УДК 539.52

ДВУОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Е.В. Макаров[1], И.А. Монахов[2], И.В. Нефедова[1]

[1]Кафедра прикладной математики
Механико-технологический факультет
Московский университет машиностроения (МАМИ)
ул. Б. Семёновская, 38, Москва, Россия, 107023

[2]Кафедра промышленное и гражданское строительство
Механико-технологический факультет
Московский университет машиностроения (МАМИ)
ул. Б. Семёновская, 38, Москва, Россия, 107023

В работе приведено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии пластины при двуосном растяжении в случае, когда отверстие свободно от нагрузок, и в случае, когда отверстие нагружено вложенной в него или впаянной жесткой шайбой.

Ключевые слова: пластина, смещение, упругость.

I. Пластина с круговым радиуса R отверстием (рис. 1), края которого свободны от внешних напряжений, растягивается по оси Ox напряжением, равным на бесконечности постоянной величине p_1, а по оси Oy — напряжением p_2, т.е.

$$x_x^\infty = p_1; \quad y_y^\infty = p_2; \quad x_y^\infty = 0. \tag{1}$$

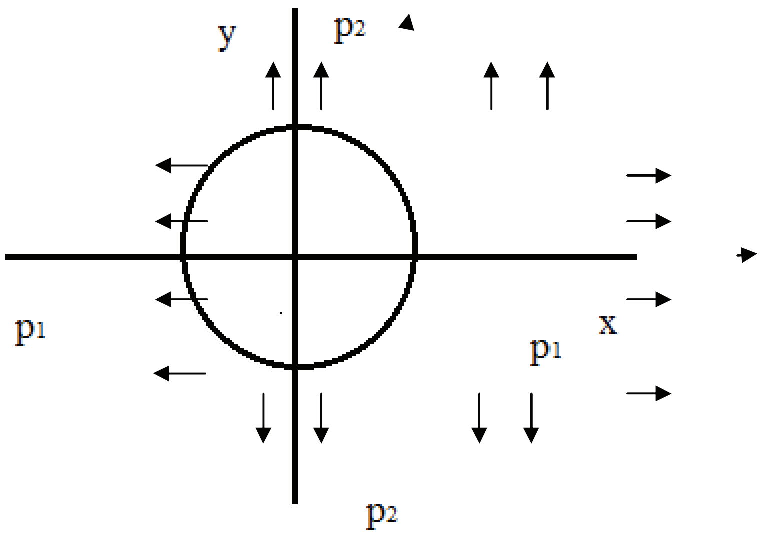

Рис. 1. Пластина с круговым отверстием

В [1] показано, что решение краевых задач плоской теории упругости для области S сводится к отысканию в этой области двух аналитических функций $\varphi(z)$

и $\psi(z)$, связанных на ее границе краевым условием. Для бесконечной области S с круговым отверстием функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ допускают разложение в степенные ряды в виде

$$\Phi(z)=\varphi'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{-k}; \tag{2}$$

$$\Psi(z)=\psi'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a'_k z^{-k}.$$

Используя (1) и (2), известной процедурой [2] получаем значения коэффициентов a_k и a'_k:

$$a_0=\frac{p_1+p_2}{4};\ a_1=0;\ a_2=-\frac{p_1-p_2}{4}R^2;\ a_n=0\ \ (n\ge 3); \tag{3}$$

$$a'_0=-\frac{p_1-p_2}{2};\ a'_1=0;\ a'_2=-\frac{p_1+p_2}{2}R^2;\ a'_3=0;$$

$$a'_4=-\frac{3(p_1-p_2)}{2}R^4;\ a'_n=0\ (n\ge 5).$$

Таким образом, функции (2) принимают вид

$$\Phi(z)=\frac{p_1+p_2}{4}-\frac{p_1-p_2}{2}R^2z^{-2};$$

$$\Psi(z)=-\frac{p_1-p_2}{2}+\frac{p_1+p_2}{2}R^2z^{-2}-\frac{3(p_1-p_2)}{2}R^4z^{-4}. \tag{4}$$

Формулы (4) дают решение поставленной задачи.

1. Напряженное состояние.

Для нахождения компонентов напряженного состояния в полярных координатах воспользуемся формулами Г.В. Колосова, Н.И. Мусхелишвили [1], где положим $z=Re^{i\theta}$; $\overline{z}=Re^{i\theta}$:

$$\begin{cases}\sigma_r+\sigma_\theta=4Re\Phi(z)=p_1+p_2-2(p_1-p_2)\dfrac{R^2}{r^2}e^{-2i\theta}\\ \sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta}=2\left[\overline{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right]e^{2i\theta}=\\ =\left[2\dfrac{R^2}{r^2}(p_1-p_2)-3(p_1-p_2)\dfrac{R^4}{r^4}\right]e^{-2i\theta}-(p_1-p_2)e^{2i\theta}+(p_1+p_2)\dfrac{R^2}{r^2}.\end{cases} \tag{5}$$

Отделяя в (5) действительные и мнимые части, получим

$$\begin{cases}\sigma_r+\sigma_\theta=p_1+p_2-2(p_1-p_2)\dfrac{R^2}{r^2}\cos 2\theta\\ \sigma_\theta-\sigma_r=-(p_1-p_2)\left(\dfrac{R^2}{r^2}-3\dfrac{R^4}{r^4}-1\right)\cos 2\theta+(p_1+p_2)\dfrac{R^2}{r^2}\\ 2\tau_{r\theta}=-(p_1-p_2)\left(1+2\dfrac{R^2}{r^2}-3\dfrac{R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta.\end{cases} \tag{6}$$

Откуда окончательно найдем

$$\sigma_r = \frac{p_1+p_2}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{p_1-p_2}{2}\left(1-4\frac{R^2}{r^2}+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1+p_2}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{p_1-p_2}{2}\left(1+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \qquad (7)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{p_1-p_2}{2}\left(1+2\frac{R^2}{r^2}-3\frac{R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta.$$

Определим напряженное состояние на контуре отверстия, положив $r = R$:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0;\ \ \sigma_\theta = p_1 + p_2 - 2\left(p_1 - p_2\right)\cos 2\theta, \qquad (8)$$

т.е. экстремальные значения окружного напряжения σ_θ достигаются в точках контура, соответствующих следующим значениям полярного угла:

$$\theta_1 = 0;\ \ \theta_2 = \frac{\pi}{2};\ \ \theta_2 = \pi;\ \ \theta_4 = -\frac{\pi}{2}.$$

Для более точного анализа нужно знать соотношения между напряжениями p_1 и p_2.

2. Смещения.

Для определения смещений в полярных координатах воспользуемся формулой Колосова—Мусхелишвили [1], где положим $z = re^{i\theta}$; $\bar{z} = re^{-i\theta}$

$$2\mu(v_r + iv_\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta}[\varkappa\ \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\,], \qquad (9)$$

где $\varkappa = \dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$; λ и μ — упругие постоянные Ламе.

Найдем сначала из (2) и (4):

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)dz\ \text{ и }\ \psi(z) = \int \Psi(z)dz:$$

$$\varphi(z) = \frac{p_1+p_2}{4}re^{i\theta} + \frac{p_1-p_2}{2}\frac{R^2}{r}e^{-i\theta} \qquad (10)$$

$$\psi(z) = -\frac{p_1-p_2}{2}re^{i\theta} - \frac{p_1+p_2}{2}\frac{R^2}{r}e^{-i\theta} + \frac{p_1-p_2}{2}\frac{R^4}{r^3}e^{-3i\theta}.$$

Подставляем (10) в (9), получим

$$2\mu(v_r + iv_\theta) = (\varkappa - 1)\ \ \frac{p_1+p_2}{4}r + \frac{p_1+p_2}{2}\frac{R^2}{r} +$$

$$+\frac{p_1-p_2}{2}(\varkappa\frac{R^2}{r} + r)\ e^{-2i\theta} + \frac{p_1-p_2}{2}\left(\frac{R^2}{r}-\frac{R^4}{r^3}\right)e^{2i\theta}.$$

Отделяя в последнем выражении действительную и мнимую части, находим выражения для смещений:

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{1}{4\mu}\left\{(\varkappa-1)\dfrac{p_1+p_2}{2}r+(p_1+p_2)\dfrac{R^2}{r}+(p_1-p_2)\left[\dfrac{R^2}{r}(\varkappa+1)+r-\dfrac{R^4}{r^3}\right]\cos 2\theta\right\} \\ v_\theta = -\dfrac{p_1-p_2}{4\mu}\left((\varkappa-1)\dfrac{R^2}{r}+r+\dfrac{R^4}{r^3}\right)\sin 2\theta. \end{cases} \tag{11}$$

Если положить $p_2 = 0$ или $p_1 = p_2$, то это будет соответствовать задачам, рассмотренным в [1], об одностороннем растяжении и всестороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием. Результаты, приведенные в [1], получаются из (7) и (11), что может свидетельствовать о правильном получении решения.

II. Предположим, что в отверстие пластины, рассмотренной в *I*, вложена жесткая шайба, спаянная с окружающей ее пластиной вдоль контура L. Это значит, что и окружные, и радиальные смещения на контуре отсутствуют, т.е.

$$v_r = 0; \;\; v_\theta = 0 \;\text{ при } r = R. \tag{12}$$

Будем искать решение задачи в виде (10) с неопределенными действительными коэффициентами β, γ, δ:

$$\varphi(z) = \frac{p_1+p_2}{4}re^{i\theta}+\frac{p_1-p_2}{2}\frac{\beta R^2}{r}e^{-i\theta}, \tag{13}$$

$$\psi(z) = -\frac{p_1-p_2}{2}re^{i\theta}-\frac{p_1+p_2}{2}\frac{R^2}{r}\gamma e^{-i\theta}+\frac{p_1-p_2}{2}\frac{R^4}{r^3}\delta e^{-3i\theta}.$$

Подставляя (13) в (9), получим

$$2\mu(v_r+iv_\theta) = (\varkappa-1)\;\; r\frac{p_1+p_2}{4}+\frac{p_1+p_2}{2}\frac{R^2}{r}\gamma+$$

$$+\frac{p_1-p_2}{2}\left(\frac{R^2}{r}\beta\,\varkappa+r\right)e^{-2i\theta}+\frac{p_1-p_2}{2}\left(\frac{R^2}{r}\beta-\frac{R^4}{r^3}\delta\right)e^{2i\theta}.$$

Отделяя действительную и мнимую части в последнем, находим выражения для смещений:

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{1}{4\mu}\left\{(\varkappa-1)\dfrac{p_1+p_2}{2}r+(p_1+p_2)\dfrac{R^2}{r}\gamma+\right. \\ \qquad \left.+(p_1-p_2)\left[\dfrac{R^2}{r}(\varkappa+1)\beta+r-\dfrac{R^4}{r^3}\delta\right]\right\}\cos 2\theta. \\ v_\theta = -\dfrac{p_1-p_2}{4\mu}\left((\varkappa-1)\dfrac{R^2}{r}\beta+r+\dfrac{R^4}{r^3}\delta\right)\sin 2\theta. \end{cases} \tag{14}$$

Удовлетворяя граничным условиям (12), получим

$$\begin{cases}(\varkappa-1)\dfrac{p_1+p_2}{2}R+\left(p_1+p_2\right)R\gamma+(p_1-p_2)\left[R\left(\varkappa+1\right)\beta+R-R\delta\right]=0\\ \left(\varkappa-1\right)R\beta+R+R\delta=0,\end{cases}$$

откуда находим систему уравнений для определения коэффициентов β, γ, δ:

$$\begin{cases}\left(\varkappa-1\right)+2\gamma=0,\\ \left(\varkappa+1\right)\beta+1-\delta=0,\\ \left(\varkappa-1\right)\beta+1+\delta=0.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\beta=-\frac{1}{\varkappa};\ \ \gamma=-\frac{\varkappa-1}{2};\ \ \delta=-\frac{1}{\varkappa}. \tag{15}$$

Для определения напряженного состояния нам понадобятся функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, которые найдем из (13):

$$\Phi(z)=\varphi'(z)=\frac{p_1+p_2}{4}-\frac{p_1-p_2}{2}\frac{R^2}{r^2}\beta e^{-2i\theta},$$

$$\Psi(z)=\psi'(z)=-\frac{p_1-p_2}{2}+\frac{p_1+p_2}{2}=\gamma\frac{R^2}{r^2}e^{-2i\theta}-\frac{3\left(p_1-p_2\right)}{2}\frac{R^4}{r^4}\delta e^{-4i\theta}. \tag{16}$$

Далее по процедуре, аналогичной описанной в формуле (10), находим компоненты напряженного состояния

$$\sigma_r=\frac{p_1+p_2}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\gamma\right)+\frac{p_1-p_2}{2}\left(1-4\delta\frac{R^2}{r^2}+3\delta\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta=\frac{p_1+p_2}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\gamma\right)-\frac{p_1-p_2}{2}\left(1+3\delta\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta, \tag{17}$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{p_1-p_2}{2}\left(1+2\beta\frac{R^2}{r^2}-3\delta\frac{R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta.$$

Если в формулы (17) подставить (15) и $p_2=0$, то результаты совпадут с решением Н.И. Мусхелишвили [1] задачи об одномерном растяжении пластины с впаянной жесткой шайбой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основы задачи математической упругости. — 4-е изд. — М.: Изд. АН СССР, 1954. [*Musheshvili N.I.* Nekotorye osnovy zadathi matemetitheskoj uprugosti. — 4-e izd. — M.: Izd. AN SSSR, 1954.]

[2] *Макаров Е.В.* Основы математической теории упругости. — М.: МГОУ, 2007. [*Makarov E.V.* Osnovy matematitheskoj teorii uprugosti. — M.: MGOU, 2007.]

BIAXIAL STRETCHING OF THE PLATE A CIRCULAR HOLE

E.V. Makarov[1], I.A. Monakhov[2], I.V. Nefedova[1]

[1]Department of Applied Mathematics
Mechanics and Technology Faculty
Moscow State Machine-building University
B. Semyonovskaya str., 38, Moscow, Russia, 107023

[2]Department of Building production manufacture
Mechanics and Technology Faculty
Moscow State Machine- building University (MAMI)
B. Semyonovskaya str., 38, Moscow, Russia, 107023

The paper presents the solution of the problem of stress-strain state of the plate under biaxial stretching in the case where the hole is free of loads and when the hole is loaded embedded in it or soldered rigid washer.

Key words: plate, offset, elasticity.