

## **ДВУХЭТАПНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ СЕТЕВОГО ОПЕРАТОРА\***

**А.И. Дивеев, Е.Ю. Шмалько**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
Российской академии наук  
*ул. Вавилова, 40, Москва, Россия, 119333*

Рассмотрена задача синтеза системы управления и ее решение вычислительным методом сетевого оператора. В отличие от известного подхода, в котором метод сетевого оператора непосредственно решает задачу синтеза управления по заданным критериям и терминальным условиям, в настоящей работе рассмотрен подход на основе двухэтапного синтеза. Цель нового подхода состоит в обеспечении близости полученных в результате синтеза управлений к оптимальным управлениям. На первом этапе решаются численно задачи оптимального управления для различных начальных значений из заданной области. На втором этапе методом сетевого оператора решается задача аппроксимации полученного на первом этапе множества оптимальных траекторий. Приведен пример двухэтапного синтеза системы управления спуском космического аппарата на поверхность Луны.

**Ключевые слова:** синтез системы управления, оптимальное управление, генетический алгоритм, метод сетевого оператора, управление космическим аппаратом.

В работе рассматривается задача синтеза системы управления. В задаче необходимо найти управление в виде многомерной функции, описывающей зависимость значения вектора управления от вектора координат пространства состояний объекта. Аналитические методы решения задачи синтеза управления имеют ограниченное применение. Последние достижения в области алгоритмизации, в частности, современные методы символьной регрессии, методы генетического программирования [1; 2], грамматической эволюции [3], аналитического программирования [4] и сетевого оператора [5—10] позволяют создавать вычислительные методы для решения задачи синтеза управления.

Вычислительный метод синтеза системы управления на основе метода сетевого оператора включает поиск математического выражения, описывающего функцию управления, с помощью генетического алгоритма, построенного на основе принципа малых вариаций базисного решения, по заданным критериям качества, определяющим условия достижения цели управления и оптимальное значение показателя качества управления. Одним из недостатков метода сетевого оператора является отсутствие возможности проверки близости полученного решения к оптимальному решению. Полученная в результате решения задачи синтеза функция управления после ее подстановки в правые части дифференциальных уравнений, описывающих математическую модель объекта управления, должна давать систему уравнений без вектора управления в правых частях. Решение полученной

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-08-00008а.

системы обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных значениях из заданной области, используемой при решении задачи синтеза, должно совпадать с оптимальными траекториями, которые могут быть получены в результате решения задачи оптимального управления.

В настоящей работе рассматривается вычислительный метод синтеза системы управления, состоящий из двух этапов. На первом этапе решаем задачи оптимального управления для каждого начального состояния из заданного дискретного множества начальных условий. Для решения задачи оптимального управления используем вычислительный метод, построенный на основе вариационного генетического алгоритма. После решения каждой задачи оптимального управления получали оптимальные значения управления и оптимальные траектории движения объекта. На втором этапе решаем методом сетевого оператора задачу аппроксимации множества точек оптимальных траекторий.

В качестве прикладного примера в работе рассматривается задача управления спуском космического аппарата на поверхность Луны [11].

Рассмотрим формальную постановку задачи синтеза системы управления.

Задана математическая модель объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор состояния объекта управления,  $\mathbf{u}$  — вектор управления,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_m]^T$ ,  $U$  — ограниченное замкнутое множество.

Для системы (1) задано множество начальных значений

$$\mathbf{x}(0) \in X_0 \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Заданы терминальные условия

$$\varphi_i(\mathbf{x}(t_f)) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (3)$$

где  $t_f$  — время окончания процесса управления.

Задан критерий качества управления

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Необходимо найти управление в виде

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где  $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$  — многомерная функция, удовлетворяющая условиям

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, t)) \in U, \quad (7)$$

$$\int_0^{t_f} f_0(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, t), \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, t))) dt = \min_{\mathbf{u} \in U} \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \quad (8)$$

$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, t)$  — решение системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})), \quad (9)$$

при начальных условиях  $\forall \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in X_0$ .

Для решения задачи синтеза (1)—(8) можно использовать численный метод сетевого оператора, подробно описанный в работах [5—10]. Метод обеспечивает поиск решения в форме (5) по критерию оптимизации (4) и терминальным условиям (3).

Если искать решение для одного конкретного начального значения

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \quad (10)$$

в виде функции времени

$$\tilde{\mathbf{u}}(\cdot) = \left( \tilde{\mathbf{u}}(t) : t \in [0, t_f] \right), \quad (11)$$

то получим задачу оптимального управления (1), (3), (4), (10), (11).

После решения задачи оптимального управления для начального значения  $\mathbf{x}^0 \in X_0$  решение  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(t)), \quad (12)$$

должно совпадать с решением  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, t)$  системы уравнений (9)

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, t) = \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (13)$$

Неудовлетворение условия (13) говорит о том, что найденная в результате решения задачи синтеза функция  $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$  не позволяет получать оптимальные траектории движения объекта управления, т.е. не удовлетворяет условию (8).

Для получения решения, учитывающего условие (13) близости к оптимальному решению, задачу синтеза управления решаем в два этапа. На первом этапе решаем задачи оптимального управления для множества начальных значений из заданной области (2). Сохраняем множество точек оптимальных траекторий и оптимальных значений управления. На втором этапе решаем задачу аппроксимации множества полученных точек многомерной функцией методом сетевого оператора.

Опишем формальные соотношения двухэтапного синтеза системы управления.

Заменим множество начальных условий конечным множеством точек

$$\bar{X}_0 = \{ \mathbf{x}^{0,i} \in X_0 : i = \overline{1, M} \}. \quad (14)$$

Решаем  $M$  задач оптимального управления для каждого начального значения из (14), и сохраняем множество точек оптимальных траекторий

$$T_i = \left\{ \left( t_0, \tilde{\mathbf{x}}^i(t_0), \tilde{\mathbf{u}}^i(t_0) \right), \left( t_1, \tilde{\mathbf{x}}^i(t_1), \tilde{\mathbf{u}}^i(t_1) \right), \dots, \left( t_K, \tilde{\mathbf{x}}^i(t_K), \tilde{\mathbf{u}}^i(t_K) \right) \right\}, \quad (15)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ,  $t_j = j\Delta t$ ,  $j = \overline{0, K}$ ,  $\Delta t$  — шаг дискретизации.

На первом этапе решения задачи оптимального управления используем вариационный генетический алгоритм многокритериальной оптимизации [12].

На втором этапе решаем задачу аппроксимации точек (15) многомерной функцией. Для решения задачи используем метод сетевого оператора и критерий качества аппроксимации

$$J = \sum_{i=1}^M \sqrt{\sum_{j=0}^K \left( \tilde{\mathbf{u}}^i(t_j) - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}^i(t_j)) \right)^2} \rightarrow \min. \quad (17)$$

В качестве примера используем рассмотренный метод для решения задачи синтеза системы управления спуском космического аппарата (КА) на поверхность Луны [11].

Модель объекта управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dV}{dt} = W \cos(u_1 - \theta) - g \cos \theta, \quad (18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{V} (W \sin(u_1 - \theta) + g \sin \theta), \quad (19)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \cos \theta, \quad (20)$$

$$\frac{dL}{dt} = V \sin \theta, \quad (21)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{P_0 + u_2}{P_{ud}}, \quad (22)$$

$$W = \frac{\tilde{g}P}{m}, \quad g = g_0 \left( \frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2, \quad R = R_0 + h,$$

где  $V$  — модуль скорости движения космического аппарата;  $W$  — ускорение, создаваемое тягой двигателя торможения;  $\theta$  — угол наклона траектории относительно гравитационной вертикали;  $h$  — высота полета КА;  $R$  — модуль радиус-вектора от центра Луны до космического аппарата;  $R_0$  — средний радиус поверхности Луны;  $L$  — дальность вдоль поверхности;  $m$  — масса КА;  $P$  — тяга коррекционно-тормозного двигателя (Н);  $P_{ud}$  — удельный импульс коррекционно-тормозного двигателя (м/с);  $g_0$  — гравитационное ускорение свободного падения на поверхности Луны;  $R_0 = 1738,4$  км;  $P_0 = 440$  кг;  $P_{ud} = 319$  с;  $g_0 = 1,623$  м/с<sup>2</sup>;  $\tilde{g} = 9,80665$  м/с<sup>2</sup>.

Заданы области начальных значений

$$V(0) = V_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad h(0) \in [h_0^-, h_0^+], \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad m(0) = m_0, \quad (23)$$

где  $\theta_0^-$ ,  $\theta_0^+$  — наименьшее и наибольшее начальные значения угла наклона траектории;  $h_0^-$ ,  $h_0^+$  — наименьшее и наибольшее значения начальной высоты.

Заданы терминальные условия:

$$V(t_f) \in [V_f^-, V_f^+], \quad h(t_f) \in [h_f^-, h_f^+], \quad (24)$$

$$t_f = \begin{cases} t, & \text{если } (V(t) \in [V_f^-, V_f^+]) \wedge (h(t) \in [h_f^-, h_f^+]) \\ t^+ & \text{— иначе} \end{cases}, \quad (25)$$

где  $V_f^-$ ,  $V_f^+$  — наименьшее и наибольшее терминальные значения модуля скорости;  $h_f^-$ ,  $h_f^+$  — наименьшее и наибольшее терминальные значения высоты;  $t^+$  — максимальное время полета.

Значения компонент управления ограничены

$$u_1 \in [u_1^-, u_1^+], \quad u_2 \in [u_2^-, u_2^+], \quad (26)$$

где  $u_i^-$ ,  $u_i^+$  — наименьшее и наибольшее значения компоненты управления  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Заданы терминальные условия:

$$\left( V(t_f) - \frac{V_f^- + V_f^+}{2} \right)^2 = 0, \quad (27)$$

$$\left( h(t_f) - \frac{h_f^- + h_f^+}{2} \right)^2 = 0. \quad (28)$$

Заданы критерии качества управления:

$$J_1 = \alpha \left| L_f - L(t_f) \right| + \left| h_f^- + h_f^+ - 2h(t_f) \right| \rightarrow \min, \quad (29)$$

$$J_2 = \left| V_f - V(t_f) \right| \rightarrow \min, \quad (30)$$

где  $\alpha$  — весовой коэффициент;  $L_f$  — заданное терминальное значение дальности.

При решении задачи непрерывные интервалы начальных значений были заменены множествами точек

$$[h_0^-, h_0^+]^T \rightarrow \{h_{0,0}, h_{0,1}, \dots, h_{0,k_h}\}, \quad (31)$$

$$\text{где} \quad h_{0,j} = h_0^- + j\Delta h_0, \quad (32)$$

где  $\Delta h_0$  — величины приращений по углу наклона траектории и высоте.

В вычислительном эксперименте были использованы следующие параметры модели:  $V(0) = 1689$  м/с,  $\theta_0 = 1,6$  рад,  $h_0^- = 16,648$  км,  $h_0^+ = 19,648$  км,  $\varphi(0) = 0$  рад,  $m(0) = 940$  кг,  $u_1^- = 0$  рад,  $u_1^+ = 3,14159265$  рад,  $u_2^- = -80$  кг,  $u_2^+ = +80$  кг,

$V_f^- = 0$  м/с,  $V_f^+ = +5$  м/с,  $h_f^- = 1,2$  км,  $h_f^+ = 1,8$  км,  $L_f = -240$  км,  $\Delta\theta_0 = 0,05$  рад,  $\Delta h_0 = 1,5$  км,  $k_h = 2$ ,  $\alpha = 0,1$ .

На первом этапе была решена задача оптимального управления для различных начальных значений, определенных соотношениями (30)—(33). Решение задачи осуществляли численно методом вариационного генетического алгоритма [12]. Для каждого оптимального решения были сохранены множества точек оптимального управления и оптимальных траекторий (15).

На втором этапе по критерию (17) была решена задача синтеза системы управления методом сетевого оператора [5—10].

Для синтеза методом сетевого оператора было выбрано следующее базисное решение

$$u_i = \begin{cases} u_i^-, & \text{если } u_i \leq u_i^- \\ u_i^+, & \text{если } u_i \geq u_i^+, \quad i = 1, 2, \\ \tilde{u}_i & \text{— иначе} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= q_1^0 (\pi + \theta) + \frac{q_2^0}{h} (h_f - h) \vartheta(h_f - h), \\ \tilde{u}_2 &= -q_3^0 \theta \cos \theta, \quad \bar{h} = \frac{h_0^- + h_0^+}{2}, \quad \vartheta(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \\ \pi &= 3,14159265, \quad q_1^0 = 1, \quad q_2^0 = 1, \quad q_3^0 = 1. \end{aligned}$$

В результате синтеза было получено следующее управление:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \sqrt[3]{A} + \operatorname{sgn}(B) \ln(|B| + 1) + \frac{1}{C} + \frac{1 - e^{-q_3 \theta}}{1 + e^{-q_3 \theta}} + \vartheta(D), \\ \tilde{u}_2 &= u_1 - u_1^3 + e^B - q_3 \theta \cos(\theta) + \vartheta(q_3 \theta) - q_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{sgn}(z_{11}) (e^{|z_{11}|} - 1) + z_{10} + \frac{(h_f - h)}{\bar{h}}, \\ B &= \frac{e^{-q_3 \theta \cos(\theta)}}{q_2} \mu(z_9) \operatorname{sgn}(E) (e^{|E|} - 1), \\ C &= E q_2^2 \left( \operatorname{sgn}(E) \sqrt{|E|} + q_2 + \frac{(h_f - h)}{\bar{h}} + (\theta + \pi) - (\theta + \pi)^3 \right) \\ D &= \operatorname{sgn}(E) \sqrt{|E|} + q_2 + \frac{(h_f - h)}{\bar{h}} + (\theta + \pi) - (\theta + \pi)^3, \\ E &= \frac{1 - e^{-q_2}}{1 + e^{-q_2}} q_1 (\theta + \pi), \quad q_1 = 4,008, \quad q_2 = 6,927, \quad q_3 = 12,07. \end{aligned}$$

На рис. 1—3 приведены результаты моделирования полученной системы управления. На рисунках представлены графики изменения основных переменных модели, используемых в критериях качества при решении задачи оптимального управления,  $V$ ,  $h$  и  $L$ , для различных начальных значений. На этих же графиках приведены точками оптимальные траектории, полученные в результате численного решения задачи оптимального управления.

Графики на рис. 1—3 получены при следующих начальных значениях: а —  $h(0) = 16,648$  км, б —  $h(0) = 19,648$  км.

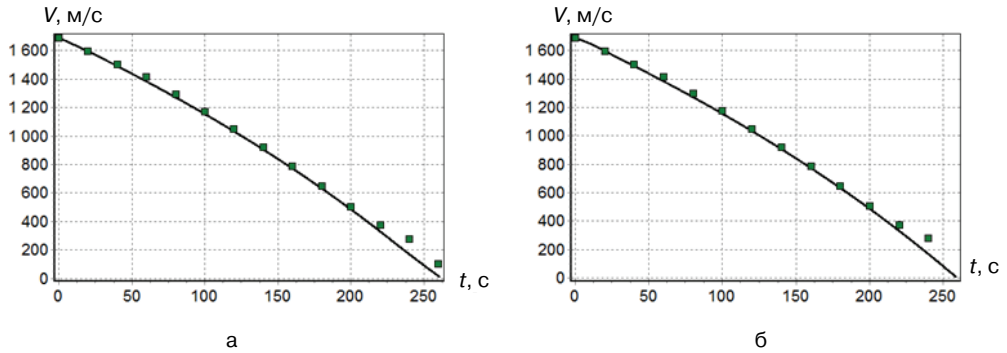


Рис. 1. Скорость КА.

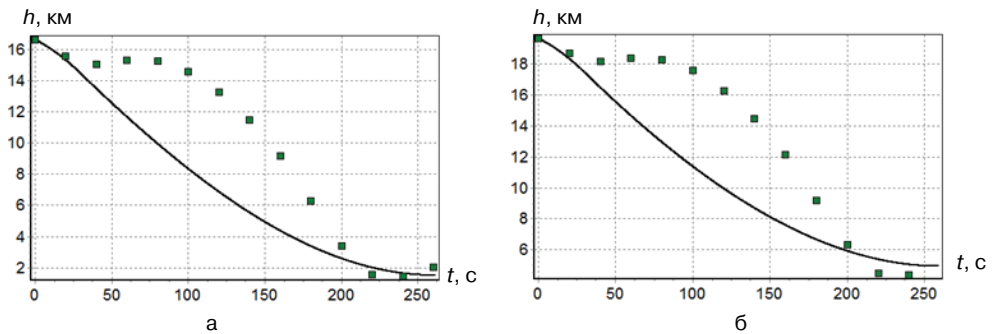


Рис. 2. Высота полета КА

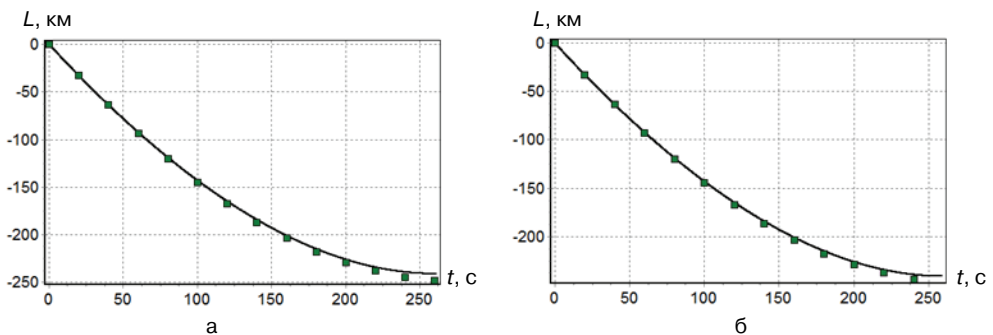


Рис. 3. Дальность полета КА

Из результатов моделирования видно, что полученная система управления обеспечивает движение вблизи оптимальных траекторий по скорости и дальности полета. Наибольшее отличие от оптимальной траектории наблюдается по изменению высоты. Несмотря на то, что отклонение от оптимальной траектории по высоте достигало 6 км, терминальные условия выполняются достаточно точно: при  $h(0) = 16,648$  км,  $V(t_f) = 5,27$  м/с,  $h(t_f) = 1,758$  км,  $L(t_f) = -240,986$  км, при  $h(0) = 19,648$  км,  $V(t_f) = 5,45$  м/с,  $h(t_f) = 4,931$  км,  $L(t_f) = -240,955$  км.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Koza J.R., Keane M.A., Rice J.P.* Performance improvement of machine learning via automatic discovery of facilitating functions as applied to a problem of symbolic system identification // IEEE International Conference on Neural Networks I. 1993. San Francisco, USA. 1993. P. 191—198.
- [2] *Bourmistrova A., Khantsis S.* Control System Design Optimization via Genetic Programming in Proc. of IEEE Congress on Evolutionary Computation, Singapore, 2007, P. 1993—2000.
- [3] *O'Neill M., Ryan C., Keijzer M., Cattolico M.* Crossover in Grammatical Evolution, Genetic Programming and Evolvable Machines 4(1), 2003, P. 67—93.
- [4] *Zelinka I., Nolle L., Oplatkova Z.* Analytic Programming —Symbolic Regression by Means of Arbitrary Evolutionary Algorithms // Journal of Simulation. 2012. Vol. 6, N 9. P. 44—56.
- [5] *Дивеев А.И.* Метод сетевого оператора. — М.: ВЦ РАН, 2010. — 178 с. [*Diveev A.I.* Metod setevogo operatora. — М.: VTs RAN, 2010. — 178 s.]
- [6] *Дивеев А.И.* Численный метод сетевого оператора для синтеза системы управления с неопределенными начальными значениями // Известия РАН ТИСУ. — 2012. — № 2. — С. 63—78. [*Diveev A.I.* Chislennyi metod setevogo operatora dlia sinteza sistemy upravleniya s neopredelennymi nachalnymi znacheniami // Izvestia RAN TiSU. — 2012. — № 2. — S. 63—78.]
- [7] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Метод сетевого оператора и его применение в задачах управления. — М.: Изд-во РУДН, 2012. — 182 с. [*Diveev A.I., Sofronova E.A.* Metod setevogo operatora i ego primenenie v zadachah upravleniya. — М.: Izd-vo RUDN, 2012. — 182 s.]
- [8] *Дивеев А.И., Пупков К.А., Софронова Е.А.* Повышение качества систем управления на основе многокритериального синтеза методом сетевого оператора // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2009. — № 4. — С. 5—12. [*Diveev A.I., Pupkov K.A., Sofronova E.A.* Povyshenie kachestva system upravleniya na osnove mnogokriterialnogo sinteza metodom setevogo operatora // Vestnik RUDN. Seria «Ingenerye issledovania». — 2009. — № 4. — S. 5—12.]
- [9] *Diveev A.I., Sofronova E.A.* Application of network operator method for synthesis of optimal structure and parameters of automatic control system // Proceedings of 17-th IFAC World Congress, Seoul, 2008, 05.07.2008—12.07.2008. P. 6106—6113.
- [10] *Diveev A.I., Sofronova E.A.* The Network Operator Method for Search of the Most Suitable Mathematical Equation. Chapter in the book Bio-Inspired Computational Algorithms and Their Applications / Edited by Shangce Gao. Intech. Printed 2012. February, Croatia. P. 19—42.
- [11] *Дивеев А.И., Пупков К.А., Софронова Е.А.* Синтез управления спуском космического аппарата на поверхность Луны методом сетевого оператора // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». — 2013. — № 4. — С. 14—29. [*Diveev A.I., Pupkov K.A., Sofronova E.A.* Sintez upravleniya spuskom kosmicheskogo apparata na poverkhnost Luny metodom setevogo operatora // Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. «Priborostroenie». — 2013. — № 4. — S. 14—29.]



- [12] *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Вариационный генетический алгоритм для решения задачи оптимального управления // Современные проблемы науки и образования. — 2014. — № 1; URL: <http://www.science-education.ru/115-11474>. [Diveev A.I., Shmalko E.Yu. Variatsionnyi geneticheski algorithm dlia reshenia zadachi optimalnogo upravlenia // Sovremennye problem nauki i obrazovania. — 2014. — № 1; URL: <http://www.science-education.ru/115-11474>.]*

## **TWO-STAGE SYNTHESIS OF CONTROL SYSTEM BY THE NETWORK OPERATOR METHOD**

**A.I. Diveev<sup>1</sup>, E.Yu. Shmalko<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Dorodnicyn Computer Center of Russian Academy of Sciences  
Vavilov str., 40, Moscow, Russia, 119333*

The paper focuses on the problem of control system synthesis and a numerical method of the network operator is proposed to search a solution. Apart from a well-known approach when the stated control synthesis problem is solved directly by the method of network operator considering given criteria and terminal conditions, the present paper describes a two-stage synthesis. The first stage is supposed to solve numerically a set of optimal control tasks for different initial values from some given space. The second stage makes an approximation of the previously received optimal trajectories by means of the network operator. An example illustrates the two-stage synthesis of a control system for a spaceship descent to the Moon.

**Key words:** control system synthesis, optimal control, genetic algorithm, method of network operator, spaceship control.