Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования
RUDN Journal of Engineering Research

2024;25(3):288–295

ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)
journals.rudn.ru/engineering-researches

DOI: 10.22363/2312-8143-2024-25-3-288-295
УДК 51-7
EDN: YNNOZA

Научная статья / Research article

Точные и частные решения в форме выпуклых четырехугольников, взаимодействующих по закону четырех тел

Ю.В. Перепелкина

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, *Москва, Россия*
✉ amadeycity@yandex.com

История статьи

Поступила в редакцию: 22 марта 2024 г.
Доработана: 8 июня 2024 г.
Принята к публикации: 22 июня 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Аннотация. Доказано существование точных частных решений в форме выпуклых четырехугольников в общей задаче четырех тел, взаимодействующих по произвольному закону $\sim 1/r^{\kappa}$, где $k \geq 2$. Для каждого фиксированного $k \geq 2$ найдены расстояния между телами и соответствующие им совокупности четырех масс, определяющих частные решении в форме квадрата, ромба, дельтоида и трапеции. На основе методологии работ классиков выведены уравнения движения в переменных Рауса — Ляпунова в общей задаче четырех тел, взаимодействующих по совершенно произвольному закону, как это имело место при доказательстве Лапласом существования точных частных треугольных решений общей задачи трех тел с произвольными массами. Приведено объяснение проблемы существования данного типа решений, обусловленной, в частности, более сложной геометрией четырехугольных решений по сравнению с треугольными, существование которых доказано в общей задаче трех тел классиками небесной механики. Высказывается предположение, что если произвольность закона взаимодействия несколько ограничить, можно численными методами доказать существование точных частных решений при различных фиксированных значениях $k \geq 2$ и неравных значениях масс четырех тел.

Ключевые слова: небесная механика, задача четырех тел, переменные Рауса — Ляпунова, частные решения, законы взаимодействия, ограниченные задачи

Для цитирования

Перепелкина Ю.В. Точные и частные решения в форме выпуклых четырехугольников, взаимодействующих по закону четырех тел // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2024. Т. 25. № 3. С. 288–295. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-3-288-295

Exact Partial Solution in a Form of Convex Tetragons Interacting According to the Arbitrary Law for Four Bodies

Yulianna V. Perepelkina

Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, *Moscow, Russia*
amadeycity@yandex.com

Article history
Received: March 22, 2024
Revised: June 8, 2024
Accepted: June 22, 2024

Conflicts of interest
The author declares that there is no conflict of interest.

Abstract. We prove the existence of exact partial solutions in the form of convex quadrilaterals in the general problem of four bodies mutually acting according to an arbitrary law $\sim 1/r^{\kappa}$, where $k \geq 2$. For each fixed $k \geq 2$ the distances between the bodies and their corresponding sets of four masses are found, which determine private solutions in the form of square, rhombus, deltoid and trapezoid. On the basis of the methodology of classical works the equations of motion in Raus — Lyapunov variables in the general problem of four bodies interacting according to a completely arbitrary law are derived, as it took place when Laplace proved the existence of exact partial triangular solutions of the general problem of three bodies with arbitrary masses. An explanation of the problem of existence of this type of solutions is given, due, in particular, to the more complicated geometry of quadrangular solutions in comparison with triangular ones, the existence of which is proved in the general three-body problem by the classics of celestial mechanics. It is suggested that if the arbitrariness of the interaction law is somewhat restricted, it is possible to prove by numerical methods the existence of exact partial solutions at different fixed values $k \geq 2$ and unequal values of the masses of the four bodies.

Keywords: celestial mechanics, four-body problem, Raus — Lyapunov variables, particular solutions, laws of interaction, bounded problems

For citation
Perepelkina YuV. Exact partial solution in a form of convex tetragons interacting according to the arbitrary law for four bodies. *RUDN Journal of Engineering Research.* 2024;25(3):288–295. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-3-288-295

Введение

Классики небесной механики, в частности Л. Эйлер[1] и Дж. Лагранж[2], доказали существование в неинтегрируемой общей задаче трех взаимодействующих по закону притяжения Ньютона тел-точек (то есть в ее классическом варианте) точных частных решений — треугольных (лагранжевых) и прямолинейных (эйлеровых). Позже Лаплас[3] доказал, что и прямоугольные и треугольные решения в этой задаче существуют не только в классическом случае ньютоновского притяжения, но и при произвольном законе взаимодействия, зависящем кроме масс тел лишь от расстояний между телами (точками). Поэтому треугольные решения задачи трех тел в случае отличия закона взаимодей-

[1] *Evlero L.* Formvlae Generales Pro Translatione Qvacvnqve Corporvm Rigidorvm // Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro Anno MDCCLXXV. 1760. Vol. XX. P. 189–207. URL: http://www.17centurymaths.com/contents/euler/e478tr.pdf (accessed: 12.03.2024).

[2] *Lagrange J.-L.* Essai sur le problème des trois corps // Oeuvres de Lagrange. Gauthier-Villars. 1772. Vol. 6 (II). P. 229–334. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229225j/f231.image.r=Oeuvres+de+Lagrange.langFR (accessed: 12.03.2024).

[3] *Laplas P.S.* Traite de Mecanique celeste. Paris, 1805. Vol. 4. P. 307–313. URL: https://archive.org/details/traitdemcani01lapl/page/n7/mode/2up (accessed: 15.03.2024).

ствия от ньютоновского называются также лапласовыми.

Что касается проблемы устойчивости вышеупомянутых решений, то ее решением занимался не только сам Лаплас, но и несколько последователей этой теории, наиболее известными из которых были Лиувилль [1] и Раус [2]. Последний внес в теорию наибольший вклад с точки зрения математической формализации задачи, обобщив критерий устойчивости треугольных решений в задаче трех тел M, m, m', для закона притяжения пропорционального $1/r^2$, рассмотренного ранее на случай закона взаимодействия, пропорционального $1/r^\kappa$. Затем, при упрощающих предположениях, что рассматриваемый треугольник можно принять как равносторонний и угол между его сторонами близок к $\pi/3$, а также считая массу $M=1$ неподвижной, Раус вывел уравнения движения двух остальных тел m, m' относительно тела M. В трудах было отмечено, что предложенные переменные и система уравнений задачи трех тел имеют заметные преимущества перед системой уравнений движения, записываемой относительно центра масс системы.

Далее А.М. Ляпунов [3] развил метод Рауса, сняв упомянутые упрощающие предположения, но сохранив подход к выводу системы уравнений движения и основную часть обозначений. Переменные и форма уравнений движения оказались весьма удобными, многими использовались и получили название уравнений и переменных Ляпунова или Рауса — Ляпунова.

В 1960–1970 гг. к проблеме обобщения классических задач небесной механики, под которыми здесь будут пониматься варианты, в которых не предполагается выполнение третьей аксиомы механики (действие в системе взаимодействующих тел не равно противодействию), обратился Г.Н. Дубошин [4]. Сначала им рассмотрен случай, когда каждые две точки взаимодействуют по особому закону и предполагается, что третья аксиома механики выполнена. Доказано, что лагранжевы решения в задаче трех тел существуют только в случае единого для всех трех тел (однако произвольного) закона взаимодействия, в то время как эйлеровы решения могут существовать и в случае трех различных законов взаимодействия.

Далее Г.Н. Дубошин рассмотрел наиболее общий случай, при котором действующие между тремя телами силы определяются шестью произвольными функциями и, таким образом, третья аксиома динамики не считалась выполненной. Проанализированы различные варианты действующих сил и случаи, когда системы соответствующих уравнений допускают частные решения.

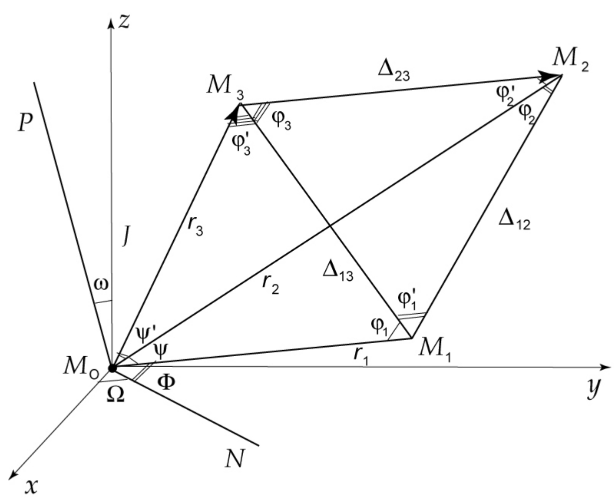
Однако с конца XIX в. начались поиски новых частных решений, подобных упомянутым эйлеровым, лагранжевым и лапласовым решениям в общей задаче трех тел [5–7], а именно в общих задачах 4-х [8], 5-ти [9–11], …, *n* тел [12–14]. Были найдены строгие частные решения центральных конфигураций [15–17]. В перечисленных публикациях использовались уравнения движения в барицентрических или гелиоцентрических относительных вращающихся системах координат, что являлось вполне естественным, и в большинстве из перечисленных публикаций рассматривался лишь закон притяжения Ньютона.

1. Уравнения движения в общей задаче четырех тел в форме Рауса — Ляпунова

Воспользуемся подходом и уравнениями Рауса — Ляпунова, использованными ими в общей задаче трех тел [2; 3]. Уравнения и переменные Ляпунова были введены последним в его работе по исследованию устойчивости лапласовых решений в общей задаче трех тел (по его собственному утверждению они подобны уравнениям и переменным Рауса) и оказались достаточно удобными так, что они используются многими исследователями по сей день.

Рисунка в работах Рауса Е.Дж. и А.М. Ляпунова не было, равно как и в последовавших затем исследованиях Г.Н. Дубошина в задаче трех тел [4]. Это, по-видимому, объясняется простотой соответствующей геометрии — треугольник вращается относительно одной из его вершин (три расстояния и три угла). Рисунок появился позже в работе Г.Н. Дубошина по обобщенной задаче трех тел.

Мы обобщили упомянутый рисунок на случай общей задачи четырех тел для доказательства тем же методом существования уже четырехугольных решений (см. рис.). Необходимость такого рисунка очевидна: для описания геометрии четырехугольника требуется уже 6 расстояний и 8 углов.



Графическая интерпретация задачи 4 тел
Источник: выполнено Ю.В. Перепелкиной
Graphic visualization of the 4-body problem
Source: compiled by Yu.V. Perepelkina

Введем следующие обозначения для внутренних углов четырехугольника $M_0M_1M_2M_3$:

$$\psi = \angle(r_1, r_2), \quad \psi' = \angle(r_2, r_3),$$
$$\varphi_1 = \angle(\Delta_{13}, r_1), \quad \varphi_1' = \angle(\Delta_{12}, \Delta_{13});$$
$$\varphi_2 = \angle(\Delta_{12}, r_2), \quad \varphi_2' = \angle(\Delta_{23}, r_2),$$
$$\varphi_3 = \angle(\Delta_{23}, \Delta_{13}), \quad \varphi_3' = \angle(\Delta_{13}, r_3).$$

Запишем систему дифференциальных уравнений движения общей задачи четырех тел в форме Рауса — Ляпунова.

Вместо часто используемых в небесной механике координат $r_1, r_2, \psi, \Omega, I, \Phi$ (Ω — узел восходящего узла плоскости орбит, I — наклон плоскости орбит и Φ — угол собственного вращения соответственно), определяющих положение плоскости фигуры (треугольника) в неподвижных осях и положение фигуры (треугольника) в ее плоскости, А.М. Ляпунов предложил другую систему переменных, а именно $r_1, r_2, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, в которой $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости вращения триэдра $M_0\xi\eta\varsigma$ и его проекции: ω_1 — на ось $M_0\xi$; ω_2 — на ось $M_0\eta$; ω_3 — на ось $M_0\varsigma$.

Такая замена вполне объяснима, поскольку ключевыми уравнениями в доказательстве существования тех или иных частных решений (стационарных решений или центральных конфигураций в другой терминологии) являются уравнения, содержащие помимо геометрических параметров соответствующих фигур квадраты угловых скоростей вращения радиус-векторов тел.

Выпишем координаты тел M_1, M_2, M_3 в двух системах координат:

$$M_1: \quad \xi_1 = r_1, \quad \eta_1 = 0, \quad \varsigma_1 = 0;$$
$$M_2: \quad \xi_2 = r_2\cos\psi, \quad \eta_2 = r_2\sin\psi, \quad \varsigma_2 = 0;$$
$$M_3: \quad \xi_3 = r_3\cos(\psi+\psi'), \quad \eta_3 = r_3\sin(\psi+\psi'), \quad \varsigma_3 = 0; \tag{1}$$

$$M_1: \quad x_1 = a_{11}r_1, \quad y_1 = a_{21}r_1, \quad z_1 = a_{31}r_1;$$
$$M_2: \quad x_2 = a_{11}r_2\cos\psi + a_{12}r\sin\psi,$$
$$y_2 = a_{21}r_2\cos\psi + a_{22}r_2\sin\psi,$$
$$z_2 = a_{31}r_2\cos\psi + a_{32}r_2\sin\psi;$$
$$M_3: \quad x_3 = a_{11}r_3\cos(\psi+\psi') + a_{12}r_3\sin(\psi+\psi'),$$
$$y_3 = a_{21}r_3\cos(\psi+\psi') + a_{22}r_3\sin(\psi+\psi'),$$
$$z_3 = a_{31}r_3\cos(\psi+\psi') + a_{32}r_3\sin(\psi+\psi'). \tag{2}$$

Уравнения движения четырех тел в гелиоцентрической системе координат (относительно тела M_0 с массой m_0) берутся из работ [18; 19]. Преобразуем их с учетом явных значений координат тел и геометрии (рис. 1). Имеют место следующие соотношения:

$$x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + z_1\ddot{z}_1 + \frac{f(m_0+m_1)}{r_1} =$$
$$= -fm_2 r_1\left[\frac{1}{\Delta_{12}^2}\cos(\varphi_1+\varphi_1') + \frac{1}{r_2^2}\cos\psi\right] -$$
$$-fm_3 r_1\left[\frac{1}{\Delta_{13}^2}\cos\varphi_1 + \frac{1}{r_3^2}\cos(\psi+\psi')\right];$$

$$x_2\ddot{x}_2 + y_2\ddot{y}_2 + z_2\ddot{z}_2 + \frac{f(m_0+m_2)}{r_2} =$$
$$= -fm_1 r_2\left[\frac{1}{\Delta_{12}^2}\cos\varphi_2' + \frac{1}{r_1^2}\cos\psi\right] -$$
$$-fm_3 r_2\left[\frac{1}{\Delta_{13}^2}\cos\varphi_2 + \frac{1}{r_3^2}\cos\psi'\right];$$

$$x_3\ddot{x}_3 + y_3\ddot{y}_3 + z_3\ddot{z}_3 + \frac{f(m_0+m_3)}{r_3} =$$
$$= -fm_1 r_3\left[\frac{1}{\Delta_{13}^2}\cos\varphi_3' + \frac{1}{r_1^2}\cos(\psi+\psi')\right] -$$
$$-fm_2 r_3\left[\frac{1}{\Delta_{23}^2}\cos(\varphi_3+\varphi_3') + \frac{1}{r_2^2}\cos\psi'\right],$$

из которых получим первые три дифференциальных уравнения из девяти, описывающих движение четырех тел:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) = -\frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2} -$$
$$-fm_2\left[\frac{1}{\Delta_{12}^2}\cos(\varphi_1+\varphi_1') + \frac{1}{r_2^2}\cos\psi\right] -$$
$$-fm_3\left[\frac{1}{\Delta_{13}^2}\cos\varphi_1 + \frac{1}{r_3^2}\cos(\psi+\psi')\right];$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} - r_2(\omega_2'^2 + \omega_3'^2) = -\frac{f(m_0+m_2)}{r_2^2} -$$
$$-fm_1\left[\frac{1}{\Delta_{12}^2}\cos\varphi_2' + \frac{1}{r_1^2}\cos\psi\right] -$$
$$-fm_3\left[\frac{1}{\Delta_{23}^2}\cos(\varphi_1+\psi) + \frac{1}{r_3^2}\cos\psi'\right];$$

$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} - r_3\left(\omega_2''^2 + \omega_3''^2\right) = -\frac{f(m_0+m_3)}{r_3^2} -$$
$$-fm_1\left[\frac{1}{\Delta_{13}^2}\cos\varphi_3' + \frac{1}{r_1^2}\cos\left(\psi+\psi'\right)\right] - \quad (3)$$
$$-fm_2\left[\frac{1}{\Delta_{23}^2}\cos\left(\varphi_3+\varphi_3'\right) + \frac{1}{r_2^2}\cos\psi'\right],$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость вращения неизменяемой системы, определяемой, прежде всего, точкой M_0, направлением $\overrightarrow{M_0M_1}$, плоскостью четырехугольника $(M_0M_1M_2M_3)$ и проекцией, соответственно на направление $\overrightarrow{M_0M_1}$, на направление перпендикуляра к $\overrightarrow{M_0M_1}$ в плоскости $(M_0M_1M_2M_3)$, составляющее острый угол с направлением $\overrightarrow{M_0M_2}$, и на направление перпендикуляра к плоскости четырехугольника.

Для двух других угловых скоростей, а именно $\vec{\omega}' = (\omega_1', \omega_2', \omega_3')$ и $\vec{\omega}'' = (\omega_1'', \omega_2'', \omega_3'')$, имеют место аналогичные геометрические описания для направлений $\overrightarrow{M_0M_2}$, $\overrightarrow{M_0M_3}$ соответственно, которые мы не приводим. Отметим лишь, что ось $\overrightarrow{M_0M_2}$ второй системы координат повернута в направлении против часовой стрелки на угол ψ относительно оси $\overrightarrow{M_0M_1}$ первой системы координат, а ось $\overrightarrow{M_0M_3}$ третьей — на угол ψ' относительно оси $\overrightarrow{M_0M_2}$ второй системы координат. Связь между компонентами трех угловых скоростей $\vec{\omega}, \vec{\omega}', \vec{\omega}''$ задается следующими известными формулами:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = \sin\Phi \sin J \cdot \dot{\Omega} + \cos\Phi \cdot \dot{J}\,;\\
&\omega_1' = \omega_1 \cos\psi + \omega_2 \sin\psi;\\
&\omega_1'' = \omega_1' \cos\psi' + \omega_2' \sin\psi';\\
&\omega_2 = \cos\Phi \sin J \cdot \dot{\Omega} - \sin\Phi \cdot \dot{J};\\
&\omega_2' = -\omega_1 \sin\psi + \omega_2 \cos\psi;\\
&\omega_2'' = -\omega_1' \sin\psi' + \omega_2' \cos\psi';\\
&\omega_3 = \cos J \cdot \dot{\Omega} + \dot{\Phi};\\
&\omega_3' = \omega_3 + \dot{\psi};\\
&\omega_3'' = \omega_3' + \dot{\psi}'.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Далее получаем еще шесть дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r_1}\frac{d(\omega_3 r_1^2)}{dt} + r_1\omega_1\omega_2 = -\\
&\quad -fm_2\left[\frac{1}{r_2^2}\sin\psi - \frac{1}{\Delta_{12}^2}\sin(\varphi_1 + \varphi_1')\right] -\\
&\quad -fm_3\left[\frac{1}{r_3^2}\sin(\psi + \psi') - \frac{1}{\Delta_{13}^2}\sin\varphi_1\right];\\
&\quad \frac{1}{r_1}\frac{d(\omega_2 r_1^2)}{dt} - r_1\omega_1\omega_3 = 0;\\
&\frac{1}{r_2}\frac{d\left(\omega_3' r_2^2\right)}{dt} + r_2\omega_1'\omega_2' =\\
&\quad -fm_1\left[\frac{1}{r_1^2}\sin\psi - \frac{1}{\Delta_{12}^2}\sin\left(\varphi_2 + \varphi'\right)\right] -\\
&\quad -fm_3\left[\frac{1}{r_3^2}\sin\psi' - \frac{1}{\Delta_{23}^2}\sin\varphi_1\right];\\
&\quad \frac{1}{r_2}\frac{d\left(\omega_2' r_2^2\right)}{dt} - r_2\omega_1'\omega_3' = 0;\\
&\frac{1}{r_3}\frac{d\left(\omega_3'' r_3^2\right)}{dt} + r_3\omega_1''\omega_2'' =\\
&\quad -fm_1\left[\frac{1}{r_1^2}\sin\left(\psi + \psi'\right) - \frac{1}{\Delta_{13}^2}\sin\varphi_3'\right] -\\
&\quad -fm_2\left[\frac{1}{r_2^2}\sin\psi' - \frac{1}{\Delta_{23}^2}\sin\left(\varphi_3 + \varphi_3'\right)\right];\\
&\quad \frac{1}{r_3}\frac{d(\omega_2'' r_3^2)}{dt} - r_3\omega_1''\omega_3'' = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Объединение уравнений (3) и (5) дает систему из девяти обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение в рамках общей задачи четырех тел, взаимодействующих, вообще говоря, по закону обратных квадратов. Для обобщения уравнений движения на случай взаимодействия тел по произвольному закону, зависящему лишь от расстояний между телами, необходимо разбить компоненты сил в правых частях уравнений на две подкомпоненты каждую. Например, если

$$fm_2\frac{1}{r_2^2} \to fm_2(F_{12}(r_2) \pm F_{21}(r_2)),$$

тогда

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1(\omega_2^2 + \omega_3^2) + m_0\left[F_{10}(r_1) + F_{20}(r_2)\cos\psi + F_{30}(r_3)\cos(\psi + \psi')\right] +\\
&+ m_1\left[F_{01}(r_1) - F_{21}(\Delta_{21})\cos(\varphi_1 + \varphi_1') - F_{31}(\Delta_{31})\cos\varphi_1\right] +\\
&+ m_2\left[F_{02}(r_2) cos\psi - F_{12}(\Delta_{12})\cos(\varphi_1 + \varphi_1') + F_{32}(\Delta_{23})\cos(\varphi_2 - \psi)\right] +\\
&+ m_3\left[F_{03}(r_3)\cos(\psi + \psi') - F_{13}(\Delta_{13})\cos\varphi_1 - F_{23}(\Delta_{23})\cos(\varphi_2 - \psi)\right] = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r_1}\frac{d}{dt}\left(r_1^2\omega_3\right) + r_1\omega_1\omega_2 + m_2 F_{02}(r_2)\sin\psi -\\
&\quad -F_{12}(\Delta_{12})\sin(\varphi_1 + \varphi_1') + m_3 F_{13}(\Delta_{13})\sin\varphi_1 = 0,
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{d}{dt}\left(r_1^2\omega_2\right) - r_1\omega_1\omega_3 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 r_2}{dt^2} - r_2(\omega_2'^2 + \omega_3'^2) + m_0\left[F_{20}(r_2) + F_{01}(r_1)\cos\psi + F_{30}(r_3)\cos\psi'\right] +\\
&+ m_1\left[F_{01}(r_1)\cos\psi + F_{21}(\Delta_{12})\cos(\varphi_2' + \psi) - F_{31}(\Delta_{31})\cos(\varphi_1 + \psi)\right] +\\
&+ m_2\left[F_{02}(r_2) + F_{12}(\Delta_{12})\cos(\varphi_2' + \psi) - F_{32}(\Delta_{23})\cos\varphi_2\right] +\\
&+ m_3\left[F_{03}(r_3)\cos\psi' - F_{13}\left(\Delta_{13}\right)\cos\left(\varphi_1 + \psi\right) - F_{23}(\Delta_{23})\cos\varphi_2\right] = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r_2}\frac{d(\omega_3' r_2^2)}{dt} + r_2\omega_1'\omega_2' - fm_1\frac{1}{r_1^2}\sin\psi +\\
&\qquad + fm_1\frac{1}{\Delta_{12}^2}\sin(\varphi_2 + \varphi_2') -\\
&\qquad - fm_3\frac{1}{r_3^2}\sin\psi' + fm_3\frac{1}{\Delta_{13}^2}\sin\varphi_1 = 0,
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{d(\omega_2' r_2^2)}{dt} - r_2\omega_1'\omega_3' = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 r_3}{dt^2} - r_3(\omega_2''^2 + \omega_3''^2) + m_0\left[F_{30}(r_3) + m_1 F_{01}(r_1)\cos(\psi + \psi') + F_{20}(r_2)\cos\psi\right] +\\
&+ m_1\left[F_{01}(r_1)\cos(\psi + \psi') - F_{21}(\Delta_{12})\cos(\varphi_2 + \psi') - F_{31}(\Delta_{13})\cos\varphi_3'\right] +\\
&+ m_2\left[F_{02}(r_2)\cos\psi_2' + F_{12}(\Delta_{12})\cos(\varphi_2' + \psi') - F_{32}(\Delta_{23})\cos(\varphi_3 + \varphi_3')\right] +\\
&+ m_3\left[F_{03}(r_3) + F_{13}(\Delta_{13})\cos\varphi_3' + F_{23}(\Delta_{23})\cos(\varphi_3 + \varphi_3')\right] = 0,
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{r_3}\frac{d}{dt}\left(r_3^2\omega_2''\right)-r_3\omega_1''\omega_3''=0,$$

$$\frac{1}{r_3}\frac{d(\omega_3''r_3^2)}{dt}+r_3\omega_1''\omega_2''-fm_1\frac{1}{r_1^2}\sin(\psi+\psi')+$$

$$+fm_1\frac{1}{\Delta_{13}^2}\sin\varphi_1-fm_2\frac{1}{r_2^2}\sin(\varphi_2-\psi)-$$

$$-fm_2\frac{1}{\Delta_{23}^2}\sin\varphi_2=0. \qquad (6)$$

В случае $\omega_1=\omega_2=0$, $\omega_3=\omega+\dot\psi$ (из соотношений (5) следует

$$\omega_1'=\omega_2'=\omega_1''=\omega_2''=0,$$

$$\omega_3'=\omega_3''=\omega+\dot\psi$$

и вращение осуществляется лишь в плоскости фигуры) система уравнений (6) упростится:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}-r_1\omega^2+m_0\left[F_{10}(r_1)+F_{20}(r_2)\cos\psi+F_{30}(r_3)\cos(\psi+\psi')\right]+$$
$$+m_1\left[F_{01}(r_1)-F_{21}(\Delta_{21})\cos(\varphi_1+\varphi_1')-F_{31}(\Delta_{31})\cos\varphi_1\right]+$$
$$+m_2\left[F_{02}(r_2)\cos\psi-F_{12}(\Delta_{12})\cos(\varphi_1+\varphi_1')+F_{32}(\Delta_{23})\cos(\varphi_2-\psi)\right]+$$
$$+m_3\left[F_{03}(r_3)\cos(\psi+\psi')-F_{13}(\Delta_{13})\cos\varphi_1-F_{23}(\Delta_{23})\cos(\varphi_2'-\psi)\right]=0,$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{d}{dt}\left(r_1^2\omega\right)+m_2F_{02}(r_2)\sin\psi-$$
$$-F_{12}(\Delta_{12})\sin(\varphi_1+\varphi_1')+m_3F_{13}(\Delta_{13})\sin\varphi_1=0,$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2}-r_2\omega^2+m_0\left[F_{20}(r_2)+F_{01}(r_1)\cos\psi+F_{30}(r_3)\cos\psi'\right]+$$
$$+m_1\left[F_{01}(r_1)\cos\psi+F_{21}(\Delta_{12})\cos(\varphi_2'+\psi)-F_{31}(\Delta_{31})\cos(\varphi_1+\psi)\right]+$$
$$+m_2\left[F_{02}(r_2)+F_{12}(\Delta_{12})\cos(\varphi_2'+\psi)-F_{32}(\Delta_{23})\cos\varphi_2\right]+$$
$$+m_3\left[F_{03}(r_3)\cos\psi'-F_{13}(\Delta_{13})\cos(\varphi_1+\psi)-F_{23}(\Delta_{23})\cos\varphi_2\right]=0,$$

$$\frac{1}{r_2}\frac{d}{dt}\left(r_2^2\omega\right)-m_1F_{01}(r_1)\sin\psi-$$
$$-m_1F_{12}(\Delta_{12})\sin(\varphi_1+\varphi_1')+$$
$$+m_3F_{32}(\Delta_{32})\sin\varphi_1-m_3F_{03}(r_3)\sin\psi'=0. \qquad (7)$$

На основании аналитических расчетов можно предполагать, что если произвольность закона взаимодействия несколько ограничить, например, вместо произвольной функции расстояний $F(r)$ взять функцию $F(r)\sim 1/r^k$, $k \geq 2$, то можно численными методами доказать существование точных частных решений при различных фиксированных значениях $k \geq 2$ и фиксированных неравных значениях масс четырех тел.

Заключение

Сформулирована общая задача четырех тел в переменных Рауса — Ляпунова. Выведены одноименные уравнения движения в предположении взаимодействия тел по совершенно произвольному зависящему, кроме масс тел, лишь от расстояний между телами закону. Получен общий вид уравнений движения четырех тел, расположенных в вершинах выпуклого четырехугольника, и их частный вид, выведенный для случая квадратной конфигурации.

References / Список литературы

1. Liouville J. Sur un cas particulier du problème de trois corps (Extrait). *Comptes Rendus Acad. Sci*. 1842; 14(14):503–506. Available from: http://www.numdam.org/item/JMPA_1842_1_7__110_0/ (accessed: 18.01.2024).

2. Routh EJ. On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion. *Proc. Lond. Math. Soc*. 1875;6:86–97. Available from: https://archive.org/details/stabilityofmotio0000rout (accessed: 18.01.2024).

3. Lyapunov AM. *The general problem of the stability of motion, translated by A.T. Fuller*. London: Taylor & Francis Publ.; 1992. Available from: https://archive.org/details/stabilityofmotio0030amli/page/n7/mode/2up (accessed: 18.01.2024).

4. Doubochine GN. Sur les solutions Lagrangiennes et Euleriennes du problème généralisé de trois corps en axes absolus. *Celestial Mechanics.* 1979;19:243–262. https://doi.org/10.1007/BF01230217

5. Butikov E. *Motions of Celestial Bodies: Computer simulations.* Bristol, UK, IOP Publ.; 2014.

6. Llibre J, Moeckel R, Sim C. Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems. *Advanced Courses in Mathematics*. CRM Barcelona. Birkhäuser, Basel; 2015. p. 105–167. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0933-7_2

7. Moeckel R. Central configurations. *Scholarpedia*. 2014;9(4):10667. https://doi.org/10.4249/scholarpedia.10667

8. Shoaib M, Kashif AR, Szücs-Csillik I. On the planar central configurations of rhomboidal and triangular

four- and five-body problems. *Astrophysics and Space Science.* 2017;362:182. https://doi.org/10.1007/s10509-017-3161-5

9. Marchesin M, Vidal C. Spatial restricted rhomboidal five-body problem and horizontal stability of its periodic solutions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2013;115(3):261–279. https://doi.org/10.1007/s10569-012-9462-7

10. Kashif A, Shoaib M, Sivasankaran A. Central configurations of an isosceles trapezoidal five-body problem. In: Corbera M., Cors J., Llibre J., Korobeinikov A. (eds.). Extended Abstracts Spring 2014. *Trends in Mathematics, Birkhäuser, Cham*. 2015;4:71–76. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22129-8_13

11. Fernandes AC, Mello LF. On Stacked Planar Central Configurations with Five Bodies when One Body is Removed. *Qualitative Theory of Dynamical Systems.* 2013;12:293–303. https://doi.org/10.1007/s12346-012-0084-y

12. Beltritti G, Mazzone F. Oviedo M. The Sitnikov problem for several primary bodies configurations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2018; 30:45. https://doi.org/10.1007/s10569-018-9838-4

13. Hampton M. Planar *N*-body central configurations with a homogeneous potential. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2019;131:20. https://doi.org/10.1007/s10569-019-9898-0

14. Moczurad M, Zgliczyński P. Central configurations in planar *n*-body problem with equal masses for *n* = 5, 6, 7. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2019;131:46. https://doi.org/10.1007/s10569-019-9920-6

15. Montaldi J. Existence of symmetric central configurations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2015;122:405–418. https://doi.org/10.1007/s10569-015-9625-4

16. Doicu A, Zhao L, Doicu A. A stochastic optimization algorithm for analyzing planar central and balanced configurations in the *n*-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2022;134:29. https://doi.org/10.1007/s10569-022-10075-7

17. Marchesin M. A family of three nested regular polygon central configurations. *Astrophysics and Space Science.* 2019;364:160. https://doi.org/10.1007/s10509-019-3648-3

18. Perepelkina YuV. An unified approach to the linear stability investigation of some classic and generalized planar central configurations of celestial mechanics. Part 2: Numeric investigations. *International Journal on Pure and Applied Mathematics, Classical and Celestial Mechanics, Cosmodynamics.* 2013;2(3):5–34. (In Russ.) EDN: WJGIQD

Перепелкина Ю.В. Унифицированный подход к исследованию линейной устойчивости некоторых классических и обобщенных плоских центральных конфигураций // Международный журнал по теоретической и прикладной математике, классической и небесной механике и космодинамике. 2013. Вып. 2 (3). С. 5–34. EDN: WJGIQD

19. Perepelkina YV, Zadiranov AN. The hierarchical approach to proving the existence of generalized planar nested central configurations on some versions of the general (pn+1)-body problem. *RUDN Journal of Engineering Research.* 2023;24(1):40–49. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-1-40-49

Перепелкина Ю.В., Задиранов А.Н. Иерархический подход к доказательству существования обобщенных плоских гнездовидных центральных конфигураций в некоторых вариантах общей задачи (pn+1)-тел // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2023. Т. 24. № 1. С. 40–49. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-1-40-49

Сведения об авторе

Перепелкина Юлианна Вячеславовна, кандидат физико-математических наук, заведующая ОНИ по механике, Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 5157-4093; ORCID: 0000-0001-8115-8253; e-mail: amadeycity@yandex.com

Bio note

Yulianna V. Perepelkina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Scientific Information Department of Mechanics, Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 5157-4093; ORCID: 0000-0001-8115-8253; e-mail: amadeycity@yandex.com