

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С НАПРАВЛЯЮЩИМИ МЕРИДИАНАМИ БАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В.Н. Иванов

Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

В статье рассматриваются вопросы формообразования циклических поверхностей с плоскостью параллелизма, образуемых движением окружности переменного радиуса, движущейся по двум меридианам базовой поверхности вращения. Получено векторное уравнение подкласса поверхностей. Показано, что на основе отсеков поверхностей конструируются разнообразные оболочки зонтичного типа. Приводятся изображения некоторых видов циклических поверхностей рассматриваемого подкласса, построенных на основе различных базовых поверхностей вращения.

Ключевые слова: базовая поверхность, поверхность вращения, циклическая поверхность, поверхность с плоскостью параллелизма, зонтичная поверхность.

Базовой поверхностью называется поверхность, на основе которой строится другая поверхность с использованием некоторых параметров базовой поверхности. Принимаем в качестве базовой поверхности произвольную поверхность вращения, заданную параметрическим уравнением

$$x(u, \theta) = R(u) \cos \theta; \quad y(u, v) = R(u) \sin \theta; \quad z = u. \quad (1)$$

На базовой поверхности задаем сектор с направляющими меридианами $\pm\theta_0$ ($\theta_0 \leq \pi/2$).

Циклическую поверхность [1] образуем движением окружности переменного радиуса, которая перемещается по направляющим меридианам базовой поверхности так, что радиусы образующей окружности циклической поверхности, направленные в точки пересечения с направляющими меридианами, образуют угол $2\nu_0$ ($\nu_0 < \pi$) (рис. 1). Если образующая окружность движется параллельно заданной плоскости, то получаем циклическую поверхность с плоскостью параллелизма [2]. В частности, плоскость образующей окружности может быть перпендикулярна оси поверхности вращения. Если образующая окружность в процессе движения вращается вокруг хорды сектора направляющих меридианов, то получаем закрученную циклическую поверхность на базовой поверхности вращения. На рис. 1 показано образование циклической поверхности с плоскостью параллелизма.

Если радиус образующей окружности постоянный, то получаем трубчатую циклическую поверхность на базовой поверхности вращения. Геометрия таких поверхностей рассматривалась в работах [3—5].

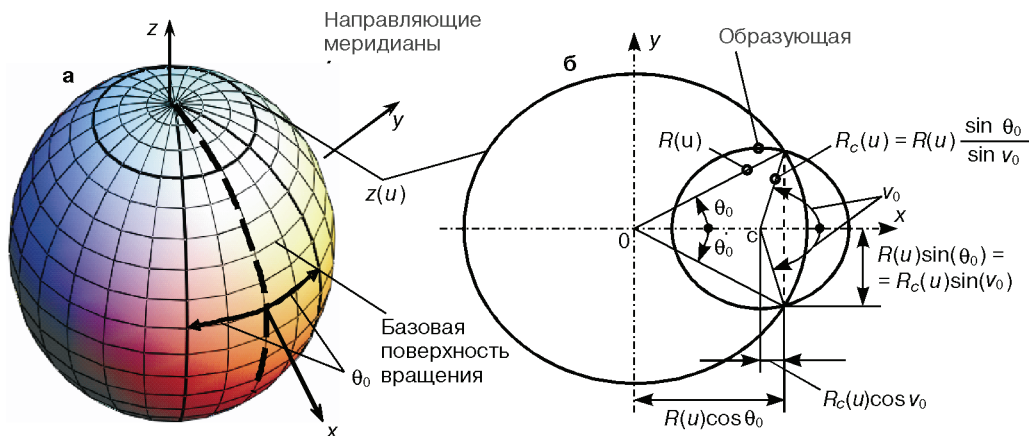


Рис. 1. Образование циклической поверхности

В соответствии с рис. 1 б радиус и положение центра образующей окружности циклической поверхности по оси x определяется формулами

$$R_c(u) = R(u) \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0};$$

$$x(u) = R(u) \cos \theta_0 - R_c(u) \cos v_0 = \mu(\theta_0, v_0) R(u), \quad z = z(u). \quad (2)$$

где $\mu(\theta_0, v_0) = \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \operatorname{ctg} v_0$.

Векторное уравнение циклической поверхности получаем в виде

$$\rho(u, v) = r(u) + R_c(u) e(v) = R(u) \left(\mu \mathbf{i} + \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \mathbf{e}(v) \right) + z(u) \mathbf{k}, \quad (3)$$

где $\rho(u, v)$ — радиус-вектор циклической поверхности; $r(u) = x(u)\mathbf{i} + z(u)\mathbf{k}$ радиус-вектор линии центров образующих окружностей циклической поверхности; $\mathbf{e}(v) = \mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin v$ — уравнение окружности единичного радиуса в горизонтальной плоскости; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты прямоугольной системы координат.

Дифференцируя уравнение циклической поверхности, получаем

$$\rho_u = R' \left(\mu \mathbf{i} + \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \mathbf{e} \right) + z' \mathbf{k}; \quad \rho_v = R \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \mathbf{g};$$

$$\rho_{uu} = R'' \left(\mu \mathbf{i} + \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \mathbf{e} \right) + z'' \mathbf{k}; \quad \rho_{uv} = R' \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \mathbf{g}; \quad \rho_{vv} = R \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \mathbf{e}; \quad (4)$$

$$\mathbf{m} = \frac{\rho_u \times \rho_v}{|\rho_u \times \rho_v|} = \frac{-z' \mathbf{e} + R' \left(\mu \cos v + \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \right) \mathbf{k}}{\tilde{\sigma}};$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{R'^2 \left(\mu \cos v + \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \right)^2 + z'^2}; \quad \sigma = |\rho_u \times \rho_v| = R \frac{\sin \theta_0}{\sin v_0} \tilde{\sigma}.$$

Коэффициенты квадратичных форм циклической поверхности:

$$\begin{aligned}
 E &= R'^2 \left(\mu^2 + \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \nu_0} + 2\mu \frac{\sin \theta_0}{\sin \nu_0} \cos \nu \right) + z'^2; \\
 G &= R^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \nu_0}; \quad F = -\mu \frac{\sin \theta_0}{\sin \nu_0} R R' \sin \nu; \\
 L &= \frac{1}{\tilde{\sigma}} (R' z'' - R'' z') \left(\mu \cos \nu + \frac{\sin \theta_0}{\sin \nu_0} \right); \quad = 0; \quad N = \frac{1}{\tilde{\sigma}} R_0 z' \frac{\sin \theta_0}{\sin \nu_0}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Так как коэффициенты $M = 0$, $F \neq 0$, координатная система циклической поверхности сопряженная, но не является линиями главных кривизн поверхности.

На рис. 2 приведены циклические поверхности на базовом эллипсоиде вращения $R(u) = a \cos u$; $z(u) = b \sin u$; $a = 1,5$; $b = 1$. $\theta_0 = \pi/4$. Показаны циклические поверхности (полный каркас координатных линий) и базовый эллипсоид (каркас горизонтальных координатных окружностей). Жирными линиями показаны направляющие меридианы.

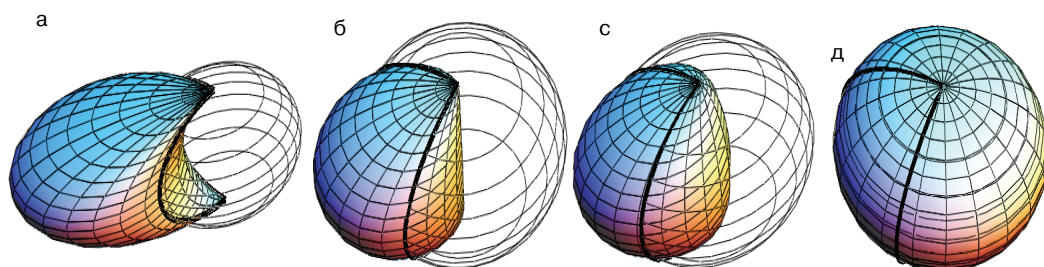


Рис. 2. Циклические поверхности на базовом эллипсоиде вращения:
 а) $\nu_0 = \pi/1,3$; б) $\nu_0 = \pi/2$; в) $\nu_0 = \pi/2,4$; д) $\nu_0 = \pi/4$

Направляющие меридианы базовой поверхности отделяют внешнюю $u = (-\nu_0 \div \nu_0)$ и внутреннюю части циклической поверхности $u = (\nu_0 \div 2\pi - \nu_0)$. Характер циклической поверхности существенно зависит от соотношения θ_0 и ν_0 . Внешний отсек циклической поверхности — поверхность положительной гауссовой кривизны. При $\nu_0 > \theta_0$ внутренний отсек циклической поверхности отрицательной гауссовой кривизны, при $\nu_0 < \theta_0$ — положительной гауссовой кривизны. При $\nu_0 = 2\theta_0$ внутренний отсек (положительной гауссовой кривизны) разделяет прямая линия, совпадающая с осью базовой поверхности вращения. При $\nu_0 = \theta_0$ циклическая поверхность совпадает с базовой поверхностью — эллипсоидом вращения.

На рис. 3 приведены циклически повторяющиеся поверхности на основе циклических поверхностей с базовой поверхностью эллипсоидом вращения $a = 1$; $b = 1,5$, $p = 3$.

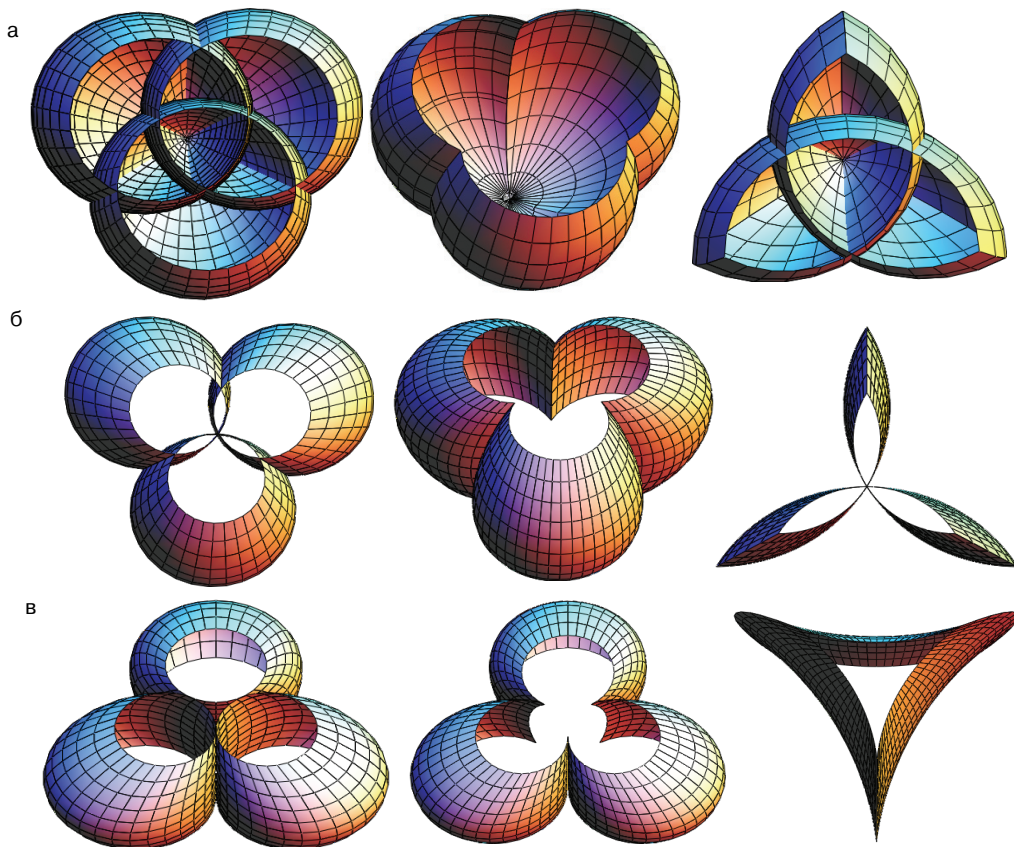


Рис. 3. Циклически повторяющиеся поверхности с базовой поверхностью — эллипсоидом вращения:
 а) $v_0 = \pi/2$; б) $v_0 = \pi/1,5$; в) $v_0 = \pi/1,2$

На рис. 4. базовой поверхностью является сфера, $p = 5$, $v_0 = \pi/1,5$, $u = (0,4\pi \div 0,9\pi)$.

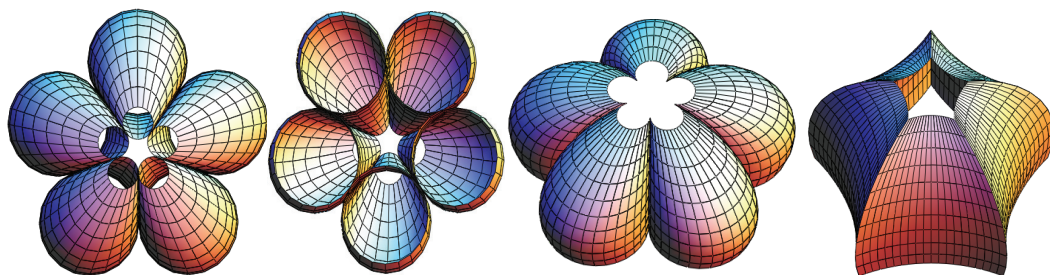


Рис. 4. Циклически повторяющиеся поверхности с базовой поверхностью — сферой

На рис. 5 представлены поверхности с базовой поверхностью — конусом $x = bu, z = u$, $b = 0,25$, $p = 5$, $v_0 = 0,7\pi$, $u = (1 \div 2)$.

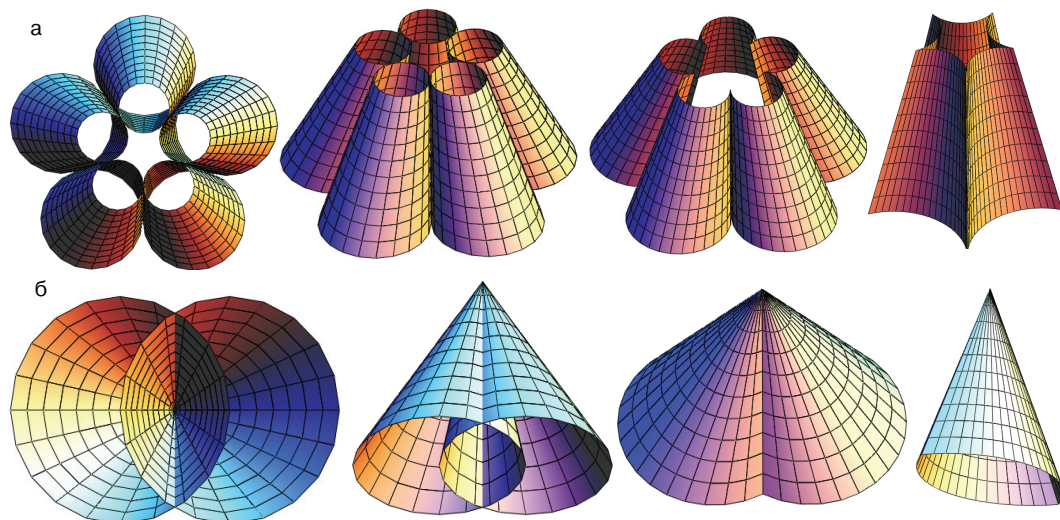


Рис. 5. Циклически повторяющиеся поверхности с базовой поверхностью — конусом:

а) $b = 0,25, \rho = 5, \nu_0 = 0,7\pi, u = (1 \div 2)$; б) $b = 0,5, \rho = 2, \nu_0 = \pi/1,5, u = (0 \div 2)$

Данные типы циклических поверхностей формируются из отсеков косых цилиндров.

На рис. 6 базовой поверхностью является гиперboloид вращения $x = c + a\cosh u$; $z = b\sinh u$; $a = b = 1$; $c = 5$; $u = (-1,5 \div 3)$.

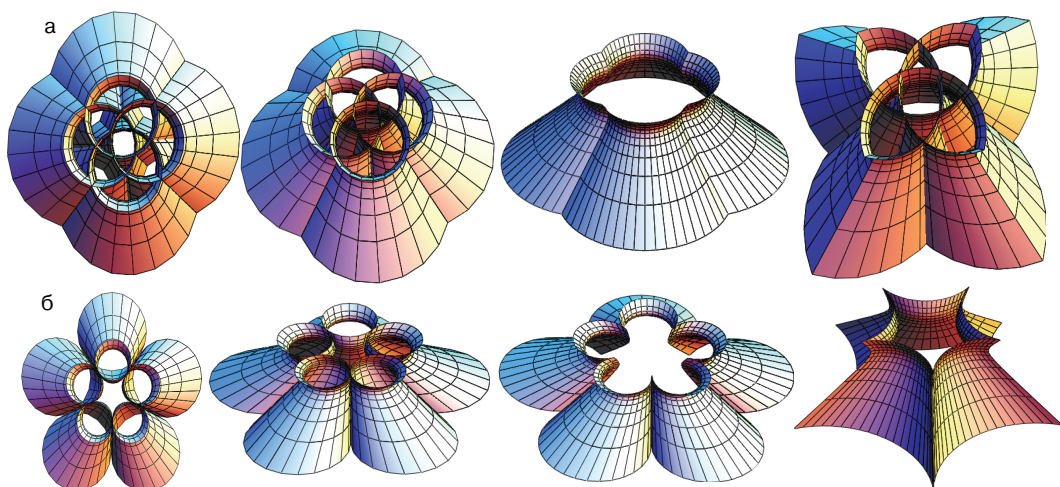


Рис. 6. Циклически повторяющиеся поверхности с базовой поверхностью — гиперboloидом вращения:

а) $\rho = 4, \nu_0 = 2,5\pi$; б) $\rho = 5, \nu_0 = 1,4\pi$

На рис. 7 базовая поверхность вращения с синусоидальным меридианом $x = a\sin(bu)$; $a = 1$; $b = 1$; $p = 3$; $\nu_0 = \pi/2$; $u = (-\pi/2 \div \pi/2)$.

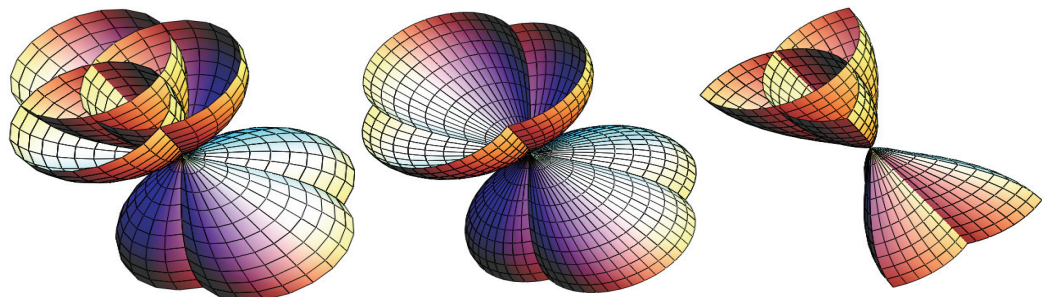


Рис. 7. Циклически повторяющиеся поверхности с базовой поверхностью вращения — синусоидальным меридианом $x = a \sin(bu)$

На рис. 8 базовая поверхность с синусоидальным меридианом $x = a(1 + \sin(bu))$; $a = 1$; $b = 0,5$; $v_0 = \pi/2$; $u = (-\pi/2 \div \pi/2)$.

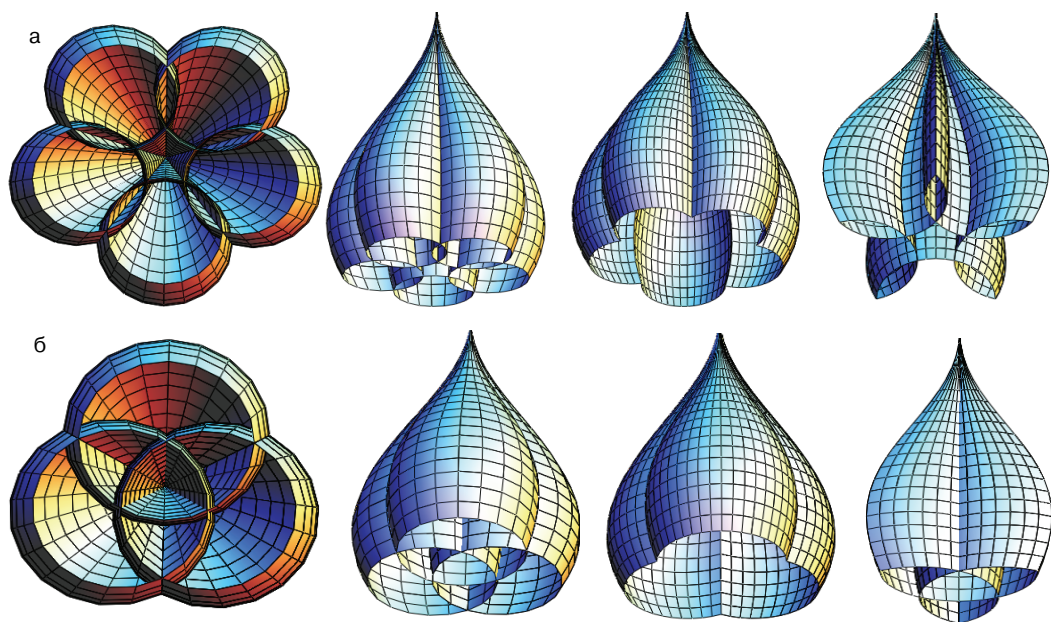


Рис. 8. Циклически повторяющиеся поверхности с базовой поверхностью вращения — синусоидальным меридианом $x = a(1 + \sin(bu))$

а) $p = 5$; б) $p = 3$

Повторяя циклическую поверхность путем поворота ее вокруг оси базовой поверхности на угол $2\theta_0$, получаем поверхности (оболочки) из циклически повторяющихся отсеков. При этом можно использовать как полную (замкнутую) циклическую поверхность, так и внешний или внутренний отсеки циклической поверхности. Если $\theta_0 = \pi/p$, где p — целое число, то, повторяя циклическую поверхность (отсек циклической поверхности) p раз, получим замкнутую поверхность зонтичного типа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. — М.: Либроком, 2010.
- [2] *Иванов В.Н.* Геометрия циклических поверхностей: Сб. научных трудов аспирантов инженерного факультета. — Вып. VIII. — М.: Изд-во УДН, 1971. — С. 137—142.
- [3] *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н.* Конструирование зонтичных оболочек из отсеков циклических оболочек переноса // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. — 2011. — № 1. — С. 3—7.
- [4] *Иванов В.Н.* Геометрия циклических оболочек переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. — 2011. — № 2. — С. 3—8.
- [5] *Иванов В.Н., Шамбина С.Л.* Зонтичные оболочки из отсеков циклических поверхностей переноса на различных типах базовых поверхностей вращения / *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет*. — Вип. 4. — Т. 51. — Мелітополь: ТДАТУ, 2011. — С. 9—15.

CYCLIC SURFACES WITH DIRECTRIX MERIDIANS OF THE BASE SURFACE OF REVOLUTION

V.N. Ivanov

People's Friendship University of Russia
Ordshonikidse str., 3, Moscow, Russia, 115419

The questions of forming of the cyclic surfaces with plane of parallelism made by the circle of the changed radius moving on two meridians of the base surface of revolution are concern. There received the vector equation of the surfaces. It is shown that on the base of those surfaces there may be constructed varies shells of umbrella type. There shown drawings of some cyclic surfaces and surfaces of umbrella type with different base surfaces of revolution.

Key words: base surface, surface of d revolution, cyclic surface, surface with plane of parallelism, umbrella surface, made by moving of the circle f the changed radius.