsilon$ :

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \quad (6)$$

которое используется для выполнения не удовлетворенных решением уравнений (4) граничных условий на коротких сторонах полосы и устранения разрывов.

Система однородных уравнений (5) сводится к разрешающему уравнению  $W_0^{s''''} = 0$ , решением которого является полином третьей степени. Дифференцирование такого полинома не меняет его порядка по  $\varepsilon$ . Таким образом, функция  $W_0^s$  есть всегда медленно меняющаяся, и, следовательно,  $W_0^s \equiv w_0$ . Функция  $\tau_0$  в общем случае является суммой медленно меняющейся величины и быстро меняющейся, то есть  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ . При этом применение оператора  $\varepsilon(\ )'$  к величине  $\tau_0^q$  не меняет ее асимптотического порядка, то есть  $\tau_0^q \sim \varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 \tau_0^{q''}$ , так как  $\tau_0^q = \tau_0^q(x/\varepsilon)$ . Здесь и в дальнейшем верхними индексами  $s$  и  $q$  отмечаются медленно меняющиеся и быстро меняющиеся величины соответственно.

Система (5) может быть сведена к одному разрешающему уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \varepsilon^4 W_0^{s''''} = Z_+ - Z_- - \varepsilon (X_+' + X_-' ) - \\ & - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \\ & + \varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)'' dz + \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Последние два уравнения из системы (3) также могут быть преобразованы. Продифференцируем первое уравнение по  $x$ , умножим на  $\varepsilon$  и сложим со вторым. В результате получим

$$\begin{aligned} & \sigma_{z=0} = \frac{1}{2} (Z_+ + Z_-) + \frac{1}{4} \varepsilon (X_+' - X_-' ) - \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)'' dz dz - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)'' dz dz + \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)'' dz - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)'' dz, \end{aligned} \quad (8)$$

теперь можно исключить из третьего уравнения величину  $\varepsilon \sigma_{z=0}'$  для получения уравнения для неизвестной  $u_0$ :

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon^2 u_0'' = -\frac{1}{2} (X_+ - X_-) - \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz - \\ & - \nu \left[ \varepsilon (Z_+' + Z_-' ) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (X_+'' - X_-'' ) - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^z (\alpha T)''' dz dz - \right. \\ & \left. - \varepsilon^2 \int_0^{-1} \int_0^z (\alpha T)''' dz dz + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^1 (\alpha T)''' dz - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{-1} (\alpha T)''' dz \right]. \end{aligned}$$

Из величин в квадратных скобках здесь можно оставить только  $\varepsilon (Z_+' + Z_-' )$  как независимую, а остальные отбросить как малые  $O(\varepsilon^2)$  по сравнению с одноименными. Таким образом, для неизвестной  $u_0$  получим уравнение

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon^2 u_0'' = -\frac{1}{2} (X_+ - X_-) - \varepsilon (Z_+' + Z_-' ) - \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^1 (\alpha T)' dz + \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{-1} (\alpha T)' dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, функция  $\sigma_{z_0}$  определена алгебраически через нагрузки и температуру, решение однородного уравнения  $u_0$  является медленно меняющимся.

Заметим, что в последнем уравнении системы (3) содержится оператор  $\nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0}^q$ , который также определен на координате  $x/\varepsilon$ . Его можно использовать для нахождения частного решения в случае приложения быстро осциллирующей нагрузки, но это должно быть целью отдельного исследования.

### 3. Выполнение граничных условий на коротких сторонах

В сопротивлении материалов рассматриваются задачи изгиба и растяжения стержней при различных условиях закрепления концов. Поскольку напряженно-деформированное состояние полосы существенно зависит от граничных условий на коротких сторонах, рассмотрим сначала пример полосы со свободными концами.

#### 3.1. Равномерно нагретая полоса

Пусть полоса нагрета равномерно по толщине и в ней возникают температурные деформации. При этом она удлиняется и расширяется. Но напряжения в ней не возникают. Если нижние слои полосы охладить, а верхние нагреть, то лежа, например, на плоскости незакрепленная полоса свободно изогнется, покоробится. В литературе решение такой, казалось бы, простой задачи отсутствует.

Пусть  $\alpha T = t(x)z$ , а нагрузка на длинных сторонах отсутствует:  $X_+ = X_- = Z_+ = Z_- = 0$ . Уравнения (5) и (7)–(9) принимают вид

$$\begin{aligned} \tau_0^s &= -\frac{1}{2} \varepsilon^3 w_0^{s''''} + \frac{1}{2} \varepsilon t' \left( \int_0^1 z dz + \int_0^{-1} z dz \right), \\ \frac{2}{3} \varepsilon^2 w_0^{s''''} &= t'' \left( -\int_0^1 \int_0^1 z dz dz + \int_0^{-1} \int_0^{-1} z dz dz + \int_0^1 z dz + \int_0^{-1} z dz \right), \\ \sigma_{z_0} &= \frac{1}{2} \varepsilon^2 t'' \left( -\int_0^1 \int_0^1 z dz dz - \int_0^{-1} \int_0^{-1} z dz dz + \frac{1}{2} \int_0^1 z dz - \frac{1}{2} \int_0^{-1} z dz \right), \\ \varepsilon^2 u_0'' &= \frac{1}{4} \varepsilon t' \left( -\int_0^1 z dz + \int_0^{-1} z dz \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Положим для простоты изложения  $t = \text{const}$ . Дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы. Выполнив также интегрирование по  $z$  в скобках, получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \varepsilon^2 w_0^s &= \frac{2}{3} t \frac{x^2}{2} + C_3 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0, \\ \varepsilon^2 u_0^s &= L_1 x + L_0, \quad \tau_0^s = -\frac{3}{4} C_3, \quad \sigma_{z_0} = 0, \\ \tau_0^q &= \begin{cases} B_0 \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0, \\ B_1 \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C_3, C_2, C_1, C_0, L_1, L_0$  – произволы интегрирования медленно меняющихся решений;  $B_0, B_1$  – произволы интегрирования быстро меняющегося решения типа краевого эффекта. Они определяются из краевых условий на коротких сторонах,  $k^2 = \frac{2}{2-\nu}$ .

Примем, что концы полосы свободны, то есть  $\sigma_x = \tau = 0$  при  $x = 0; 1$ . Обратившись к (1) и (4), запишем эти условия в развернутом виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\varepsilon^2 w_0'' z + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' z + \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} + tz = 0 \\ &\text{при } x = 0; 1, \\ \tau &= \tau_0 = 0 \text{ при } x = 0; 1. \end{aligned}$$

Потребовав обращения коэффициентов в ноль при каждой степени  $z$ , получим следующую последовательность концевых условий для неизвестных  $w_0$  и  $\tau_0$ :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0, \\ -\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' + t &= 0 \text{ при } x = 0; 1 \end{aligned} \quad (12)$$

и для  $u_0$ :

$$\varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} = 0 \text{ при } x = 0; 1. \quad (13)$$

В условиях (12) в величине  $\tau_0$  надо учесть, что  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ :

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0,$$

$$-\varepsilon^2 w_0^{s''} + (2 + \nu) \varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) + t = 0 \text{ при } x = 0; 1.$$

Из решений (11) имеем  $\tau_0^{s'} \equiv \tau_0^{q'} \equiv 0$ . Это приводит к записи

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0,$$

$$-\varepsilon^2 w_0^{s''} + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0^{q'} + t = 0 \text{ при } x = 0; 1.$$

С помощью решений (11) на краю  $x = 0$  условия преобразуются к виду

$$-\frac{3}{4} \varepsilon C_3 + B_0 = 0,$$

$$-C_2 - (2 + \nu) k B_0 = 0 \text{ при } x = 0$$

и на краю  $x = 1$

$$-\frac{3}{4} \varepsilon C_3 + B_1 = 0,$$

$$-C_3 - C_2 + (2 + \nu) k B_1 = 0 \text{ при } x = 1.$$

Величина  $t$  при этом во вторых условиях сокращается.

Складывая и вычитая попарно

$$-\frac{3}{2} \varepsilon C_3 + B_0 + B_1 = 0, \quad B_0 - B_1 = 0,$$

$$-C_3 - 2C_2 - 2(2 + \nu) k (B_0 - B_1) = 0,$$

$$C_3 + (2 + \nu) k (B_0 + B_1) = 0,$$

из четырех уравнений получаем

$$C_3 = 0, \quad C_2 = 0, \quad B_0 = B_1 = 0.$$

Условия (13) выполняются при  $\sigma_{z0} = 0$  и основные искомые неизвестные можно записать в виде

$$w_0^s = \varepsilon^{-2} t \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \varepsilon^{-2} (C_1 x + C_0), \quad u_0^s = \varepsilon^{-2} L_0,$$

$$\tau_0^s = 0, \quad \sigma_{z0} = 0, \quad \tau_0^q = 0, \quad \alpha T = tz. \quad (14)$$

Перемещения  $w_0^s$  и  $u_0$  определены с точностью до перемещений полосы как абсолютно жесткой. Множитель  $\varepsilon^{-2}$  перед произвольными постоянными  $C_1$ ,  $C_0$ ,  $L_0$  можно отбросить.

Подставив найденные величины (14) в формулы (1), получим решение исходной задачи теории упругости:

$$u = -\varepsilon^{-1} tz + L_0, \quad \varepsilon_x = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \varepsilon_z = tz,$$

$$w = (2 - \nu) t \frac{z^2}{2} + \varepsilon^{-2} t \frac{x^2}{2}, \quad \tau = 0, \quad \sigma_z = 0.$$

Формулы показывают, что в свободной от закреплений полосе напряжения отсутствуют продольные перемещения  $O(\varepsilon^{-1})$ , поперечные  $O(\varepsilon^{-2})$  по отношению к заданной величине температурного расширения  $\alpha T = tz$ . Поправка следующего приближения для поперечного перемещения учитывает изменение поперечных размеров полосы за счет нагрева и пренебрежимо мала  $O(\varepsilon^0)$  по сравнению с главным членом  $O(\varepsilon^{-2})$ .

При короблении полосы имеют место перемещения и деформация расширения, напряжения отсутствуют.

### 3.2. Линейное распределение температуры по высоте

Рассмотрим второй случай граничных условий на концах  $x = 0; 1$ , когда  $w = u = 0$ . Температура распределена по высоте полосы по закону, при котором  $\alpha T = tz$ . Воспользовавшись формулами для перемещений из (1), запишем

$$w = \left[ \varepsilon^2 \nu w_0^{s''} - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q'} \right] \frac{z^2}{2} -$$

$$- \left[ \nu \varepsilon u_0' - (1 - \nu^2) \sigma_{z0} \right] z + (1 - \nu) t \frac{z^2}{2} + w_0 = 0$$

$$\text{при } x = 0; 1,$$

где произведена подстановка  $\int_0^z (\alpha T) dz = t \frac{z^2}{2}$ ,

$$\text{и } u_{(0)} = \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \right] z + u_0 = 0 \text{ при } x = 0; 1.$$

Потребовав обращения коэффициентов при каждой степени  $z$  в ноль, получим следующую последовательность концевых условий для основных неизвестных  $w_0^s$ ,  $\tau_0^s$ ,  $\tau_0^q$ :

$$w_0^s = 0, \quad -\varepsilon w_0^{s'} + 2(1 + \nu) (\tau_0^s + \tau_0^q) = 0,$$

$$\varepsilon^2 \nu w_0^{s''} - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q'} + (1 - \nu)t = 0$$

при  $x = 0; 1$  (15)

и  $u_0^s, \sigma_{z0}$ :

$$\nu \varepsilon u_0^{s'} - (1 - \nu^2) \sigma_{z0}^s = 0,$$

$$u_0^s = 0 \text{ при } x = 0; 1, \quad (16)$$

где учтено, что  $\tau_0^{s'} = 0$ .

Условия (15) можно упростить. Для того чтобы два уравнения для определения постоянных интегрирования, соответствующие двум последним условиям, были совместимы, надо принять  $\tau_0^q \sim \varepsilon^2 w_0^s$ . Кроме того, нужно учесть, что из первого уравнения (5) следует оценка  $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^s$ . Тогда получаем условия

$$w_0^s = 0, \quad w_0^{s'} = 0,$$

$$\varepsilon^2 \nu w_0^{s''} - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q'} + (1 - \nu)t = 0$$

при  $x = 0; 1$ ,

в которых первые два совпадают с классическими для случая жесткого защемления балки по концам. Удовлетворив их интегралами (11), получим

$$C_0 = C_1 = C_3 = 0, \quad C_2 = -\frac{2}{3}t,$$

$$B_0 = \frac{1 - \nu}{k(1 + \nu)^2} t \text{ при } x = 0$$

$$\text{и } B_1 = -\frac{1 - \nu}{k(1 + \nu)^2} t \text{ при } x = 1.$$

Условия (16) приводят к произволам интегрирования  $L_1 = L_0 = 0$ . В результате имеем  $w_0^s = u_0^s = 0$ . Теперь можно переписать выражения для искомым неизвестных из (1) и (4) так:

$$u = 2(1 + \nu) \tau_0^q z, \quad \varepsilon_x = 2(1 + \nu) \varepsilon \tau_0^{q'} z + tz,$$

$$\sigma_x = (2 + \nu) \varepsilon \tau_0^{q'} z + tz,$$

$$\varepsilon_z = -(1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q'} z + (1 - \nu)tz,$$

$$w = -(1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q'} \frac{z^2}{2} + (1 - \nu)t \frac{z^2}{2},$$

$$\tau = \tau_0^{q''} (1 - z^2), \quad \sigma_z = \varepsilon \tau_0^{q'} (z^3 - z),$$

где

$$\tau_0^q = \begin{cases} \frac{1 - \nu}{k(1 + \nu)^2} t \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0, \\ -\frac{1 - \nu}{k(1 + \nu)^2} t \exp\left(-\frac{k(1 - x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1; \end{cases}$$

$$\varepsilon \tau_0^{q'} = \begin{cases} -\frac{1 - \nu}{(1 + \nu)^2} t \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \geq 0, \\ -\frac{1 - \nu}{(1 + \nu)^2} t \exp\left(-\frac{k(1 - x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

Последние формулы показывают, что при изменении температуры по высоте по линейному закону в полосе возникают только перемещения и напряжения краевого эффекта в области защемления коротких краев.

### Заключение

Теорема Банаха о неподвижной точке объединяет все итерационные методы в рамках принципа сжатых отображений. Предложенный Сен-Венаном метод решения уравнений теории упругости легко продолжается до итерационного метода простых итераций. Для этого надо преобразовать оператор исходных уравнений так, чтобы он позволял вычислять неизвестные последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в последующее уравнение как известные, при этом умноженные на малый параметр. Такая последовательность обеспечивается интегральными операторами Пикара, преобразованием соотношений упругости и выбором величин начального приближения не зависящими от поперечной координаты. В теории тонкостенных систем (при дополнительном предположении  $\tau = 0$ ) они называются гипотезами Кирхгоффа или гипотезами недеформируемой нормали. В течение одной итерации четыре раза вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, содержащие

четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты, являющиеся коэффициентами полинома по степеням поперечной координаты. При этом члены, соответствующие температурной деформации, входят в исходные уравнения классическим образом [13] и никак не меняют процесс нахождения интегралов уравнений теории упругости. В случае изотропного материала уравнения, описывающие изгиб и растяжение – сжатие, разделяются. Для случая произвольного слоистого материала разделение не происходит [11; 14].

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако дифференцирование имеет символический характер, так как при выполнении граничных условий на длинных сторонах высшие производные приравниваются к заданной нагрузке и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингулярно возмущенными уравнениями непрерывность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора на четыре оператора Пикара относительно поперечной координаты и три – относительно продольной. Близость полученного решения оценивается порядком первого отброшенного члена по  $\epsilon$  для медленно меняющихся величин и оценкой, данной в [10], для быстро меняющихся. Можно показать, что последняя оценка может быть улучшена.

На примере коробления нагретого стержня показано, что указанное В.В. Васильевым [3] отсутствие решения, позволяющее деформировать балку по параболе и найденное в уточненных теориях [4; 5], не теряется при решении задачи теории упругости вышеизложенным методом без замены напряжений усилиями и моментами.

Описанная постановка температурной задачи в дальнейшем предполагает продолжение в задачах для тонкостенных систем из анизотропных и композиционных материалов.

## Список литературы

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М. – Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1955. Vol. 61. No. 6. Pp. 485–504.

3. Васильев В.В. О теории тонких пластин // *Изв. РАН. МТТ.* 1992. № 3. С. 26–47.
4. Васильев В.В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона – Тэта в классической теории пластин // *Изв. РАН. МТТ.* 2012. № 5. С. 98–107.
5. Васильев В.В. Кручение квадратной изотропной пластины угловыми силами и распределенными моментами // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 2. С. 20–31.
6. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // *Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел: в 22 т. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.*
7. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833.
8. Zveryayev E.M. Interpretation of semi-invers Saint-Venant method as iteration asymptotic method // *Shell Structures: Theory and Application / ed. by W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak. London: Taylor & Francis Group, 2006. Pp. 191–198.*
9. Zveryayev E.M. A consistent theory of thin elastic shells // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2016. Vol. 80. Issue 5. Pp. 409–420. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.02.008>
10. Zveryayev E.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2008. Vol. 72. Issue 2. Pp. 197–207. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004>
11. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // *Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. М., 2014. № 95. 29 с. URL: [http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014\\_95.pdf](http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf) (дата обращения: 14.02.2021).*
12. Zveryayev E.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beam and plates // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2003. Vol. 67. Issue. 3. Pp. 425–434.
13. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. М. – Л.: ОНТИ. Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. 110 с.
14. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // *Труды МАИ.* 2015. № 79. С. 1–27.

## References

1. Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Cambridge: Cambridge University Press; 1927.
2. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1955;61(6):485–504.
3. Vasiliev V.V. On the theory of thin plates. *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela.* 1992;(3):26–47. (In Russ.)

4. Vasilev VV. Kirchhoff and Thomson – Tait transformations in the classical theory of plates. *Mechanics of Solids*. 2012;47:571–579. <https://doi.org/10.3103/S0025654412050111>
5. Vasilev VV. Torsion of a square isotropic plate by forces applied at the corners and by distributed torques. *Mechanics of Solids*. 2017;52:134–143. <https://doi.org/10.3103/S0025654417020030>
6. Grigolyuk EI, Selezov IT. Non-classical theory of oscillations of rods, plates and shells. *Results of Science and Technology. Mechanics of Solid Deformable Bodies* (vol. 5). Moscow: VINITI Publ.; 1973. (In Russ.)
7. Zveryaev EM. Saint-Venant – Picard – Banach method of integration of equations of the theory of elasticity of thin-walled systems. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 2019;83(5–6):823–833. (In Russ.)
8. Zveryaev EM. Interpretation of semi-invers Saint-Venant method as iteration asymptotic method. In: Pietraszkiewicz W, Szymczak C. (eds.) *Shell Structures: Theory and Application*. London: Taylor & Francis Group; 2006. p. 191–198.
9. Zveryayev EM. A consistent theory of thin elastic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016;80(5):409–420. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.02.008>
10. Zveryayev EM, Makarov GI. A general method for constructing Timoshenko-type theories. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008;72(2):197–207. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004>
11. Zveryaev EM, Olekhova LV. Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle. *Keldysh Institute Preprints* (issue 95). Moscow; 2014. (In Russ.) Available from: [http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014\\_95.pdf](http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf) (accessed: 02.14.2021).
12. Zveryayev EM. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beam and plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(3):425–434.
13. Lebedev NN. *Temperature stresses in the theory of elasticity*. Moscow, Leningrad: ONTI. Glavnaya redaktsiya tekhniko-teoreticheskoi literatury Publ.; 1937. (In Russ.)
14. Zveryaev EM, Olekhova LV. Iterative interpretation of the semi-inverse Saint-Venant method when constructing equations for thin-walled structural elements made of composite material. *Trudy MAI*. 2015;(79):1–27. (In Russ.)

#### Сведения об авторе

*Зверяев Евгений Михайлович*, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша, Российская академия наук, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4; профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры проектирования сложных механических систем, Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337. E-mail: zveriaev@mail.ru

#### About the author

*Evgeny M. Zveryaev*, Doctor of Technical Sciences, Professor, leading researcher at the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, 4 Miusskaya Ploshchad', Moscow, 125047, Russian Federation; Professor of the Department of Construction, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Design of Complex Mechanical Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation. ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337. E-mail: zveriaev@mail.ru






DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-305-316  
УДК 552.086+552

Научная статья / Research article


## Минералого-петрографическая характеристика вмещающих пород железо-скарнового рудопроявления Первая Рудная Горка, Полярный Урал

Е.С. Иванова <sup>a</sup> , Ю.Н. Иванова <sup>b,c</sup> 

<sup>a</sup>Институт геологии и геохронологии докембрия Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup>Институт геологии рудных месторождений, петрографии, минералогии и геохимии Российской академии наук,  
Москва, Россия

<sup>c</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

 ekate.s.ivanova@gmail.com

### История статьи

Поступила в редакцию: 14 июля 2020 г.  
Доработана: 25 сентября 2020 г.  
Принята к публикации: 8 октября 2020 г.

### Ключевые слова:

Полярный Урал, метасоматическая зональность, железо-скарновые рудопроявления, золоторудные месторождения

**Аннотация.** Рассмотрены минералого-петрографические особенности метаморфических образований железо-скарнового проявления Первая Рудная Горка, локализованного в Конгорском рудном районе Войкарской зоны Полярного Урала. Приведена типизация вмещающих пород данного проявления по минеральному составу, включая его самые дальние фланги. Выполнен сравнительный анализ изучаемого проявления и месторождения Новогоднее-Монто, который показал схожие минеральный состав, структурно-текстурные особенности пород и общее геологическое строение объектов. Установлен близкий состав их скарновых образований, вмещающих золото-сульфидно-магнетитовое оруденение, а также аналогичные соотношения с интрузивными комплексами (собским, конгорским и мусюрским) и разломами северо-западного направления. При помощи оптической микроскопии впервые выявлены и детально охарактеризованы изменения пропилитовой формации на рудопроявлении Первая Рудная Горка, свидетельствующие о масштабном региональном предрудном метасоматозе. В рудном поле установлена следующая метасоматическая зональность минеральных парагенезисов (от внутренней зоны к внешней) актинолит + эпидот → хлорит + актинолит + эпидот → хлорит + эпидот. Полученные данные можно использовать как дополнительный критерий для прогнозирования золоторудной минерализации на прилегающих территориях.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ № 18-05-70041 «Ресурсы Арктики», а также при поддержке базовой темы Госзадания ИГЕМ РАН. Авторы выражают благодарность доктору геолого-минералогических наук И.В. Викентьеву за организацию полевых исследований и полезные рекомендации при написании рукописи.

### Для цитирования

Иванова Е.С., Иванова Ю.Н. Минералого-петрографическая характеристика вмещающих пород железо-скарнового рудопроявления Первая Рудная Горка, Полярный Урал // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 305–316. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-305-316>

© Иванова Е.С., Иванова Ю.Н., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>


## Mineralogical and petrographic characteristics of the host rocks of the Pervaya Rudnaya Gorka Fe-skarn ore occurrence

Ekaterina S. Ivanova <sup>a</sup> , Julia N. Ivanova <sup>b,c</sup> 

<sup>a</sup>*Institute of Precambrian Geology and Geochronology, Russian Academy of Science, Saint Petersburg, Russia*

<sup>b</sup>*Institute of Geology of Ore Deposits, Petrography, Mineralogy and Geochemistry, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>c</sup>*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia*

 ekate.s.ivanova@gmail.com

### Article history

Received: July 14, 2020

Revised: September 25, 2020

Accepted: October 8, 2020

### Keywords:

Polar Urals, metacomatic zoning, Fe-skarn ore occurrence, gold deposits

**Abstract.** The article discusses the mineralogical and petrographic features of the metamorphic formations of the poorly studied and promising the Pervaya Rudnaya Gorka Fe-skarn ore occurrence (Kongor ore region), localized in the Voikar, and the typification of host rocks by mineral composition. In order to clarify the ore-forming affiliation of the Pervaya Rudnaya Gorka ore occurrence, the comparative analysis was carried out with the reference to well-studied Novogodnee-Monto Au-Fe-skarn deposit (Toupuhol-Khanmeishor ore region), which showed similar mineral composition, structural and texture features and geological structure of ore objects. According to the results of studies, a close composition of the enclosing volcanic-sedimentary rocks, in particular the skarn formations, containing the gold-sulfide-magnetite mineralization at the Novogodnee-Monto ore deposit; connection with the same intrusive complexes (Sob', Kongor, and Musyur) and faults of the north-western direction. Using the microscopic method of research, the changes in the propylite formation area at the Pervaya Rudnaya Gorka ore occurrence, indicating a large-scale regional pre-ore metasomatism, were first identified and described in detail. The following metasomatic zonation (from the inner to the outer zone): actinolite + epidote → chlorite + actinolite + epidote → chlorite + epidote was been established at the ore field. Based on the obtained research results, it is concluded that the poorly studied territories of the Polar Urals are promising.

### Acknowledgements

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research project No. 18-05-70041 “Arctic Resources” and by the basic project of scientific program of IGEM RAS. We are grateful to I.V. Vikentyev for organizing field research and for useful discussion.

### For citation

Ivanova ES, Ivanova JN. Mineralogical and petrographic characteristics of the host rocks of the Pervaya Rudnaya Gorka Fe-skarn ore occurrence. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3):305–361. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-305-316>

## Введение

Труднодоступные северные территории Урала остаются малоизученными, что обуславливает большое количество неоцененных золоторудных проявлений и единичных промышленных объектов [1]. На сегодняшний день на Полярном Урале известно всего два относительно крупных золоторудных месторождения: золото-железо-скарновое Новогоднее-Монто и золото-порфировое Петропавловское (Топугол-Ханмейшорский рудный район). Актуальность исследований обусловлена необходимостью изучения новых золоторудных месторождений для расширения минерально-сырьевой базы страны. В 30 км на юго-восток от

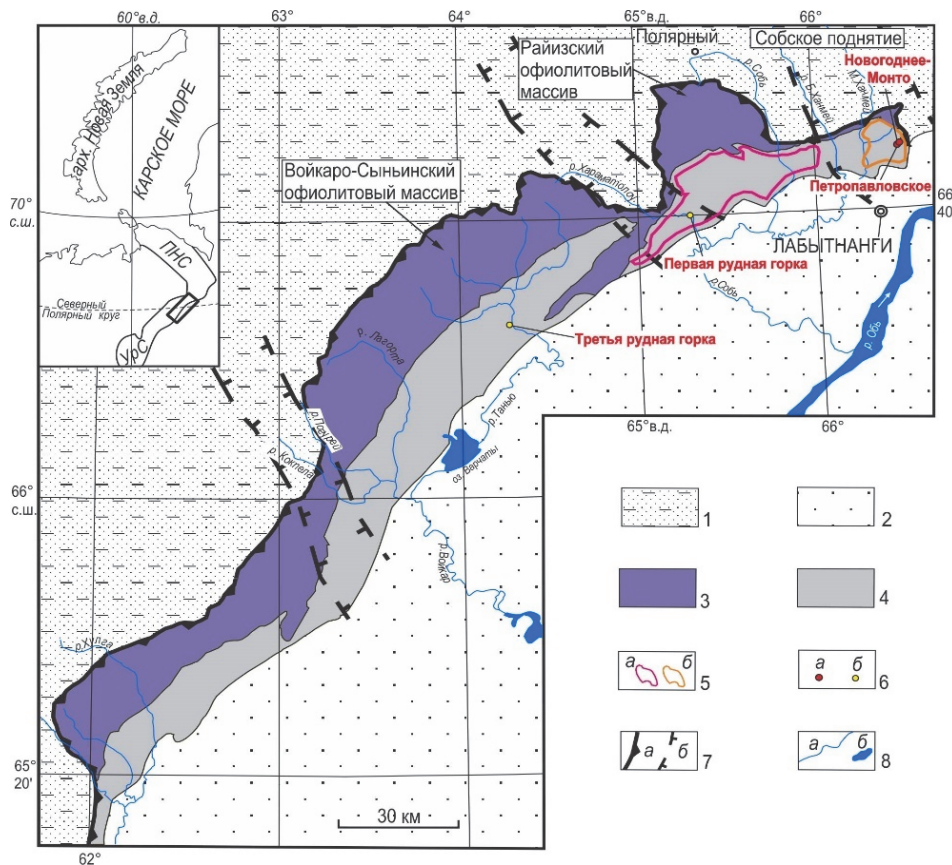
месторождений локализовано железо-скарновое рудопроявление Первая Рудная Горка, находящееся в Конгорском рудном районе. Рудный объект расположен в среднем течении р. Харматалоу и, по данным [2], является перспективным на выявление золотого оруденения.

В ходе полевых работ 2018 и 2019 гг. отобраны образцы вмещающих пород и метасоматитов с данного рудопроявления. Цели исследования – типизация метаморфических процессов и оценка характера метасоматического и метаморфического преобразования вулканогенных пород проявления Первая Рудная Горка для уточнения рудоформационной принадлежности объекта, а также прогноза подобных объектов в регионе.

## 1. Позиция и геологическая характеристика рудопроявления Первая Рудная Горка

Рудопроявление Первая Рудная Горка локализовано среди палеозойских островодужных образований (рис. 1) в северной части Войкарской зоны Полярного Урала. Эта зона простирается в северо-северо-восточном направлении более чем на 250 км в виде узкой полосы шириной 10–40 км. В ее северо-западной части присутствуют преимущественно позднеордовикские океанические образования (Войкарская офиолитовая ассоциация); в юго-восточной части – выделяется полоса, сложенная островодужными породами (Малоруальская вулcano-плутоническая ассоциация).

Эти образования являются северным продолжением структур Тагильской зоны Среднего и Северного Урала. Рудопроявление Первая Рудная Горка расположено в зоне экзоконтакта ранне-среднедевонских островодужных монцонитоидов конгорского комплекса с верхнеордовикскими островодужными метабазами устьконгорской свиты [3–5]. Палеоокеанические образования Войкарской зоны на северо-западе по Главному Уральскому разлому граничат с палеозойскими и позднепротерозойскими палеоконтинентальными образованиями Западно-Уральской мегазоны, а с юго-востока они перекрыты мощным мезозойско-кайнозойским осадочным чехлом Западно-Сибирской плиты [6].



**Рис. 1.** Положение Конгорского и Топугул-Ханмейшорского рудных районов в структурах Полярного Урала.

Тектоническая основа по [7; 8] с изменениями:

на врезке: УрС – Уральское складчато-надвиговое сооружение, ПНС – Пайхойско-Новоземельское складчато-надвиговое сооружение, прямоугольником показано расположение Войкарской зоны; 1 – позднедевонские и палеозойские образования Западно-Уральской мегазоны; 2 – мезо-кайнозойский чехол Западно-Сибирской плиты; 3–4 – образования Войкарской зоны: 3 – преимущественно ордовикские метаморфизованные гипербазиты и габброиды, 4 – ордовикско-девонские магматические и осадочно-вулканогенные образования; 5 – месторождения (а), рудопоявления (б); 6 – разломы: а – Главный Уральский надвиг, б – северо-западные зоны нарушения; 7 – водоемы: а – реки, б – озера; 8 – рудные районы: а – Конгорский, б – Топугул-Ханмейшорский

**Figure 1.** The position of the Kongor and Toupugol-Khanmeishor ore districts in the structures of the Polar Urals.

Tectonic basis according to [7; 8] with changes:

on the inset: УрС – Ural folding-thrust structure, ПНС – Paykhoy-Novaya Zemlya folding-thrust structure; the rectangle shows the location of the Voikar zone; 1 – late Precambrian and Paleozoic series of the West-Ural megazone; 2 – Meso-Cenozoic cover of the West-Siberian Plate; 3–4 – complexes of the Voikar zone: 3 – mainly Ordovician metamorphosed hyperbasites and gabbroids, 4 – Ordovician-Devonian igneous and sedimentary-volcanic series; 5 – deposits (a), ore occurrences (b); 6 – faults: a – the Main Ural thrust, b – north-western fault zones; 7 – water reservoirs: a – rivers, b – lakes; 8 – ore districts: a – Kongor, b – Toupugol-Khanmeishor

Таблица 1

## Сопоставление рудопроявления Первая Рудная Горка с месторождением Новогоднее-Монто

Признаки сравнения	Рудные объекты	
	Месторождение Новогоднее-Монто	Рудопроявление Первая Рудная Горка
Рудный район	Тоупугол-Ханмейшорский	Конгорский
Геодинамическая обстановка	Островодужная	Островодужная
Рудоконтролирующие структуры	Брахисинклиналь, осложненная северо-западными и восток-северо-восточными разломами	Складчато-разрывные нарушения северо-западной ориентировки
Тип месторождения (проявления)	Золото-железо-скарновый	Железо-скарновый
Рудоносные формации	Базальт-андезиобазальтовая	Базальт-плагиоориолитовая; базальт-андезиобазальтовая
Вмещающие комплексы	Вулканогенные, карбонатные, вулканогенно-осадочные	Вулканогенные, карбонатные, вулканогенно-осадочные
Связь с магматизмом	Тесная: собский; конгорский; мусюрский комплексы	
Метаморфическая фация	Пренит-пумпеллитовая	Зеленосланцевая
Метасоматические преобразования	Скарнирование, пропилизация, березитизация	Скарнирование, хлоритизация, серицитизация
Рудная минерализация	Золото-сульфидно-магнетитовая, золото-сульфидно-кварцевая	Магнетитовая
Текстуры руд	Прожилково-вкрапленная, пятнисто-вкрапленная, полосчато-пятнистая, массивная	Вкрапленная
Главные минералы руд	Пирит, магнетит, галенит, халькопирит, кобальтин, пирротин	Магнетит, пирит, халькопирит

Table 1

## Comparison of the Pervaya Rudnaya Gorka ore occurrence and the Novogodnee-Monto ore deposit

Signs of comparison	Ore objects	
	The Novogodnee-Monto ore deposit	The Pervaya Rudnaya Gorka ore occurrence
Regional position	Malouralsky VPB	
Ore district	Тоупугол-Ханмейшорский	Kongor
Geodynamic situation	Island arc	Island arc
Ore-control structures	Brachisyncline, complicated by north-west and east-north-east faults	Folding faults of north-west orientation
Type of deposit	Au-Fe-skarn	Fe-skarn
Ore-bearing formation	Basalt-andesibasalt	Basalt-plagiioriolit, basalt-andesibasalt
Enclose complexes	Volcanogenic, carbonate, volcanogenic-sedimentary	Volcanogenic, carbonate, volcanogenic-sedimentary
Connection with magmatism	Close: Sob <sup>3</sup> , Kongor, Musyur complexes	
Metamorphic facies	Prehnite-pumpellyite	Greenschist
Metasomatic alterations	Skarn, propylitization, beresitization	Skarn, chloritization, sericitization
Ore mineralization	Gold-sulfide-magnetite, gold sulfide-quartz	Magnetite
Structures of ores	Veinlet-disseminated, spotted, streaky-spotted, massive	Interspersed
Main minerals of ores	Pyrite, magnetite, galena, chalcopyrite, cobalte, pyrrhotite	Magnetite, pyrite, chalcopyrite

В результате анализа литературы [1; 2; 6; 9] можно констатировать следующее.

1. Контактново-метасоматическая минерализация в Войкарской СФЗ образуется при участии процессов скарнирования под влиянием тоналитов собского комплекса, специализированного на золото [2]. По мнению Е.В Черняева [9], соб-

ский комплекс имеет отношение исключительно с магнетитовыми известковыми скарнами. Тогда как золотое оруденение и пропилиты, содержащие высокопробное золото, с ним не связаны, а золото-сульфидно-кварцевая минерализация в кварц-серицитовых породах контролируется дайками мусюрского комплекса, широко развитыми за

пределами Тоупугол-Ханмейшорского рудного района, в том числе на территории рудопроявления Первая Рудная Горка [9]. В то же время, по нашим наблюдениям и данным [1], раннекаменноугольные образования мусюрского комплекса пересекают рудные тела без сопутствующих гидротермальных изменений, опровергая возможность синхронного им золотого оруденения. Таким образом, к образованию кварц-серицитовых метасоматитов, вмещающих на территории Новогодненского рудного поля прожилково-вкрапленное золото-сульфидно-кварцевое оруденение, привело внедрение малых интрузий конгорского комплекса, в том числе за счет перераспределения ранней сульфидной минерализации [1].

2. На примере западной части месторождения Новогоднее-Монто наблюдается связь золотого оруденения с тектоническими зонами субмеридиональной ориентировки. Золоторудная минерализованная зона месторождения Петропавловское локализована в основном над апикальной частью крупного диоритового массива собского комплекса, в то время как залежи рудопроявления Первая Рудная Горка – в самих диоритах его апикальной части. Зона минерализации месторождения представлена серией сближенных продольных кулис, имеющих субмеридиональное направление, причем большая часть руды приурочена к породам вулканогенно-осадочной толщи [6]. Рудоконтролирующие структуры рудопроявления Первая Рудная Горка представлены складчато-разрывными нарушениями субмеридионального северо-западного (СЗ) простирания. Обращает на себя внимание, что подобная же система разломов контролирует распространение продуктивных кварц-серицитовых образований на месторождениях Петропавловское и Новогоднее-Монто.

3. Породы вулканогенно-осадочной толщи рассматриваемых рудных объектов подвержены активному влиянию гидротермально-метасоматических процессов, среди которых особое распространение получили скарнирование, хлоритизация и березитизация. На рудопроявлении Первая Рудная Горка метасоматические образования представлены в основном пироксен-гранат-эпидотовыми скарнами, вмещающими вкрапленное магнетитовое оруденение. Образования этого объекта схожи по составу с известковыми скарнами месторождения Новогоднее-Монто, к которым приурочена вкрапленная золото-сульфидно-магнетитовая минерализация. Главные рудные минералы зо-

лото-сульфидно-магнетитового комплекса представлены магнетитом, пиритом и халькопиритом. При этом для выявления золотого оруденения особое внимание следует уделять выделениям пирита, с дефектами которого связано самородное золото, и халькопирита, цементирующего пирит.

4. Метаморфические преобразования зеленокаменного типа, встречающиеся исключительно на рудопроявлении Первая Рудная Горка, являются близкими по минеральному составу к пропилитам с некоторыми исключениями. На месторождении Петропавловское хлоритовые образования характеризуются низкими содержаниями пирита и золота, однако присутствие альбита в метасоматитах прямо связано с их повышенной золотосодержимостью. В настоящий момент вопрос разделения пропилитов и зеленокаменных пород требует более подробного изучения.

5. Кварц-серицитовые изменения на месторождениях связаны с золото-малосульфидно-кварцевой стадией рудообразования и характеризуются высокими средними содержаниями золота, за счет наложения на более ранние малопродуктивные образования [1]. Такие образования приурочены к ослабленным зонам смятия и кулиснообразным разломам. В то же время на рудопроявлении Первая Рудная Горка серицитизация имеет ограниченное распространение по зонам трещиноватости в породах вулканогенно-осадочной толщи.

Таким образом, сравнительный геологический анализ рудных объектов показал, что рудопроявление Первая Рудная Горка имеет схожее строение с месторождением Новогоднее-Монто по следующим признакам: 1) связь с конгорским комплексом, контролирующим золото-сульфидно-кварцевое оруденение; 2) подобная рудоконтролирующая система разломов северо-западного простирания; 3) близкий минеральный состав скарнов; 4) схожее расположение кварц-серицитовых образований в пространстве. Рудопроявление обладает благоприятными условиями для обнаружения золотого оруденения.

## **2. Минералого-петрографическая характеристика вмещающих пород проявления Первая Рудная Горка**

К формированию метаморфических образований за счет перекристаллизации первичных горных пород приводит изменение термодинамических условий. По геологическому масшта-

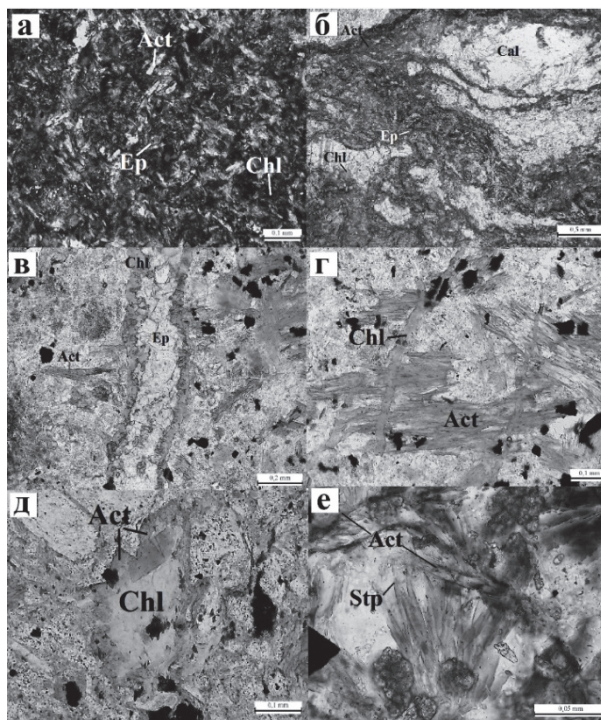
бу проявлений наибольшие территории охватывает региональный тип преобразований, являющийся результатом одновременного воздействия температуры, литостатического давления и стресса. На площади рудопоявления Первая Рудная Горка выявлена низкая степень регионального метаморфизма, особое распространение получили зеленокаменные породы. Выделено несколько типов пород со следующими характерными ведущими минеральными ассоциациями: хлорит + актинолит + эпидот, хлорит + эпидот, актинолит + эпидот.

Наибольшее распространение получили породы с *хлорит-актинолит-эпидотовым* парагенезисом вторичных минералов. Под воздействием низких температур они сохраняют реликты первичного строения горных пород, тем самым отражая их историю происхождения. Структура пород выделенной группы, вероятно, является реликтовой структурой вулканогенно-осадочных пород. Преобладает мелкозернистая лепидогранобластовая структура (рис. 2, а), представленная новообразованными изометричными зернами кварца и эпидота, а также развитием хаотично ориентированных чешуек хлорита. В некоторых случаях отмечается бластопорфировая структура, где в качестве реликтовых отмечены вкрапленники плагиоклаза, слагающего в метавулканитах крупные таблитчатые кристаллы. Текстура в основном массивная, реже наблюдается сланцеватая, встречается волнисто-слоистая с элементами полосчатой (рис. 2, б), обусловленная чередованием ярко окрашенных зеленых удлиненных однонаправленных скоплений актинолита, хлорита и эпидота с кварц-карбонатными полосами. Минеральный состав определяется преобладающим развитием новообразованных минералов – эпидота (30 об. %), хлорита (20 об. %), кварца (15 об. %), актинолита (10 об. %), кальцита (10 об. %), стильномелана (5 об. %) и лейкоксена (менее 1 об. %), реликтовые минералы встречаются редко – кварц (5 об. %) и плагиоклаз (5 об. %).

По всей площади шлифов встречается желтовато-зеленый эпидот в виде рассеянных мелких зерен, более крупные индивиды редко образуют скопления и прожилки мощностью до 0,2 мм. Мелкие изометричные кристаллы формируют мелкопрожилковую сеть.

Хлорит представлен хаотично ориентированными чешуйчатыми индивидами, формирующими лусчатые скопления, слагает хлорит-актинолитовые

прожилки и окаймляет эпидотовые прожилки (мощность каймы до 0,05 мм) (рис. 2, в). Буровато-зеленый хлорит замещает первичные темноцветные минералы вулканитов.



**Рис. 2.** Петрографические особенности хлорит-актинолит-эпидотовых пород:

с анализатором: а – лепидогранобластовая структура; без анализатора: б – волнисто-слоистая текстура с элементами полосчатой, в – хлорит в зальбандах эпидотового прожилка, г – волокнистый агрегат актинолита, д – псевдоморфное замещение актинолита тонкочешуйчатым агрегатом хлорита, е – радиально-лучистый агрегат стильномелана; Act – актинолит; Cal – кальцит; Chl – хлорит; Ep – эпидот; Stp – стильномелан  
**Figure 2.** Petrographic features of chlorite-actinolite-epidote rocks: with an analyzer: a – lepidogranoblast structure; without analyzer: б – wavy-layered texture with strip elements, в – chlorite in the selvage of the epidote vein, г – fibrous actinolite aggregate, д – pseudomorphic substitution of actinolite with a thin-skinned chlorite aggregate, е – radial stilpnomelane aggregate; Act – actinolite; Cal – calcite; Chl – chlorite; Ep – epidote; Stp – stilpnomelane

Актинолит распространен в виде крупных «обломков», реже наблюдаются деформированные изогнутые зерна, подверженные замещению хлоритом, а также представлен мелкими игольчатыми нитевидными ориентированными выделениями (рис. 2, г). Совместно с хлоритом образует псевдоморфозы по темноцветным минералам, иногда отмечается замещение актинолита тонкочешуйчатым агрегатом хлорита (рис. 2, д). Часто в подчиненном количестве входит в состав хлорит-актинолитовых прожилков.

Стильномелан представлен удлиненными листоватыми индивидами с интенсивной бурой

окраской и высокими цветами интерференции. Биотитоподобный минерал образует беспорядочно ориентированные чешуйки по всей площади породы, средний размер которых составляет  $0,05 \times 0,1$  мм, часто слагает радиально-лучистые агрегаты (рис. 2, е).

Плагиоклаз (андезин) слагает крупные таблитчатые, реже удлиненно-призматические кристаллы, представляя собой реликты порфировых вкрапленников. Мелкие лейсты плагиоклаза редко отмечаются в составе основной массы, поскольку большая часть зерен подвержена зеленокаменным изменениям.

Кварц распространен в виде мелких идиоморфных зерен совместно с кальцитом, нередко чередуется с зонами распространения минеральной массы хлорит-актинолит-эпидотового состава. Наряду с новообразованными зеленокаменными минералами слагает общую ткань породы.

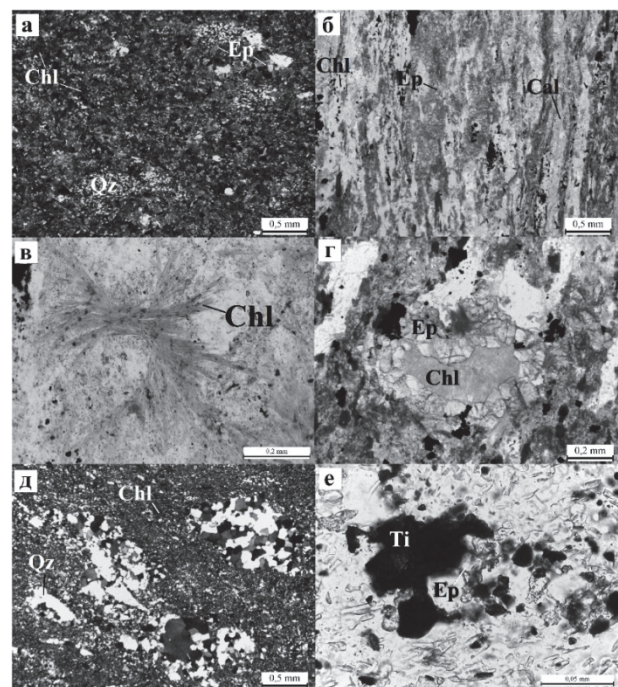
Кальцит отмечается довольно редко, развивается совместно с кварцем в виде линзовидных образований.

Лейкоксен – вторичный минерал, представленный тонкими желтовато-рыжими выделениями вблизи рудных минералов, реже образует собственные выделения до  $0,01 \times 0,03$  мм.

Несколько реже встречаются породы хлорит-эпидотового состава. В отличие от хлорит-актинолит-эпидотовых разностей, метаморфизм слабее затронул рассматриваемые породы. Структура пород лепидогранобластовая, реже бластопорфировая (рис. 3, а), обусловленная распространением линзовидных существенно кварцевых образований. Текстура массивная, реже сланцеватая с элементами полосчатой (рис. 3, б), где поочередно сменяются слабоокрашенные прослои карбонатного состава и зеленоватые – эпидотового (кварц и хлорит встречаются в каждом слое в различных пропорциях), в единичных случаях – флюидальная. Породы слагают новообразованные минералы – хлорит (30 об. %), эпидот (25 об. %), кварц (25 об. %), кальцит (10 об. %) и лейкоксен (менее 1 об. %), реже встречаются реликтовые минералы, в основном представленные плагиоклазом (менее 1 об. %).

Хлорит, со слабым плеохроизмом от бледно-зеленого до желтовато-зеленого цвета, распространен в виде тонкочешуйчатых скоплений неправильной формы, средний размер которых составляет  $0,5 \times 0,8$  мм. В мелкозернистой кварцевой массе встречаются его однонаправленно ориен-

тированные выделения совместно с эпидотом. В некоторых случаях хлорит связан с рудными образованиями, вокруг которых минерал формирует каемки с аномальной фиолетово-коричневой интерференционной окраской, больше характерной для железистых разностей. Редко хлорит распространен в виде радиально-лучистых игольчатых, зачастую изогнутых индивидов (рис. 3, в), отмечается также в виде мелких кристаллов таблитчатого габитуса, размер которых варьирует от  $0,005 \times 0,02$  мм, преобладает до  $0,06 \times 0,1$  мм. Более крупные индивиды тяготеют к прожилкам кварц-эпидотового состава, реже к скоплениям рудного минерала.



**Рис. 3.** Петрографические особенности пород хлорит-эпидотового состава: с анализатором: а – бластопорфировая структура, д – линзовидные скопления перекристаллизованного кварца; без анализатора: б – полосчатая текстура, в – радиально-лучистые изогнутые индивиды хлорита, г – реликтовая миндалекаменная текстура: центральную часть миндалины выполняет хлорит, а краевую – идиоморфные кристаллики эпидота; е – выделения лейкоксена неправильной формы; Qz – кварц; Ti – лейкоксен

**Figure 3.** Petrographic features of the chlorite-epidote rocks: with an analyzer: а – blastoporphoric structure, д – lenticular clusters of recrystallized quartz; without analyzer: б – banded texture, в – radial curved individuals of chlorite, г – relict almond-stone texture: the central part of the amygdala is performed by chlorite, and the marginal – idiomorphic epidote crystals; е – irregular form of leucoxene; Qz – quartz; Ti – leucoxene

Эпидот представлен короткопризматическими кристаллами, размер которых достигает  $0,1 \times 0,2$  мм, реже индивидами удлиненно-призматического габитуса (до  $0,25 \times 1,1$  мм), иногда образует каемки

вокруг выделений хлорита неправильной формы (до 0,2 мм), выполняя совместно с ним мелкие миндалины (рис. 3, *з*). Преимущественно распространен в виде мономинеральных эпидотовых прожилков (до 0,3 мм), реже входит в состав кварц-эпидотовых прожилков.

Кварц встречается как в основной массе в виде мелких зерен неправильной формы, так в качестве более крупных «вкрапленников». «Вкрапленники» ориентированы, имеют вытянутую линзовидную форму и сложены мелкозернистыми кристаллами кварца (рис. 3, *д*). Происхождение образований такого рода является дискуссионным, предположительно они образованы в результате рекристаллизации (грануляции) бывших фенокристаллов. Породу пересекают прожилки кварцевого и кварц-эпидотового (до 0,4 мм) состава.

Плагиоклаз является довольно редким минералом – иногда наблюдается в основной массе в виде единичных мелких зерен неправильной формы (до 0,05×0,15 мм), в единичном случае отмечается удлиненное зерно в качестве вкрапленника.

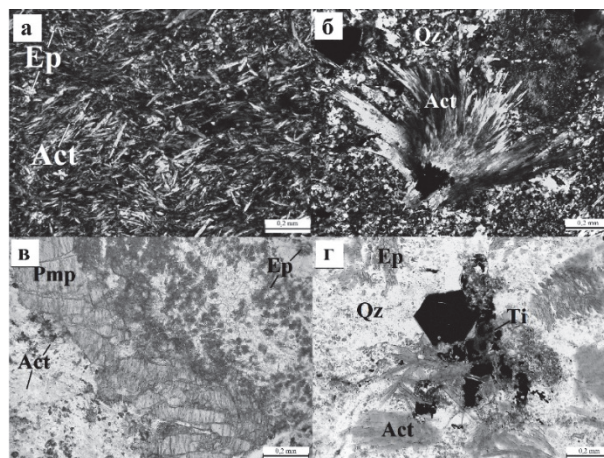
Лейкоксен представлен рыжеватыми выделениями (рис. 3, *е*), приуроченными к скоплениям рудных минералов, редко наблюдается связь с образованиями эпидота, в единичных случаях слагает тонкие прожилки мощностью до 0,01 мм.

*Актинолит-эпидотовые* метаморфиты характеризуются лепидогранобластовой структурой (рис. 4, *а*), редко отмечается бластопорфировая. Текстура массивная. Данный тип метаморфических образований наиболее широко проявлен среди выделенных групп. Состав пород представлен новообразованными минералами – актинолитом (40 об. %), эпидотом (30 об. %), кварцем (15 об. %), пумпеллиитом (5 об. %), кальцитом (5 об. %) и лейкоксеном (менее 1 об. %).

Почти бесцветный актинолит отличается слабым плеохроизмом до бледно-зеленого цвета и представлен удлиненно-призматическими кристаллами. Часто актинолит формирует зоны беспорядочно ориентированных игольчатых кристаллов мощностью до 2,25 мм, в ряду случаев радиально-лучистые сноповидные выделения (рис. 4, *б*), плеохроирующие от яркого желтовато-зеленого до насыщенного сине-зеленого цвета. Средний размер зерен в составе скоплений составляет 0,04×0,22 мм.

Эпидот получил особое распространение вблизи трещин. Размер кристаллов коротко-призматического габитуса достигает 0,04×0,08 мм. Плеохроизм наблюдается от бесцветного до желтоватого. Входит в состав кварц-эпидотовых прожилков. Вблизи некоторых скоплений рудного минерала отмечаются рыжеватые каемки, обусловленные развитием лейкоксена (рис. 4, *з*), к ним также приурочены выделения эпидота.

чического габитуса достигает 0,04×0,08 мм. Плеохроизм наблюдается от бесцветного до желтоватого. Входит в состав кварц-эпидотовых прожилков. Вблизи некоторых скоплений рудного минерала отмечаются рыжеватые каемки, обусловленные развитием лейкоксена (рис. 4, *з*), к ним также приурочены выделения эпидота.



**Рис. 4.** Петрографические особенности актинолит-эпидотовых метаморфитов: с анализатором: *а* – лепидогранобластовая структура, *б* – сноповидные выделения игольчатого актинолита; без анализатора: *в* – трещиноватое зерно пумпеллиита неправильной формы, *з* – выделения лейкоксена неправильной формы, приуроченные к рудным образованиям; *Pmp* – пумпеллиит  
**Figure 4.** Petrographic features of actinolite-epidote rocks: with an analyzer: *a* – lepidogranoblast structure, *b* – sheaf needle actinolite isolation; without analyzer: *в* – fractured grain of pumpellyite, *з* – irregular form of leukocene related with ore; *Pmp* – pumpellyite

Пумпеллиит встречается редко в виде крупных трещиноватых зерен неправильной формы (рис. 4, *в*), в единичных случаях наблюдаются кристаллы таблитчатого габитуса (до 1,25×2,1 мм). Отмечается слабый плеохроизм от желтоватого до зеленоватого оттенка, а также аномальные синие цвета интерференции.

Кварц составляет кварц-эпидотовые (до 0,05 мм) и кварцевые (до 0,25 мм) прожилки. В бластопорфировой структуре имеет место в качестве вкрапленников неправильной формы, а также в основной массе.

Кальцит формирует собственные прожилки и образует вытянутые линзы, размер которых достигает 0,5×2,75 мм.

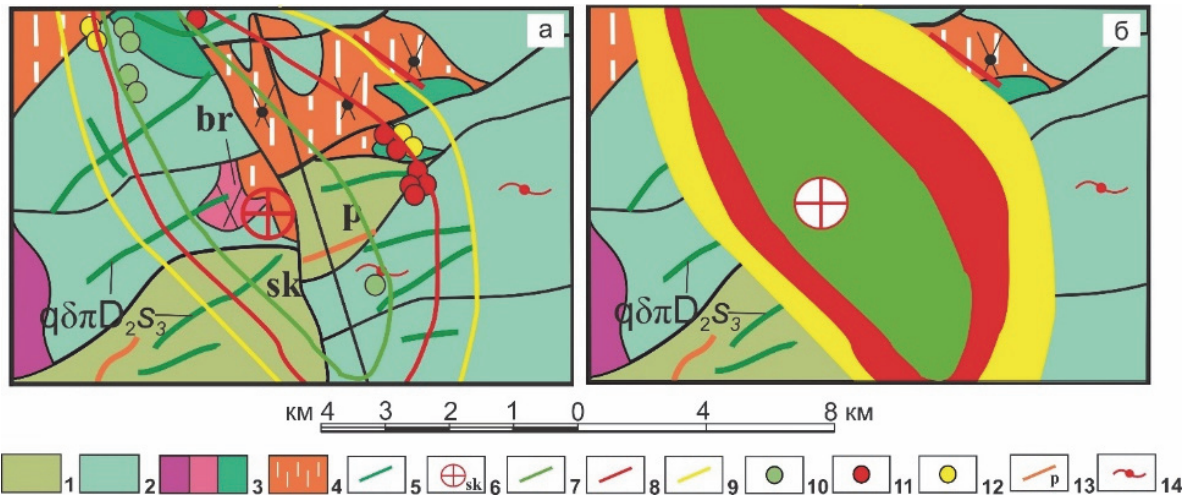
Плагиоклаз отмечается в единичных случаях, в качестве вкрапленников удлиненно-призматического габитуса.



### 3. Интерпретация результатов

Низкотемпературные метаморфические образования зеленосланцевой фации близки по минеральному составу к пропилитам [6; 10; 11]. Зеленокаменные породы отличаются по составу более разнообразными минеральными ассоциациями, структурно-текстурными особенностями, в первую очередь чаще развитой сланцеватой

текстурой, а также обширной распространенностью этого типа изменений. Зеленокаменные преобразования имеют площадной характер, который находится в малой зависимости от развития тектонических нарушений и субвулканических образований. Однако до сих пор проведение четкой границы разделения пропилитов и зеленокаменных пород является дискуссионным [8; 12; 13].



**Рис. 5.** Схема зональности развития ассоциаций вторичных минералов проявления Первая Рудная Горка.

Геологическая основа [2] с изменениями:

- а – схема в линиях; б – схема с заливками: 1 – лавы и кластолавы базальтов и андезибазальтов, 2 – базальты, 3 – собский комплекс, 4 – конгорский комплекс, 5 – мусюрский комплекс, 6 – позиция проявления Первая Рудная Горка, 7–9 – границы предполагаемой зональности минеральных ассоциаций: 7 – актинолит + эпидот, 8 – хлорит + актинолит + эпидот, 9 – хлорит + эпидот; точки отбора проб по минеральному составу: 10–12 – области преобладающего развития (по точкам отбора изученных шлифов): 10 – актинолит-эпидотовых пород, 11 – хлорит-актинолит-эпидотовых пород, 12 – хлорит-эпидотовых пород; 13 – линейные зоны метасоматически измененных пород: пропилиты, березиты (br); 14 – зеленосланцевая фация

**Figure 5.** The zoning scheme for the development of associations of secondary minerals the Pervaya Rudnaya Gorka ore occurrence.

Geological basis [2] with changes:

- а – scheme in lines; б – scheme with fills: 1 – lavas and clastolaves of basalts and andesibasalts, 2 – basalts, 3 – Musyursky complex, 4 – Kongorsky complex, 5 – Musyursky complex, 6 – position of the Pervaya Rudnaya Gorka ore occurrence, 7–9 – the borders of supposed zonality of mineral associations: 7 – actinolite + epidote, 8 – chlorite + actinolite + epidote, 9 – chlorite + epidote; sampling points for mineral composition: 10–12 – areas of predominant development (by points of sampling of studied thin section): 10 – actinolite-epidote rocks, 11 – chlorite-actinolite-epidote rocks, 12 – chlorite-epidote rocks; 13 – linear zone of metasomatic rocks: propyl, beresotes (br); 14 – green shale facies

На рудопроявлении Первая Рудная Горка распространены несколько минеральных типов пород: хлорит-актинолит-эпидотовые, хлорит-эпидотовые и актинолит-эпидотовые. Породы объединяет во многом схожее строение: новообразованная лепидогранобластовая структура, реже встречается первичная бластопорфировая, а также характерные текстуры – массивная, волнисто-слоистая с элементами полосчатой, вызванная неравномерным распределением окрашенных минералов, реже флюидалная. Минеральный состав зеленокаменных пород схож с пропилитами, за исключением преобладающего развития кварца в метаморфитах, обусловленного обычно существенно более кислым составом протолита, сравнительно широкого развития лейкоксена, образованного в резуль-

тате изменения титаномагнетита, а также ограниченным распространением стилипномелана и пумпеллиита. В свою очередь пумпеллиит, отмечающийся в актинолит-эпидотовой разности пород, говорит о повышенном давлении, которое не достигалось в пропилитах. Однако возможна синвулканическая пропилитизация вулканитов, обусловленная повышенной фугитивностью CO<sub>2</sub> гидротермальных флюидов [11]. В то же время сланцеватость в зеленокаменных породах не всегда служит признаком метаморфизма, поскольку отчасти является реликтовой текстурой, унаследованной от слоистости вулканогенно-осадочных пород [14].

Важно отметить, что одним из характерных признаков пропилитов является зональность. В свою

очередь, на рудопроявлении Первая Рудная Горка прослеживается латеральная зональность, вероятно, обусловленная снижением температуры. Это подтверждает предположение о гидротермально-метасоматической природе образований. Данная территория была затронута процессом пропилитизации, и развитие получила следующая зональность: актинолит + эпидот → хлорит + актинолит + эпидот → хлорит + эпидот (рис. 5).

## Заключение

Метаморфические образования на рудопроявлении Первая Рудная Горка представлены следующими типами: хлорит-актинолит-эпидотовыми, хлорит-эпидотовыми и актинолит-эпидотовыми породами, характеризующимися лепидогранобластовой структурой, реже – реликтовой бластопорфировой, а также массивной, волнисто-слоистой с элементами полосчатой текстурой. Минеральный состав пород определяется преобладающим развитием новообразованных минералов: эпидота (до 30 об. %), хлорита (до 20 об. %), актинолита (до 10 об. %), кварца (10 об. %), кальцита (10 об. %), стильпномелана (до 5 об. %), пумпеллиита (до 5 об. %) и лейкоксена (менее 1 об. %), реликтовые минералы встречаются редко – кварц (5 об. %) и плагиоклаз (5 об. %).

На рудопроявлении установлено площадное развитие процесса пропилитизации, представленного латеральной зональностью, обусловленной понижением температуры воздействующих на породы растворов. Метасоматическая колонка представляет следующую последовательность изменений минеральных парагенезисов (от внутренней зоны к наружной): актинолит + эпидот → хлорит + актинолит + эпидот → хлорит + эпидот. Отличия минерального состава выделенных пропилитов говорят о фациальном разнообразии региона. Гидротермально-метасоматические изменения пропилитовой формации являются одним из важнейших региональных признаков рудоносности, свидетельствующих о масштабном предрудном метасоматозе.

По результатам комплексных минералогическо-петрографических и геологических исследований выявлены схожие минеральный состав, структурно-текстурные особенности и геологическое строение проявления Первая Рудная Горка и месторождения Новогоднее-Монто. Схожее строение объектов обусловлено как близким составом исходных вмещающих вулканогенно-осадочных

пород, так и скарновых образований. Они связаны с одинаковыми интрузивными комплексами и разломами северо-западного направления, а также характеризуются близкой позицией кварц-серицитовых образований в пространстве. Все это делает исследуемый объект перспективным на обнаружение золотой минерализации. Следовательно, железорудное проявление Первая Рудная Горка целесообразно рассматривать как перспективный объект для поисков золотого оруденения.

Полученные результаты исследований можно использовать как дополнительный критерий для прогнозирования золоторудной минерализации на прилегающих территориях.

## Список литературы

1. Викентьев И.В., Мансуров Р.Х., Иванова Ю.Н., Тюкова Е.Э., Соболев И.Д., Абрамова В.Д., Выхристенко Р.И., Хубанов В.Б., Трофимов А.П., Грознова Е.О., Двуреченская С.С., Кряжев С.Г. Золото-порфировое Петропавловское месторождение (Полярный Урал): геологическая позиция, минералогия и условия образования // Геология рудных месторождений. 2017. Т. 59. № 6. С. 501–541. <http://doi.org/10.7868/S001677701706003X>
2. Кучерина П.М., Попов И.И., Прямоносов А.П., Крашенинников А.Л., Крашенинникова Л.И., Перминов И.Г., Цвигун Л.Н., Гаптулкадыров М.М., Мустакимова Е.А. Геологическое строение и полезные ископаемые северо-западной части Войкарского синклинория, площади массива Рай-Из и его обрамления 1:50000: информационный отчет: в 2 т. Пос. Полярный: ПУГРЭ, 1991. Т. 1. 431 с.
3. Прямоносов А.П., Степанов А.Е., Бороздина Г.Н. Стратотип устьконгорской свиты Войкарской СФЗ (Восточный склон Полярного Урала) // Уральский геологический журнал. 2010. № 3 (75). С. 11–14.
4. Соболев И.Д., Соболева А.А., Удоратина О.В., Канева Т.А., Куликова К.В., Викентьев И.В., Хубанов В.Б., Буянтуев М.Д., Хоуриган Дж.К. Первые результаты U-Pb (LA-ICP-MS) датирования детритовых цирконов из палеозойских островодужных обломочных пород Полярного Урала // Бюллетень Московского общества испытателей природы. Отдел геологический. 2017. Т. 92. Вып. 4. С. 3–26.
5. Соболев И.Д., Соболева А.А., Удоратина О.В., Варламов Д.А., Хоуриган Дж.К., Хубанов В.Б., Буянтуев М.Д., Соболева Д.А. Девонский островодужный магматизм Войкарской зоны Полярного Урала // Геотектоника. 2018. № 5. С. 39–74.
6. Волчков А.Г., Гирфанов М.М., Кряжев С.Г., Андреев А.В., Черемсин А.А., Мансуров Р.Х., Двуреченская С.В., Зеликсон Б.С., Сапожников В.Г. Положение проявлений золоторудной минерализации Тоупул-Ханмейшорского рудного узла в рудовмещающих

комплексах, их минералого-геохимическая характеристика и сопоставление с эталонными объектами Новогодненского рудного поля // Отчет по договору № 94д. М.: ФГУП ЦНИГРИ, 2008.

7. Шишкин М.А., Астапов А.П., Кабатов Н.В., Казак А.П., Колесник Л.С., Котельников В.Г., Кудрин Е.Н., Лихотин В.Г., Митюшева В.С., Молчанова Е.В., Попов М.Я., Попов П.Е., Пухонто С.К., Ремизов Д.Н., Савенкова Г.Б., Файбусович Я.Э., Черкашин А.В. Государственная геологическая карта Российской Федерации. Масштаб 1:1000000 (3-е поколение) // Сер. Уральская. Лист Q-41 (Воркута). Об. зап. / под ред. В.П. Водолазкой. СПб.: ВСЕГЕИ, 2007. 541 с.

8. Зылева Л.И., Коновалов А.Л., Казак А.П., Жданов А.В., Коркунов К.В., Денисов В.А., Новикова Л.П., Румянцева Н.А., Черепанов Ю.П., Черкашин А.В., Хрякова Л.А. Государственная геологическая карта Российской Федерации. Масштаб 1:1000000 (3-е поколение) // Сер. Зап.-Сибирская. Лист Q-42 (Салехард). Об. зап. / под ред. А.В. Жданова. СПб.: ВСЕГЕИ, 2014. 396 с.

9. Черняев Е.В., Черняева Е.И., Седельников А.Ю. Геология золото-скарнового месторождения Новогоднее-Монто (Полярный Урал) // Скарны, их генезис и рудоносность (Fe, Cu, Au, W, Sn): XI Чтения А.Н. Заварицкого. Екатеринбург: Институт геологии и геохимии УрО РАН, 2005. С. 131–137.

10. Русинов В.Л. Геологические и физико-химические закономерности пропилитизации. М.: Наука, 1972. 204 с.

11. Русинов В.Л. Метасоматические процессы в вулканических толщах. М.: Наука, 1989. 213 с.

12. Метасоматизм и метасоматические породы / под ред. В.А. Жарикова, В.Л. Русинова. М.: Научный мир, 1998. 492 с.

13. Марин Ю.Б. Петрография. СПб: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. 408 с.

14. Soloviev S.G., Kryazhev S.G., Dvurechenskaya S.S. Geology, mineralization, stable isotope geochemistry, and fluid inclusion characteristics of the Novogodnee-Monto oxidized Au-(Cu) skarn and porphyry deposit, Polar Ural, Russia // Mineralium Deposita. 2013. Vol. 48. No 5. Pp. 603–627.

## References

1. Vikentyev IV, Mansurov RKh, Ivanova YuN, Tukova EE, Sobolev ID, Abramova VD, Vykhristenko RI, Trofimov AP, Khubanov VB, Groznova EO, Dvurechenskaya SS, Kryazhev SG. Porphyry-style Petropavlovskoe Gold deposit, the Polar Urals: geological position, mineralogy, and formation conditions. *Geology of Ore Deposits*. 2017;59(6):501–541. (In Russ.) <http://doi.org/10.7868/S001677701706003X>

2. Kucherina PM, Popov II, Pryamonosov AP, Krashennikov AL, Krashennikova LI, Perminov IG, Tsvigun LN, Gaptulkadyrov MM, Mustakimova EA. *Geological structure and minerals of the north-west part of the Voikar synclinorium, the area of the Rai-Iz massif and its framing 1:50000: information report* (vol. 1). Polyarnyi: PUGEE Publ.; 1991. (In Russ.)

3. Pryamonosov AP, Stepanov AE, Borozhdina GN. Stratotype of the Ust'kongorskaya Formation of the Voikarskaya SFZ (Eastern Slope of the Polar Urals). *Ural Geol. Journal*. 2010;(3(75)):11–14.

4. Sobolev ID, Soboleva AA, Udoratina OV, Kaneva TA, Kulikova KV, Vikentiev IV, Khubanov VB, Buyantuev MD, Hourigan JK. First results of U–Pb (LA-ICP-MS) dating of detrital zircons from Paleozoic island arc clastic rocks of the Polar Urals. *Byulleten' Moskovskogo Obshchestva Ispytatelei Pri-Rody. Otdel Geologicheskii* 2017;92(4):3–26.

5. Sobolev ID, Soboleva AA, Udoratina OV, Varlamov DA, Hourigan JK, Khubanov VB, Buyantuev MD, Soboleva DA. Devonian island-arc magmatism of the Voikar zone in the Polar Urals. *Geotectonics*. 2018;52(5):531–563.

6. Volchikov AG, Girfanov MM, Kryazhev SG, Andreev AV, Cheremsin AA, Mansurov RH, Dvurechenskaya SV, Zelikson BS, Sapozhnikov VG. The position of gold mineralization of the Touputugol-Khanmeishorsky ore area in ore-containing complexes, their mineral and geochemical characteristics and comparison with the reference objects of the Novogodnee-Monto mineralized area. *Report No. 94d*. Moscow: FGUP TsNIGRI; 2008. (In Russ.)

7. Shishkin MA, Astapov AP, Kabatov NV, Kazak AP, Kolesnik LS, Kotelnikov VG, Kudrin EN, Likhotin VG, Mityusheva VS, Molchanova EV, Popov MYa, Popov PE, Puhonto SK, Remizov DN, Savenkova GB, Faibusovich YaE, Cherkashin AV. *The 1:1000000 State Geological Map of the Russian Federation (3rd ed.)*. Series Ural. Sheet No. Q-41 (Vorkuta). Explanatory note (V.P. Vodolazskaya, ed.). Saint Petersburg: VSEGEI Publ.; 2007.

8. Zyleva LI, Konvalov AL, Kazak AP, Zhdanov AV, Korkunov KV, Denisov VA, Novikova LP, Rumyantseva NA, Cherepanov YuP, Cherkashin AV, Khryakova LA. *State 1:1000000 Geological Map of the Russian Federation (3rd ed.)*. Series Western Siberian. Sheet No. Q-42 (Salekhard). Explanatory note (A.V. Zhdanov, ed.). Saint Petersburg: VSEGEI Publ.; 2014.

9. Chernyaev EV, Chernyaeva EI, Sedelnikov AYU. Geology of Novogodnee-Monto Au-skarn deposit (Polar Urals). *The Skarns, Their Genesis and Ore Mineralization (Fe, Cu, Au, W, Sn): Proceedings of the XI A.N. Zavaritsky Readings*. Ekaterinburg; 2005. p. 131–137. (In Russ.)

10. Rusinov VL. *Geological, physic and chemical laws of propylitization*. Moscow: Nauka Publ.; 1972. (In Russ.)

11. Rusinov VL. *Metasomatic processes in volcanic strata*. Moscow: Nauka Publ.; 1989. (In Russ.)

12. Zharikov VA, Rusinov VL. (eds.) *Metasomatism and metasomatic rocks*. Moscow: Nauchny Mir Publ.; 1998. (In Russ.)

13. Marin YuB. *Petrography*. Saint Petersburg: Mining University Publ.; 2015. (In Russ.)

14. Soloviev SG, Kryazhev SG, Dvurechenskaya SS. Geology, mineralization, stable isotope geochemistry, and fluid inclusion characteristics of the Novogodnee-Monto oxidized Au-(Cu) skarn and porphyry deposit, Polar Ural, Russia. *Mineralium Deposita*. 2013;48(5):603–627.

#### **Сведения об авторах**

*Иванова Екатерина Сергеевна*, инженер лаборатории металлогении и рудогенеза, Институт геологии и геохронологии докембрия, Российская академия наук, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, наб. Макарова, д. 2. ORCID: 0000-0002-5446-2484, eLIBRARY SPIN-код: 4223-0342. E-mail: ekate.s.ivanova@gmail.com

*Иванова Юлия Николаевна*, кандидат геолого-минералогических наук, научный сотрудник лаборатории геологии рудных месторождений Институт геологии рудных месторождений, петрографии, минералогии и геохимии, Российская академия наук, Российская Федерация, 119017, Москва, Старомонетный пер., д. 35; доцент департамента недропользования и нефтегазового дела, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6. ORCID: 0000-0001-9742-9791, eLIBRARY SPIN-код: 1692-3336. E-mail: jnivanova@yandex.ru

#### **About the authors**

*Ekaterina S. Ivanova*, engineer in the Laboratory of Metallogeny and Ore Genesis, Institute of Precambrian Geology and Geochronology, Russian Academy of Science, 2 Naberezhnaya Makarova, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation. ORCID: 0000-0002-5446-2484, eLIBRARY SPIN-code: 4223-0342. E-mail: ekate.s.ivanova@gmail.com

*Julia N. Ivanova*, PhD, researcher in the Laboratory of Geology of Ore Deposits, Institute of Geology of Ore Deposits, Petrography, Mineralogy and Geochemistry, Russian Academy of Sciences, 35 Staromonetnyi Pereulok, Moscow, 119017, Russian Federation; Associate Professor, Department of Mineral Developing and Oil & Gas Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation. ORCID: 0000-0001-9742-9791, eLIBRARY SPIN-code: 1692-3336. E-mail: jnivanova@yandex.ru