
МАШИННЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ СО СПЛОШНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ МАСС

Е.П. Борzych

Кафедра архитектуры и градостроительства
Инженерный факультет
Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

Разработаны алгоритм и программа, основанные на сочетании известных методов сосредоточенных масс и метода сил, для вывода формул собственных круговых частот колеблющихся стержней с распределенными массами и жесткостями. Алгоритм позволяет варьировать количество дискретных масс, чтобы обеспечить заданную точность. Большая точность и возможность учитывать любые граничные условия расширяют область возможного применения метода.

Ключевые слова: алгоритм, дискретные массы, частоты.

Имеются публикации [1], где даны решения задач по определению круговых собственных частот в замкнутом аналитическом виде. Эти решения точны в пределах точности теории. Недостаток их в том, что они решены только для некоторых случаев краевых условий.

Формулу для вычисления значений круговых частот поперечных колебаний стержней (балок) обычно представляют в виде произведения двух сомножителей, где один сомножитель отражает влияние краевых условий и его величина однозначно зависит только от них, причем этот сомножитель безразмерен; второй сомножитель имеет размерность частоты, величина его однозначно определяется длиной стержня, жесткостью его и погонной массой его, причем в данных задачах все они считаются постоянными:

$$\omega_{\min} = K_1 \cdot K_2; \quad K_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{q}}.$$

Величина K_1 принимает значения, например, 22,4 если края заделаны, и 9,87 — если края шарнирные и т.п. Отсюда следует, что этот способ может быть использован не только для вычислений собственных колебаний, но и для вывода самих формул по определению круговых частот. Для примера найдем вид, неизвестный нам из специальной литературы, а именно вид формулы, по которой можно вычислять собственные частоты поперечных колебаний балки с заделкой одного конца и шарнирной опорой другого конца. Как следует из вышесказанного, вывод формулы сведется к нахождению сомножителя K_1 , который отвечает за влияние граничных условий. Точность определения K_1 обеспечим количеством учтенных дискретных масс. Результаты вычисления величины K_1 описаны в табл. 1. Строка 1 дает величину K_1 для первого тона. Строка 2 дает величину K_1 второго тона.

Таблица 1

Результаты вычисления величины K_1

Определяемая величина	Взяты 8 точечных масс	Отклонение от среднего, %	Взяты 10 точечных масс	Отклонение от среднего, %	Взяты 12 точечных масс	Отклонение от среднего, %	Условия на концах балки
K_1	15,418	0	15,418	0	15,418	0	Слева — заделка, справа — шарнир
K_1	49,948	0	49,958	0	49,961	0	

Таким путем, по данным табл. 1 получены и представлены формулы, определяющие частоты низшего (основного) тона и первого обертона для балки с заделанным и шарнирным краями

$$\omega_1 = \frac{15,418}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{49,961}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

Проведем сравнение первых круговых частот поперечных колебаний стержня, полученных способом точечных масс, с данными Ландау [1. С. 148—149], которые получены аналитически, через прямое интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений. Сравнение результатов отражены в табл. 2. Из анализа таблицы заключаем: приближенный способ точечных масс по точности решений не уступает точным аналитическим решениям, если брать достаточное количество масс. Это не особенно затруднит процесс расчета, если использовать вычислительную технику. Поэтому способ дискретных (точечных) масс можно применять наряду с аналитическим без потери точности. При отсутствии аналитически выведенных формул предложенный алгоритм и программа даст возможность получить нужный спектр частот с заданной точностью.

Таблица 2

Сравнения первых круговых частот поперечных колебаний стержня

Точное значение по Ландау	Взята 1 точечная масса	Ошибка, %	Взяты 3 точечные массы	Ошибка, %	Взято 10 точечных масс	Ошибка, %	Краевые условия
22,4	19,596	<13	22,302	<0,5	22,373	<0,2	Заделаны оба конца
9,87	9,798	<0,8	9,867	<0,04	9,87	0	Шарнирны оба конца
3,52	3,897	<11	3,583	<1,8	3,523	<0,1	Консоль

Разработаны алгоритм и программа получения формул по определению круговых частот колеблющихся стержней с равномерно распределенной жесткостью и массой и с любыми условиями опирания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. — М.: Наука, 1960.
 [2] Ерхов М.И. Основы динамики упругих систем: Учеб. пособие. — М.: Изд-во УДН, 1989.

**DISCREET METHOD FOR DERIVATION
OF FORMULAS FOR FREE CICLIC FREQUENCES
OF OSCILLATING BARS WITH DISTRIBUTEOL MASSES**

E.P. Borzyg

The Department of Combined ICE
Engineering faculty
Peoples' Friendship University of Russia
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

The paper deals with the problem of automated derivation of the formulas for cyclic frequencies.

Key words: algorithm, discrete masses, frequency.