Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования
RUDN Journal of Engineering Research

2024;25(1):21–29

ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)
journals.rudn.ru/engineering-researches

DOI: 10.22363/2312-8143-2024-25-1-21-29
УДК 629.78
EDN: FFMTDE

Научная статья / Research article

Математическое моделирование оптимального планирования экономики с учетом налогов с помощью прикладного вычислительного пакета Maple

Ю.В. Перепелкина[a]✉, **О.Н. Литвин**[b], **А.Н. Задиранов**[c]

[a] Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», *Москва, Россия*
[b] Московский государственный гуманитарно-экономический университет, *Москва, Россия*
[c] Академия государственной противопожарной службы МЧС России, *Москва, Россия*
✉ amadeycity@yandex.com

История статьи

Поступила в редакцию: 14 июля 2023 г.
Доработана: 4 декабря 2023 г.
Принята к публикации: 14 декабря 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Рассмотрен частный вопрос оптимального планирования экономики на базе моделей межотраслевого баланса, в которые дополнительно введены налоги как один из управляющих факторов. Проведен анализ работ, описывающих применение методов оптимального управления в экономике для моделей различных типов, а также обзор прикладного программного обеспечения для разработки экономико-математических моделей и выполнения расчетов. Подробно рассмотрен математический аппарат, применяемый при решении задачи, описаны постановка задачи моделирования и правила расчета математической модели с помощью прикладного пакета численного и символьного моделирования Maple. Приведена математическая модель оптимального планирования макроэкономической системы как оптимальной задачи на быстродействие, выделен математический аппарат признаков оптимальности. Установлена зависимость результатов планирования от влияния фактора налогообложения. Исследована степень оптимизации экономики при самом быстром ее переходе из одного состояния и ее зависимость от определенных сочетаний в комбинации управляющих функций, таких как полные затраты, фондоемкость, функции потребления, величины собираемых налогов и производственных мощностей и пр.

Ключевые слова: оптимизация экономики, налоги, межотраслевой баланс, математическое моделирование, вычислительный пакет Maple

Для цитирования

Перепелкина Ю.В., Литвин О.Н., Задиранов А.Н. Математическое моделирование оптимального планирования экономики с учетом налогов с помощью прикладного вычислительного пакета Maple // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2024. Т. 25. № 1. С. 21–29. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-1-21-29

Mathematical Modeling of Optimal Economic Planning Including the Account Tax by the Use of Maple Computational Package

Yulianna V. Perepelkina[a] ✉, **Oleg N. Litvin**[b], **Alexander N. Zadiranov**[c]

[a] Moscow State University of Technology "STANKIN", *Moscow, Russia*
[b] Moscow State University of Humanities and Economics, *Moscow, Russia*
[c] State Fire Academy of EMERCOM of Russia, *Moscow, Russia*
✉ amadeycity@yandex.com

Article history
Received: July 14, 2023
Revised: December 4, 2023
Accepted: December 14, 2023

Conflicts of interest
The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution
Undivided co-authorship.

Abstract. We consider a particular issue of optimal economic planning based on models of intersectoral balance which taxes are additionally introduced as one of the controlling factors. The analysis of describing applications of optimal control methods in economics for various models, as well as an overview of applied software for the development of economic and mathematical models and calculations. The mathematical apparatus used in solving the problem is considered in detail, the formulation of the modeling problem and the rules for calculating the mathematical model using the applied package of numerical and symbolic modeling Maple are described. The mathematical model of the macroeconomic system optimal planning as an optimal task for speed is given, the mathematical apparatus of the optimality conditions is highlighted, the dependence of the planning results on the influence of the taxation factor is established. The degree of economy optimization at its fastest transition from one state and its dependence on certain combinations in the combination of control functions, such as total costs, capital intensity, consumption functions, the amount of taxes collected and production capacity, etc., are investigated.

Keywords: optimization of the economy, taxes, intersectoral balance, mathematical modeling, Maple computational package

For citation
Perepelkina YuV, Litvin ON, Zadiranov AN. Mathematical modeling of optimal economic planning including the account tax by the use of Maple computational package. *RUDN Journal of Engineering Research.* 2024;25(1):21–29. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-1-21-29

Введение

Проблема оптимального планирования экономики всегда являлась актуальной задачей любого государства и правительства. Естественно, что в нашей стране в советское время, этому вопросу уделялось достаточно большое внимание. В 1950–1960-е гг. началось интенсивное изучение различных постановок оптимальных задач во многих областях науки, техники и в экономике. Основой послужили разработанная к этому времени теория оптимального управления и возможности реализовать на практике расчеты на быстродействующих ЭВМ. Большой вклад в это направление науки внес академик А.В. Канторович и большая группа его сотрудников и последователей. Значительное число публикаций на эту тему появилось в выпусках Сибирского отделении АН СССР.

В ряде работ группы авторов[1] [1; 2] был дан краткий обзор постановок задач планирования экономики, получивших распространение в научной литературе в период 1960–1970-е гг. Среди них была рассмотрена задача оптимального планирования экономики в общей постановке. Позже появились серьезные теоретические работы по

[1] См.: *Буркова И.В., Гельруд Я.Д., Логиновский О.В., Шестаков А.Л.* Математические методы и модели управления проектами: уч. пособие. Челябинск: Издательский центр ЮурГУ, 2018. 193 с.; *Кудрявцев Е.М., Симакова Н.Е.* Экономика производства: учебник: учебное электронное издание. Министерство образования и науки Российской Федерации. М.: НИУ МГСУ, 2016; *Нуреев Р.М.* Экономика развития: модели становления рыночной экономики: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Юр. Норма, НИЦ ИНФРА-М, 2020. 640 с.

обоснованию применения методов оптимального управления в экономике и, в частности, с применением динамической модели межотраслевого баланса [3]. При этом в качестве управляющего фактора использовались производственные мощности, и оценивалось его влияние на конечное потребление.

Однако оптимальное планирование экономики не может быть качественным без учета столь важных для функционирования любого государства налоговых сборов. Кроме того, поскольку фискальная и стимулирующие функции любой налоговой системы характеризуются противоположной направленностью, то поиск рациональных соотношений между ними и другими управляющими факторами при оптимальном планировании экономики является достаточно актуальной задачей.

В настоящее время для решения экономических задач широко применяется различный математический аппарат [4; 5] и прикладное программное обеспечение[2] [6–8], в частности электронные таблицы, что позволяет представлять данные электронной форме и обрабатывать их без проведения ручных расчетов.

Использование математического и программного обеспечения для решения экономических задач существенно упрощает процесс вычисления; формализует и формирует набор операторов для решения однотипных задач; дает возможность решать задачи с параметрами и проводить анализ результатов вычислений и выполнять подбор данных.

Наиболее распространенным средством работы с табличными данными является программа Microsoft Excel и системы символьной компьютерной математики, такие как MathCad, Maple. Но, несмотря на возможности, предоставляемые пакетами прикладных программ, не овладев предметной областью математической экономики и фундаментальными математическими понятиями, решить экономические задачи в математической постановке невозможно.

Целью данной работы является построение оптимальной модели макроэкономической системы на основе учета управляющих и управляемых факторов, включая функции налоговой системы [1].

В связи с этим в данной работе рассматривается оптимальное планирование экономики на базе динамической модели межотраслевого баланса, описанной в работе[3], в которую дополнительно введены налоги как один из управляющих факторов.

В качестве средства решения задачи оптимального экономического планирования в данной работе применена система компьютерной математики Maple.

1. Постановка вариационной задачи

Задача оптимального планирования экономики рассматривается как вариационная задача на быстродействие (задача наискорейшего перехода от исходного фиксированного уровня конечного потребления к другому заданному уровню)[4] [9].

При построении модели оптимального планирования экономики приняты следующие предположения и ограничения:

1. Экономика состоит из n различных «чистых» отраслей, т.е. каждая отрасль производит лишь один продукт, а каждая отрасль производит только «свой» продукт; дублирование производства одного и того же продукта несколькими отраслями отсутствует.

2. Производственный процесс рассматривается как непрерывный во времени.

3. Мощность каждой отрасли — неубывающая функция времени, т.е. отсутствуют реконструкция и конверсия, а также капитальный ремонт и выбытие мощностей.

4. Не учитываются затраты на научно-технический прогресс и изменение коэффициентов прямых затрат, т.е. элементы технологической матрицы являются постоянными величинами.

5. Отсутствуют ограничения на потребляемые ресурсы как трудовые, так и природные.

---

[2] *Игнатьев Ю.Г.* Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. 298 с.

[3] *Нуреев Р.М.* Экономика развития: модели становления рыночной экономики: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Юр. Норма, НИЦ ИНФРА-М, 2020. 640 с.

[4] См.: *Кудрявцев Е.М., Симакова Н.Е.* Экономика производства: учебник. М.: Московский государственный строительный университет. Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2017; *Новиков А.И.* Экономико-математические методы и модели: учебник для бакалавров. 3-е изд. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2020.

6. Отсутствуют экспорт и импорт конечного продукта

7. Желаемые уровни конечного потребления не зависят от времени, а являются постоянными величинами.

Ограничения 5–7 непринципиальны и приняты в целях упрощения задачи.

2. Динамическая модель межотраслевого баланса

Будем описывать эволюцию экономики посредством динамической модели межотраслевого баланса [15] в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\vec{v}(t) = A\vec{v}(t) + B\dot{\vec{V}}(t) + \vec{P}(t) + \vec{N}(t)\,, \quad (1)$$

где $\vec{v}(t) = (v^1(t),...,v^n(t))$ — вектор-столбец выпускаемых отраслями продуктов, t — время, $v^i(t)$ — количество i-го продукта, выпускаемого в единицу времени; $\vec{V}(t) = (V^1(t),...,V^n(t))$ — вектор-столбец отраслевых мощностей, $V^i(t)$ — максимальное количество i-го продукта, выпускаемого в единицу времени $V^i(t) \geq 0$; $\vec{P}(t) = (P^1(t),...,P^n(t))$ — вектор-столбец конечного потребления, $P^i(t)$ — количество i-го продукта, идущего на конечное потребление; $\vec{N}(t) = (N^1(t),...,N^n(t))$ — вектор-столбец налоговых отчислений, $N^i(t)$ — количество налоговых отчислений по i-му продукту (отрасли), $A = \left\|a^i_j\right\|_{i=1,...,n;\, j=1,...,n}$ — матрица прямых затрат (технологическая матрица), a^i_j — количество продукта j, необходимого для производства продукта i (коэффициенты прямых затрат); $B = \left\|b^i_j\right\|_{i=1,...,n;\, j=1,...,n}$ — матрица удельных фондоемкостей, b^i_j — количество фондообразующего продукта j, требующегося для единичного прироста продукта i (коэффициенты фондоемкости); $\dot{\vec{V}} = d\vec{V}/dt$ — прирост (скорость изменения) производственных мощностей, причем $\dot{V}^i \geq 0$.

Кроме того, имеет место ограничение по мощности:

$$0 \leq \vec{v}(t) \leq \vec{V}(t)\,, \quad (2)$$

которое имеет простой смысл: выпуск не может превосходить производственных мощностей.

Балансовое соотношение (1) определяет распределение упомянутых выпусков: произведенный продукт $\vec{v}(t)$ используется, во-первых, как сырье $A\vec{v}(t)$, во-вторых, как фондообразующий продукт $B\dot{\vec{V}}(t)$, в-третьих, как продукт конечного потребления $\vec{P}(t)$, и, наконец, в-четвертых, как налоговые отчисления $\vec{N}(t)$. Именно последнее слагаемое и отличает эту постановку данной задачи от изложенной Ю.Г. Игнатьевым[2].

3. Формулировка вариационной задачи

Сформулируем задачу наискорейшего перехода экономики, описываемой динамической моделью межотраслевого баланса (1), (2) между двумя фиксированными уровнями конечного потребления. С учетом предположений и упрощений задача на максимальное быстродействие будет иметь вид

$$\left.\begin{array}{l} T \;\;\Rightarrow\;\; \min\,, \\ \vec{v}(t) = A\vec{v}(t) + B\dot{\vec{V}}(t) + \vec{P}(t) + \vec{N}(t), \qquad 0 \leq \vec{v}(t) \leq \vec{V}(t), \\ \vec{P}(t) \geq \vec{P}_0(t)\,, \quad t \in [0,T]\,, \quad \vec{P}(t) \geq \vec{P}_1\,, \quad t \in [T,\infty)\,, \\ \vec{N}(t) \geq \vec{N}_0(t), \quad t \in [0,T]\,, \quad \vec{V}(0) = \vec{V}_0\,, \dot{\vec{V}}(t) \geq 0\,, \end{array}\right\} \quad (3)$$

при этом должны соблюдаться дополнительные условия

$$\begin{array}{l} \vec{P}_0(t) \leq P_1(t) = \mathrm{const}, \\ (E - A)\vec{V}_0 = \mathrm{const} \geq \vec{P}_0(0) + \vec{N}_0(0), \end{array} \quad (4)$$

где E — единичная $n \times n$ матрица.

В компактной записи задачи (3) первая строка определяет целевой функционал задачи — время перехода экономики из одного состояния в другое, а вторая строка повторяет основное балансовое соотношение (1) и ограничение по мощности (2). Третья строка отражает требование того, что в процессе перехода экономики из одного состояния в другое конечное потребление $\vec{P}_0(t)$ не должно опускаться ниже некоторого фиксированного уровня $\vec{P}_0(t)$. В то же время после достижения заданного желаемого уровня потребления $\vec{P}_1(t)$ конечное потребление должно оставаться не ниже этого уровня во все последующие моменты времени. Четвертая строка в первой части отражает тот факт, что налоговые поступления $\vec{N}(t)$ должны иметь место и быть не ниже установленного уровня $\vec{N}_0(t)$ по видам продукции. Равенство и неравенство относительно производственных мощностей $\vec{V}(t)$ отражает тот факт, что в начальный момент времени имеются производственные мощности $\vec{V}_0$ и что вектор-функция $\vec{V}(t)$ является неубывающей. Также по всем вектор-функциям, встречающимся в системе (3), следует заметить, что отдельные их компоненты могут быть нулевыми.

Система неравенств (4) содержит необходимые для существования оптимального решения неравенства, которым должны удовлетворять заданный уровень потребления, начальный вектор производственных мощностей, а также налоговые поступления. Именно эти три вектор-функции и будут являться управляющими функциями в сформулированной задаче оптимального планирования экономики с учетом налогов.

4. Сведение вариационной задачи к краевой

Для облегчения теоретического рассмотрения задачи оптимального управления экономики преобразуем оптимальную задачу на быстродействие (3), записанную относительно векторов потребления $\vec{P}(t)$ и налогов $\vec{N}(t)$, к краевой задачи относительно вектора производственных мощностей $\vec{V}(t)$.

После очевидных преобразований получаем

$$\vec{v}(t) = (E - A)^{-1}[B\dot{\vec{V}}(t) + \vec{P}(t) + \vec{N}(t)], \quad (5)$$

где матрица $(E-A)^{-1}$, называемая также матрицей коэффициентов полных затрат, существует и преобразует любой неотрицательный вектор в неотрицательный же вектор, что следует из свойства продуктивности матрицы коэффициентов прямых затрат A (см., например, [3]).

Принимая во внимание неравенство (2), перепишем равенство (5) в виде следующего неравенства:

$$\vec{V}(t) \geq (E - A)^{-1}[B\dot{\vec{V}}(t) + \vec{P}(t) + \vec{N}(t)], \quad (6)$$

тогда условие на отрезке $\vec{P}(t) \geq \vec{P}_1 = const$, $\forall t \in [T, \infty)$, может быть заменено условием в точке $t = T$, а именно:

$$\vec{V}(T) \geq (E - A)^{-1}\vec{P}_1. \quad (7)$$

Обозначим теперь величину неиспользованной мощности посредством

$$\Delta\vec{V}(t): \quad \Delta\vec{V}(t) = \vec{V}(t) - \vec{v}(t);$$

превышение конечного потребления минимального уровня посредством

$$\Delta\vec{P}(t): \ \Delta\vec{P}(t) = \vec{P}(t) - \vec{P}_0(t);$$

превышение мощности в момент T требуемого значения (5) посредством $\Delta\vec{V}_1$ и, наконец, величину собираемых налогов посредством $\vec{N}(t) = \vec{N}_0(t)$ (ожидать превышения собираемых налогов выше установленного уровня нереально). На этапе постановки задачи структура налогов $\vec{N}(t)$ не детализируется.

Таким образом, оптимальная задача на быстродействие (3) может быть теперь сформулирована в виде краевой задачи относительно вектора мощностей $\vec{V}(t)$:

$$\left.\begin{array}{l}
T \Rightarrow \min, \\
\vec{V}(t) = (E - A)^{-1} B\dot{\vec{V}}(t) + (E - A)^{-1}[\Delta\vec{P}(t) + \vec{N}(t)] + \\
+\Delta\vec{V}(t) + (E - A)^{-1}\vec{P}_0(t), \\
\vec{V}(0) = \vec{V}_0, \qquad \vec{V}(T) = (E - A)^{-1}\vec{P}_1 + \Delta\vec{V}_1, \\
\dot{\vec{V}}(t) \geq 0, \quad \Delta\vec{P}(t) \geq 0, \quad \vec{N}(t) \geq 0, \quad \Delta\vec{V}(t) \geq 0, \quad \Delta\vec{V}_1 \geq 0.
\end{array}\right\} \quad (8)$$

В краевой задаче (8) следует выбрать свободные (управляющие) функции $\Delta\vec{P}(t), \Delta\vec{V}(t)$ $\vec{N}(t)$ и параметры $\Delta\vec{V}_1$ таким образом, чтобы выполнялись краевые условия для вектор-функции $\vec{V}(t)$, условие неотрицательности скорости $\dot{\vec{V}}(t)$ и при этом время перехода T было минимальным.

Замечание. В данной задаче оптимизации свободные функции, $\Delta\vec{P}(t)$, $\vec{N}(t)$, $\Delta\vec{V}(t)$, входящие в совокупность уравнений и неравенств (8), следует считать некоторой комбинацией (управляющих) функций, например:

$$\vec{w}(t) = (E - A)^{-1}[\Delta\vec{P}(t) + \vec{N}(t)] + \Delta\vec{V}(t), \qquad (9)$$

в которой каждое составляющее может изменяться вообще говоря произвольным образом, но тем не менее в соответствии с ограничениями (8) и (9). Поэтому если в результате расчетов искомая функция мощностей $\vec{V}(t)$ будет каким-то образом найдена, то, соответственно, и функции $\Delta\vec{P}(t)$, $\vec{N}(t)$, $\Delta\vec{V}(t)$ будут определены из комбинации (9).

Следовательно, в краевой задаче (8) выбору подлежит вектор-функция $\vec{w}(t)$, определяемая выражением (9). Ввиду справедливости следующих неравенств: $\Delta\vec{P}(t) \geq 0$, $\vec{N}(t) \geq 0$, $\Delta\vec{V}(t) \geq 0$, — из известных свойств матрицы фондоемкости $(E - A)^{-1}$ следует $\vec{w}(t) \geq 0$. После определения оптимального значения $\vec{w}(t)$ функция $\Delta\vec{V}(t)$ найдется, если заданы $\Delta\vec{P}(t)$ и $\vec{N}(t)$, или, наоборот, функция $\Delta\vec{P}(t)$ будет найдена, если заданы функции $\Delta\vec{V}(t)$, $\vec{N}(t)$. Естественно, такой выбор требует согласованности выбираемых функций, поскольку не всякие значения (даже неотрицательных компонент) функций $\Delta\vec{P}(t)$, $\vec{N}(t)$, $\Delta\vec{V}(t)$ являются допустимыми. Действительно, положим для простоты объяснения $\vec{N}(t) \equiv 0$, $\Delta\vec{V}(t) \equiv 0$, тогда из комбинации (9) имеем

$$\Delta\vec{P}(t) = (E - A)\vec{w}(t).$$

А это значит, что даже при неотрицательных значениях функции $\vec{w}(t)$ отдельные компоненты функции $\Delta\vec{P}(t)$ могут оказаться отрицательными. С другой стороны, конечно, могут быть найдены всевозможные варианты «разбивки» функции $\vec{w}(t)$ на соответствующие компоненты. Например, пусть $\Delta\vec{P}(t) = \vec{N}(t) \equiv 0$, тогда $\Delta\vec{V}(t) \equiv \vec{w}(t)$ при $0 \leq t < T$ и $\Delta\vec{P}(T) = \vec{P}_1 - \vec{P}_0(T)$, $\Delta\vec{V}(T) = \vec{V}(T) - (E - A)^{-1}\vec{P}_1$ и т.п.

Конкретные варианты выбора значений отдельных составляющих комбинации (9) будут приведены при рассмотрении соответствующих необходимых и достаточных условий оптимальности задачи.

Отметим, что приведенная неоднозначность связана с видом используемого в задаче функционала. Он оказывается нечувствителен к текущим значениям вектор-функции потребления $\vec{P}(t)$, но реагирует на превышение конечного потребления минимального уровня потребления $\Delta\vec{P}(t)$. Для функционалов другого вида, например интеграла от некоторой функции потребления, упомянутая неоднозначность может не иметь места.

Наконец, сформулируем окончательную постановку краевой задачи относительно вектора мощностей $\vec{V}(t)$. Для этой цели введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\vec{V}} = \vec{u},\ (E - A)B = M,\ (E - A)^{-1}\vec{P}_0(t) = \vec{V}_0, \\ &(E - A)^{-1}\vec{P}_1 = \vec{V}_1, \quad \Delta\vec{V}_1 = \vec{w}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

В результате оптимальная задача на быстродействие (8) с учетом обозначений (9), (10) запишется в стандартном для задач такого типа виде:

$$\left.\begin{aligned} &T \Rightarrow \min, \\ &\dot{\vec{V}} = \vec{u}, \quad \vec{V}(t) = M\,\vec{u}(t) + \vec{w}(t) + \vec{V}_0(t), \\ &\vec{V}(0) = \vec{V}_0, \quad \vec{V}(T) = \vec{V}_1 + \vec{w}_1, \\ &\vec{u}(t) \geq 0, \quad \vec{w}(t) \geq 0, \quad \vec{w}_1 \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Таким образом, поставлена задача оптимального наискорейшего перехода экономики, описываемого динамической моделью межотраслевого баланса из некоторого начального состояния (исходный уровень потребления) в заданное конечное состояние (желаемый уровень потребления).

Данная постановка представляет собой оптимальную задачу на быстродействие (система обыкновенных дифференциальных уравнений, представленная во второй строке выражения (10)).

Теперь необходимо сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности.

5. Признаки оптимальности

Введем в рассмотрение некоторую векторную функцию времени *t*, а именно

$$\vec{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t)),$$

компоненты которой $p_i(t)$ являются кусочно-непрерывными функциями времени. Запишем скалярное произведение только что введенной вектор-функции $\vec{\bar{p}}\ (t)$ и вектор-функции мощностей $\vec{V}(t)$ и найдем производную по времени в силу дифференциальных уравнений, входящих в систему (11). Получаем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\vec{p}(t)\vec{V}(t)] = \dot{\vec{p}}\vec{V} + \vec{p}\dot{\vec{V}} = \\ &= \dot{\vec{p}}[M\vec{u} + \vec{w} + \vec{V}_0(t)] + \vec{p}\,\vec{u} = \\ &= (\dot{\vec{p}}'M + \vec{p})\vec{u} + \dot{\vec{p}}\,\vec{w} + \vec{p}_0\,\vec{V}_0(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Проинтегрировав правую и левую части выражения (12) по времени на отрезке $t \in [0, T]$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^T d\,[\vec{p}(t)\vec{V}(t)] = \vec{p}(T)\vec{V}(T) - \vec{p}(0)\vec{V}(0) = \\ &= \int_0^T [(\dot{\vec{p}}M + \vec{p})\vec{u} + \dot{\vec{p}}\vec{w}]dt + \int_0^T \dot{\vec{p}}\vec{V}_0(t)dt. \end{aligned} \tag{13}$$

В исходной задаче (10) требовалось минимизировать время перехода T из начального состояния $\vec{V}(0) = \vec{V}_0$ на множество $\vec{V}(T) \geq \vec{V}_1$. Вместо этой задачи будем рассматривать следующую эквивалентную задачу: задано начальное состояние $\vec{V}(0) = \vec{V}_0$, время перехода T, нижние границы $\vec{V}_1^i$ для всех конечных компонент $V^i(T)$ вектора мощностей, кроме одной, например $V^1(T)$, которую необходимо минимизировать. Приведенная постановка задачи эквивалентна постановке первой, поэтому воспользуемся соотношением (13) для второй формулировки на максимум компоненты $V^1(T)$ при фиксированном времени перехода T. Положив $p_1(T) = 1$, что не умаляет общности задачи, перепишем выражение (13) в виде

$$\begin{aligned} &V^1(T) = -\sum_{i=2}^{n} p_i(T)(V_1^i + w_1^i) + \vec{p}(0)\vec{V}_0 + \\ &+ \int_0^T \dot{\vec{p}}\vec{V}_0(t)dt + \int_0^T [(\dot{\vec{p}}M + \vec{p})\vec{u} + \dot{\vec{p}}\vec{w}]dt. \end{aligned} \tag{14}$$

И теперь имеем возможность перейти непосредственно к формулировке условий оптимальности.

6. Необходимые и достаточные условия оптимальности

Сформулируем необходимые и достаточные условия оптимальности задачи в отношении функций $\vec{u}(t)$, $\vec{w}(t)$ и параметров $\vec{w}_1$:

1. Набор функций $u^i(t)$, $w^i(t)$ оптимален тогда и только тогда, когда существуют функции $p_i(t)$, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &(\dot{\vec{p}}M + \vec{p})_i = 0, \text{ если } u^i > 0, \\ &\text{и } (\dot{\vec{p}}M + \vec{p})_i \leq 0, \text{ если } u^i = 0; \\ &\dot{p}_i = 0, \text{ если } w^i > 0, \\ &\text{и } \dot{p}_i \leq 0, \text{ если } w^i = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

2. Набор параметров w_1^i оптимален тогда и только тогда, когда конечные значения функций $p_i(T)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &p_i(T) = 0, \text{если } w_1^i > 0, \\ &\text{и } p_i(T) \geq 0, \text{ если } w_1^i = 0 \ (i = 2,...,n). \end{aligned} \tag{16}$$

Для доказательства приведенных условий с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина, а также для проведения параллелей с задачами линейного программирования полезно ввести следующие обозначения:

$$\dot{\vec{p}}M + \vec{p} = \vec{\psi}, \quad \dot{\vec{p}} = \vec{\omega}. \tag{17}$$

С учетом обозначений (17) необходимые и достаточные условия оптимальности (16) примут следующий вид:

$$\psi_i = 0, \text{ если } u^i > 0,$$

и

$$\begin{aligned} &\psi_i \leq 0, \text{ если } u^i = 0; \\ &\omega_i = 0, \text{ если } w^i > 0, \\ &\text{и } \omega_i \leq 0, \text{ если } w^i = 0, \\ &(M\vec{u} + \vec{w} = \vec{V} - \vec{V}_0(t), \quad \vec{\omega}M + \vec{p} = \vec{\psi}), \end{aligned} \tag{18}$$

где в скобках приведены конечные связи между старыми $\vec{u}$, $\vec{w}$ и новыми $\vec{\psi}$, $\vec{\omega}$ переменными.

Заключение

Таким образом, можно сделать вывод о том, что степень оптимизации экономики при самом быстром ее переходе из одного состояния в другое зависит от определенных сочетаний в комбинации управляющих функций: полных затрат, фондоемкости, функции потребления, величины собираемых налогов и производственных мощностей — при ограничении некоторых из них по верхнему пределу в силу естественных факторов лимитирования физических ресурсов. Являясь смешанной системой с постоянным плотным взаимодействием элементов государственного контроля с составляющими рынка, воздействующими на организацию потребления и производства, функционал современной экономики представляет собой сложную модель, чутко реагирующую на изменения в каждой из его компонент. Расчеты промежуточных параметров проведены в вычислительном пакете Maple, позволяющие проводить преобразования сложных символьных выражений.

Список литературы

1. *Alzalg B.* Combinatorial and Algorithmic Mathematics: From Foundation to Optimization. Seattle, WA, Kindle Direct Publ.; 2022. 543 p. URL: https://sites.ju.edu.jo/sites/Alzalg/Pages/camfobook.aspx (дата обращения: 01.02.2023)
2. *Fan H.* Research on Forecast of Macroeconomic Indicators Based on Multiobjective Optimization // Wireless Communications and Mobile Computing. 2022. Vol. 5. https://doi.org/10.1155/2022/4905178
3. *Иванова В.О.* Роль экономико-математических методов в оптимизации экономических решений // Креативная экономика. 2018. Т. 12. № 9. С. 1385–1398.
4. *Трофимец А.А., Трофимец Е.Н.* Разработка компьютерных моделей денежных потоков экономических процессов, их расчет и анализ // Актуальные научные исследования в современном мире. 2021. №. 2–7 (70). С. 158–161.
5. *Перепелкина Ю.В.* Оптимизация критериев математической модели экономико-социального управления в период социальной активности // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2020. Т. 10. № 4–1. С. 25–31.
6. *Перепелкина Ю.В.* Математическое моделирование поиска решений нелинейных систем уравнений визуальными средствами Maple // Новое в науке и образовании: сб. тезисов докладов Межд. ежегодной науч.-практ. конф. (г. Москва, 11 апреля 2019 г.). М.: МАКС Пресс, 2019. С. 122–123. EDN: ZCENAD
7. *Шашкин С.Ю.* Использование пакета программ Maple для математического моделирования в экономике: сборник трудов конференции // Образование, инновации, исследования как ресурс развития сообщества: материалы Междунар. науч.-практ. конф. Чебоксары, 19 дек. 2017 г. Чебоксары: ИД «Среда», 2017. С. 121–127. EDN: YMKHHM
8. *Рыжкова Т.В.* Средства Maple и преобразование Лапласа для задач экономического моделирования // III Международная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем» (MNPS-2015). М.: 2015. 191 с.
9. *Грачева М.В., Туманова Е.А.* Математические и инструментальные методы в современных экономических исследованиях. М.: Экономический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018. 232 с. URL: https://www.econ.msu.ru/sys/raw.php?o=54168&p=attachment (дата обращения: 21.03.2023)

References

1. Alzalg B. Combinatorial and Algorithmic Mathematics: From Foundation to Optimization. Seattle, WA, Kindle Direct Publ.; 2022. Available from: https://sites.ju.edu.jo/sites/Alzalg/Pages/camfobook.aspx (accessed: 01.02.2023).
2. Fan H. Research on Forecast of Macroeconomic Indicators Based on Multiobjective Optimization. *Wireless Communications and Mobile Computing.* 2022;5:4905178. https://doi.org/10.1155/2022/4905178
3. Ivanova VO. The role of economic and mathematical methods in optimizing economic decisions. *Creative Economics.* 2018;12(9):1385–1398. (In Russ.)
4. Trofimets AA, Trofimets EN. Development of computer models of cash flows of economic processes, their calculation and analysis. *Actual scientific research in the modern world.* 2021;2–7(70):158–161. (In Russ.)
5. Perepelkina YuV. Optimization of criteria of the mathematical model of economic and social management in the period of social activity. *Economy: yesterday, today, tomorrow.* 2020;10(4–1):25–31. (In Russ.)
6. Perepelkina YuV. Mathematical modeling of the search for solutions of nonlinear systems of equations by visual means of Maple. *New in science and education: collection of abstracts of reports Inter. Annual scientific and practical conference (Moscow, April 11, 2019).* Moscow: MAKS Press; 2019. p. 122–123. (In Russ.) EDN: ZCENAD
7. Shashkin SYu. Using the Maple software package for mathematical modeling in economics: proceedings of the conference. *Education, innovation, research as a resource for community development: materials of the International Scientific and Practical Conference (Cheboksary, 19 December 2017).* Cheboksary: Wednesday Publ.; 2017. p. 121–127. EDN: YMKHHM
8. Ryzhkova TV. Maple tools and Laplace transformation for economic modeling problems. *III International*

Conference «Modeling of nonlinear processes and systems» (MNPS–2015). Moscow; 2015. (In Russ.)

9. Gracheva MV, Tumanova EA. Mathematical and instrumental methods in modern economic research. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 2018. (In Russ.) Available from: https:// www.econ.msu.ru/sys/raw.php?o=54168&p=attachment (accessed: 21.03.2023).

Сведения об авторах

Перепелкина Юлианна Вячеславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 5157-4093; ORCID: 0000-0001-8115-8253; E-mail: amadeycity@yandex.com

Литвин Олег Никитович, старший преподаватель, кафедра информационных технологий и кибербезопасности, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, Москва, Россия; eLIBRARI SPIN-код: 7608-8764; ORCID: 0009-0000-4739-7074; E-mail: lemberg@bk.ru

Задиранов Александр Никитович, доктор технических наук, профессор, кафедра процессов горения и экологической безопасности, Учебно-научный комплекс процессов горения и экологической безопасности, Академия государственной противопожарной службы, Москва, Россия; eLIBRARI SPIN-код: 2873-6465; ORCID: 0000-0001-7787-8290; E-mail: zadiranov@mail.ru

About the authors

Yulianna V. Perepelkina, Candidate of Phys.-Math. Sci., Associate Professor of the Department of Information Systems, Moscow State Technical University “STANKIN”, Moscow, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5157-4093; ORCID: 0000-0001-8115-8253; E-mail: amadeycity@yandex.ru

Oleg N. Litvin, Senior Lector, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia; eLIBRARI SPIN-code: 7608-8764; ORCID: 0009-0000-4739-7074; E-mail: lemberg@bk.ru

Alexander N. Zadiranov, Doctor of Technical Sciences, Professor of Combustion Behavior and Environmental Safety Department, Educational and Scientific Complex of Combustion Processes and Environmental Safety, State Fire Academy of EMERCOM of Russia, Moscow, Russian Federation; eLIBRARI SPIN-code: 2873-6465; ORCID: 0000-0001-7787-8290; E-mail: zadiranov@mail.ru