Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования
RUDN Journal of Engineering Research

2026;27(2):237–248

ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)
journals.rudn.ru/engineering-researches



DOI: 10.22363/2312-8143-2026-27-2-237-248
EDN: LBPGSQ

Научная статья / Research article

# Анализ возможности аналитической и численной суперпозиции нелинейных нагрузочных диаграмм спирально-тросовых виброизоляторов

**С.В. Доронин**✉, **Е.М. Рейзмунт**, **Ю.Ф. Филиппова**

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,
*Красноярск, Российская Федерация*
✉ mr.svdoronin@yandex.ru

**История статьи**

Поступила в редакцию: 15 декабря 2025 г.
Доработана: 18 февраля 2026 г.
Принята к публикации: 22 февраля 2026 г.

**Заявление о конфликте интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта**

При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

**Заявление о доступности данных**

Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в опубликованную статью.

**Аннотация.** В силу ограниченного числа направлений нагружения тросовых виброизоляторов, обеспеченных экспериментальными характеристиками жесткости, актуальным является разработка технологии их расчетного обоснования. Анализ большого массива экспериментальных нагрузочных диаграмм тросовых виброизоляторов различных типоразмеров и производителей позволил установить качественные закономерности нелинейности жесткости. Одна из них заключается в уменьшении степени нелинейности диаграмм виброизоляторов, рассчитанных на большие нагрузки. Цель исследования — проверка гипотезы о возможности применения принципа суперпозиции экспериментальных нелинейных нагрузочных диаграмм с контролируемой и практически приемлемой погрешностью. Исследованы возможности получения расчетных нагрузочных диаграмм модельного тросового виброизолятора для произвольного направления приложения нагрузки путем аналитической и численной суперпозиции имеющихся паспортных (экспериментальных) нагрузочных диаграмм. Численная суперпозиция осуществлялась с использованием конечно-элементного представления тросового виброизолятора пространственной системой нелинейных пружин. Полученные оценки погрешности не позволяют в общем случае использовать принцип суперпозиции для инженерных расчетов, несмотря на слабо выраженный характер нелинейности паспортных диаграмм. Однако для тросовых виброизоляторов, рассчитанных на большие нагрузки, применение принципа суперпозиции для вычисления расчетных нагрузочных диаграмм представляется потенциально перспективным.

**Ключевые слова:** принцип суперпозиции, нелинейность жесткости, модели тросового виброизолятора, статический расчет, паспортные нагрузочные диаграммы

**Вклад авторов**

*Доронин С.В.* — концепция, методология исследования, написание текста, анализ и интерпретация результатов; *Рейзмунт Е.М.* — построение и исследование аналитических и численных моделей, написание текста, анализ и интерпретация результатов; *Филиппова Ю.Ф.* — систематизация, оцифровка, анализ нелинейности нагрузочных диаграмм, написание текста. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

© Доронин С.В., Рейзмунт Е.М., Филиппова Ю.Ф., 2026
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

**Финансирование**

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий.

**Для цитирования**

*Доронин С.В., Рейзмунт Е.М., Филиппова Ю.Ф.* Анализ возможности аналитической и численной суперпозиции нелинейных нагрузочных диаграмм спирально-тросовых виброизоляторов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2026. Т. 27. № 2. С. 237–248. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2026-27-2-237-248 EDN: LBPGSQ

# Analysis of the Feasibility of Analytical and Numerical Superposition of Nonlinear Load-Deflection Curves of Helical Wire-Rope Vibration Isolators

**Sergey V. Doronin ✉, Elena M. Reizmunt, Yulia F. Filippova**

Federal Research Center for Information and Computational Technologies, *Krasnoyarsk, Russian Federation*
✉ mr.svdoronin@yandex.ru

**Article history**

Received: December 15, 2025
Revised: February 18, 2026
Accepted: February 22, 2026

**Conflicts of interest**

The authors declare that there is no conflict of interest.

**Statement on the use of artificial intelligence technologies**

No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

**Data availability**

All data obtained during this study are included in the published article.

**Abstract.** Due to the limited number of loading directions for wire-rope vibration isolators for which experimental stiffness characteristics are available, the development of a computational procedure for substantiating their characteristics is relevant. An analysis of a large set of experimental load-deflection curves for wire-rope vibration isolators of various standard sizes and manufacturers made it possible to identify qualitative patterns of stiffness nonlinearity. One such pattern is a decrease in the degree of nonlinearity in the curves of vibration isolators designed for higher loads. The aim of this study is to test the hypothesis that the superposition principle can be applied to experimental nonlinear load-deflection curves with controlled and practically acceptable error. The study investigates the feasibility of obtaining calculated load-deflection curves for a model wire-rope vibration isolator under an arbitrary direction of load application through analytical and numerical superposition of the available manufacturer-specified experimental load-deflection curves. Numerical superposition was performed using a finite element representation of the wire-rope vibration isolator as a three-dimensional system of nonlinear springs. The obtained error estimates do not, in the general case, allow the superposition principle to be used for engineering calculations, despite the weakly pronounced nonlinearity of the manufacturer-specified curves. However, for wire-rope vibration isolators designed for higher loads, the use of the superposition principle to calculate design load-deflection curves appears potentially promising.

**Keywords:** superposition principle, non-linearity of stiffness, wire rope isolator models, static calculation, passport load diagrams

**Authors' contribution**

*Doronin S.V.* — conceptualization, research methodology, manuscript preparation, analysis and interpretation of results; *Reizmunt E.M.* — development and studying of analytical and numerical models, manuscript preparation, analysis and interpretation of results; *Filippova Yu.F.* — systematization, digitization, analysis of the nonlinearity of load diagrams, manuscript preparation. All authors read and approved the final version of the article.

**Funding**

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation for the Federal Research Center for Information and Computing Technologies.

**For citation**

Doronin SV, Reizmunt EM, Filippova YuF. Analysis of the feasibility of analytical and numerical superposition of nonlinear load-deflection curves of helical wire-rope vibration isolators. *RUDN Journal of Engineering Research.* 2026;27(2):237–248. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/2312-8143-2026-27-2-237-248 EDN: LBPGSQ

## Введение

Спирально-тросовые виброизоляторы представляют собой класс технических устройств, широко применяемых в системах защиты от динамических воздействий. Основной характеристикой этих устройств являются экспериментально получаемые паспортные нагрузочные диаграммы, выражающие взаимосвязь нагрузки (силы) $F$, приложенной к одной из планок, и перемещения $s$ этой планки в направлении действия нагрузки. Нагрузочные диаграммы являются характеристикой жесткости виброизолятора и, как правило, получаются для 2-4 (гораздо реже для 6) направлений действия нагрузки, лежащих преимущественно в одной, реже в двух или трех плоскостях. То есть нагрузочные диаграммы имеются для весьма ограниченного числа направлений действия сил.

Практически важным для инженерного проектирования систем защиты от динамических воздействий представляется получение нагрузочных диаграмм виброизоляторов для произвольного направления действия силы. Ранее была предпринята попытка синтеза диаграмм для произвольного направления действия силы путем интерполяции паспортных (экспериментальных) и расчетных диаграмм, полученных с использованием линеаризованной трехмерной модели виброизолятора [1]. В развитие этих результатов в настоящей работе рассматривается более общий подход, основанный на качественных оценках степени нелинейности нагрузочных диаграмм, оценке возможности применения принципа суперпозиции и использовании аналитических расчетов и численного моделирования виброизолятора пространственной системой пружин.

Предпосылкой исследования возможности применения принципа суперпозиции для расчетного построения нагрузочных диаграмм при произвольном направлении действия нагрузки по имеющемуся ограниченному набору паспортных нагрузочных диаграмм является тот факт, что во многих случаях нагрузки, приложенные по некоторым направлениям, могут быть выражены геометрической суммой проекций силы на оси, соответствующие другим направлениям нагрузки. Согласно принципу суперпозиции результирующий эффект от нескольких независимых воздействий представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности [2].

Известны многочисленные случаи успешного использования этого принципа для решения прикладных задач [3–6]. Область его применения ограничивается тем, что его справедливость обоснована только для линейных систем, при наличии нелинейности любой природы принцип суперпозиции формально неприемлем [2]. Однако использование принципа суперпозиции настолько практически эффективно, что выполняются исследования, направленные на оценку погрешности решения, полученного путем суперпозиции для нелинейных задач [7–10]. Они основаны на идее, что в случае слабой нелинейности суперпозиция решений предположительно приведет к небольшой ошибке, и при возможности оценки и контроля этой ошибки применение принципа суперпозиции может быть практически оправданно. При этом возникает вопрос об оценке степени нелинейности рассматриваемой системы.

В рамках формального, строго математического подхода в наиболее общем случае в качестве характеристики степени нелинейности рассматриваются показатели степени уравнений, описывающих модель системы [11–14]. При анализе степени нелинейности регрессионных моделей учитываются их монотонность или наличие экстремумов, суммарное число экстремумов и перегибов, наличие либо отсутствие асимптоты и другие характеристики [15].

С этих позиций представляется актуальным анализ нелинейности нагрузочных диаграмм спирально-тросовых виброизоляторов и возможности применения принципа суперпозиции для их вычисления при произвольном направлении действия нагрузки.

Гипотеза настоящего исследования заключается в том, что степень нелинейности, характерная для тросовых виброизоляторов, не пре-

пятствует построению расчетных нагрузочных диаграмм с использованием принципа суперпозиции с практически приемлемой погрешностью. При этом степень нелинейности будет оцениваться преимущественно качественно по внешнему виду нагрузочных диаграмм.

Постановка задачи включает в себя разработку алгоритмов аналитического и численного получения нагрузочной диаграммы при статическом нагружении тросового виброизолятора по произвольному направлению путем суперпозиции имеющихся паспортных нагрузочных диаграмм, а также оценку погрешности результатов, полученных с использованием этих алгоритмов.

## 1. Анализ степени нелинейности паспортных нагрузочных диаграмм

В качестве исходных данных для анализа использованы паспортные нагрузочные диаграммы из размещенных в открытом доступе в сети Internet каталогов продукции ведущих производителей тросовых виброизоляторов: Hutchinson Stop-Choc GmbH (Германия), Socitec (Франция), Enidine (США), Wuxi Hongyuan Devflex Co. Ltd (Китай), Астрон (Россия), Виброника (Россия), ИНМОР (Россия)[1]. Для возможности многовариантного компьютерного анализа часть этих диаграмм оцифрована и представлена в виде электронных таблиц. Оцифрованы нагрузочные диаграммы 11 типоразмеров виброизоляторов компании Виброника, 27 типоразмеров виброизоляторов компании Астрон, 5 типоразмеров виброизоляторов корпорации Hutchinson, 90 типоразмеров виброизоляторов компании Enidine.

Качественный анализ рассматриваемого массива нагрузочных диаграмм позволил установить следующие их характерные особенности. Графики нагрузочных диаграмм всегда монотонны и преимущественно нелинейны, причем во многих случаях значительные фрагменты графиков визуально близки к линейным.

Существенным для целей настоящего исследования является тенденция изменения характера нелинейности диаграмм в зависимости от максимальной расчетной нагрузки на виброизолятор (грузоподъемности). Проиллюстрируем это положение на примере нагрузочных диаграмм трех типоразмеров виброизоляторов компании Астрон (рис. 1). Для виброизолятора ВМТ-04-01 с максимальной нагрузкой до 90 Н диаграммы для всех схем нагружения существенно нелинейны, для виброизолятора ВМТ-350 с максимальной нагрузкой до 4000 Н одна диаграмма существенно нелинейна, две могут считаться слабо нелинейными, для виброизолятора ВМТ-700 с максимальной нагрузкой до 14000 Н все три диаграммы практически линейны.

Для конкретизации дальнейших рассуждений выбран модельный объект — тросовый виброизолятор ВМТ-350, являющийся типичным по конструкции и характеру нагрузочных диаграмм представителем рассматриваемого класса технических устройств и характеризующийся диаграммами различной степени нелинейности. Невыполнение гипотезы исследования для этого виброизолятора будет как ее опровержением для всего класса тросовых виброизоляторов, так и основанием определения направлений дальнейших исследований.

Визуально нелинейность заметно выражена у кривой *1*, кривые *2* и *3* близки к линейным (рис. 1, *в*). Выполнена аппроксимация оцифрованных графиков нагрузочных диаграмм различными вариантами степенных полиномов с оценкой коэффициента детерминации $R^2$, характеризующего долю дисперсии зависимой переменной, объясняемую независимой переменной. Высокая точность аппроксимации дос-

[1] См.: Hutchinson. URL: https://stop-choc.de (accessed: 25.09.2025); Socitec. Socitec's expertise & creative solutions. URL: https://socitec.com/ (accessed: 25.09.2025); Enidine. Shock Absorbers and Vibration Isolation Products. URL: https://www.enidine.com (accessed: 25.09.2025); Dpflex. URL: https://en.dpflex.com/ (accessed: 26.09.2025); Астрон. Виброизоляция электроники на транспорте. URL: https://dempfer.ru (accessed: 25.09.2025); Виброника. Вибрационная защита оборудования. URL: http://vibronika.ru/ (дата обращения: 26.09.2025); ИНМОР. URL: http://inmor.ru/ (дата обращения: 02.10.2025).

тигнута уже при третьей степени полинома. Соответствующие выражения $F = f(s)$ для кривых *1–3* имеют вид

$$F = f_1(s) = 0,2979s^3 - 16,742s^2 + 376,29s,$$
$$R^2 = 0,9965; \quad (1)$$

$$F = f_2(s) = 0,1097s^3 - 6,0865s^2 + 160,14s,$$
$$R^2 = 0,9973; \quad (2)$$

$$F = f_3(s) = 0,0807s^3 - 3,6591s^2 + 97,9075s,$$
$$R^2 = 0,9966. \quad (3)$$

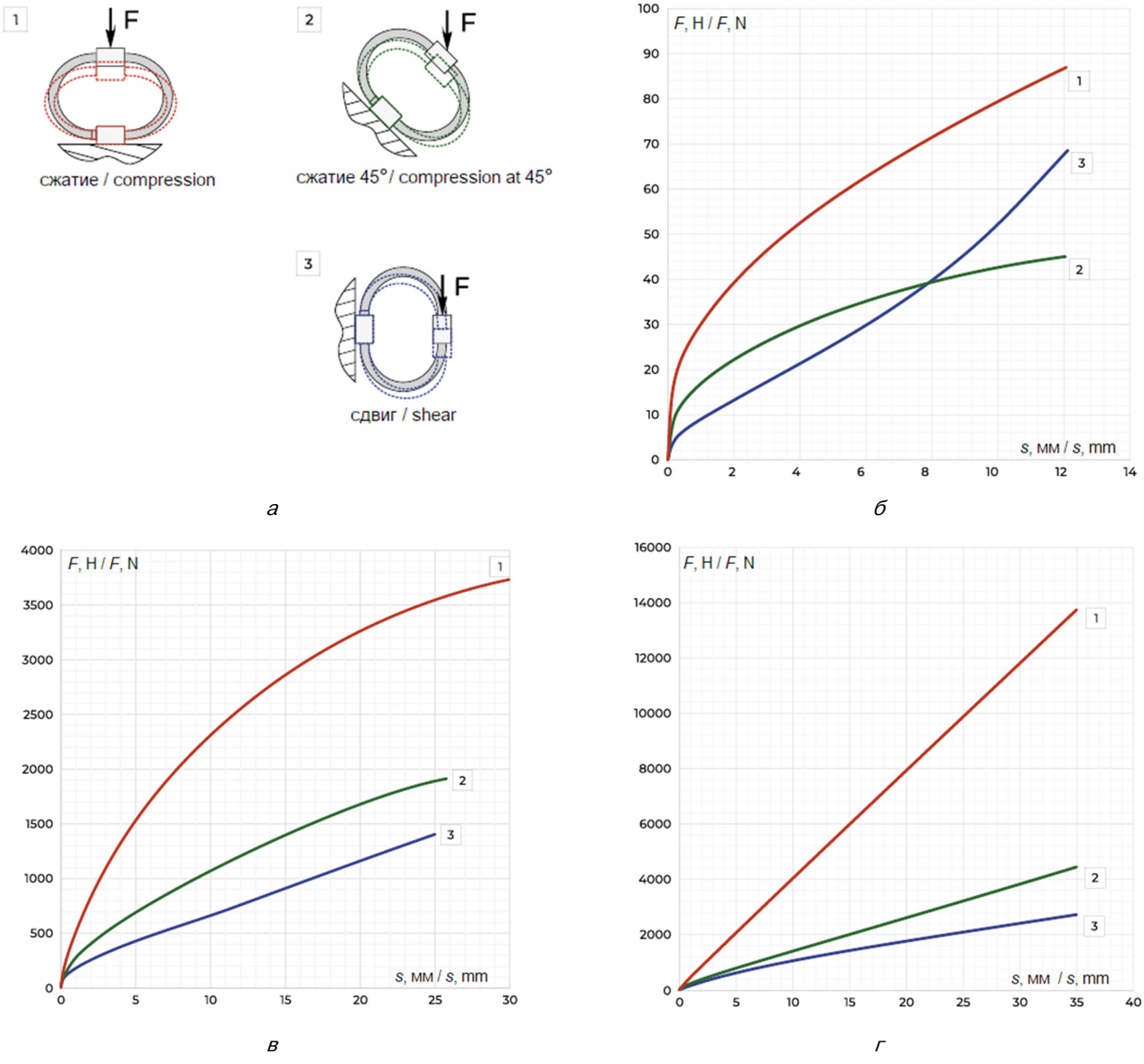



**Рис. 1.** Нагрузочные диаграммы виброизоляторов Астрон разных типоразмеров (по данным Астрон: https://dempfer.ru):
*а* — схемы нагружения; *б* — ВМТ-04-01; *в* — ВМТ-350; *г* — ВМТ-700
И с т о ч н и к: выполнено С.В. Дорониным, Е.М. Рейзмунт, Ю.Ф. Филипповой.

**Figure 1.** Load-Deflection Curves for Astron Vibration Isolators of Various Standard Sizes (based on Astron data: https://dempfer.ru)
*а* — load diagrams; *б* — VMT-14-01; *в* — VMT-350; *г* — VMT-700
S o u r c e: by S.V. Doronin, E.M. Reizmunt, Yu.F. Filippova.

Таким образом, уже при третьей степени аппроксимирующего полинома более 99 % дисперсии прикладываемой силы $F$ объясняется дисперсией перемещений $s$. Это косвенно свидетельствует об умеренной степени нелинейности нагрузочных диаграмм и является предпосылкой попытки применения принципа суперпозиции с обязательной оценкой погрешности получаемого результата.

Отметим, что в практических расчетах часто бывает удобно вместо прямой формы записи выражения нагрузочной диаграммы в виде $F = f(s)$ использовать соответствующую обратную функцию $s = f^{-1}(F)$. Определяя силы в зависимости от перемещения или перемещения по значениям силы, имеем дело с разными формализациями нагрузочной диаграммы.

## 2. Суперпозиция нагрузочной диаграммы с помощью аналитического расчета

Для оценки погрешности суперпозиции необходимы как минимум три паспортные нагрузочные диаграммы: две, на основании которых будет получена расчетная диаграмма как результат суперпозиции, и третья — с направлением действия нагрузки, идентичным таковому для расчетной. Сравнение двух последних диаграмм позволит судить о погрешности суперпозиции. Рассмотрим в качестве примера получение нагрузочной диаграммы для случая сжатия под углом 45° с помощью суперпозиции нагрузочных диаграмм для случаев сжатия и сдвига. Сила $F_2$, сжимающая виброизолятор под углом 45°, может быть разложена на силы $F_1$ и $F_3$, вызывающие деформации соответственно сжатия и сдвига (рис. 2): $\vec{F_2} = \vec{F_1} + \vec{F_3}$; $F_1 = F_3 = F_2 \cdot \cos 45°$. Перемещения, вызываемые силами $F_1$, $F_2$ и $F_3$, вдоль направления действия сил, определяются нагрузочными диаграммами $F = f(s)$, индивидуальными для каждого направления ($F_1 = f_1(s)$, $F_2 = f_2(s)$, $F_3 = f_3(s)$). Для вычисления собственно перемещений по значениям приложенных сил необходимо получить функции $s = g(F)$, обратные к нагрузочным диаграммам $F = f(s)$. Тогда проекции перемещений, вызванных силой $F_2$, на оси $X$, $Y$ принятой системы координат (рис. 2), и суммарные перемещения составляют

$$s_Y^{F_2} = g_2(F_2); \quad s_X^{F_2} = 0; \quad s^{F_2} = s_Y^{F_2}. \qquad (4)$$

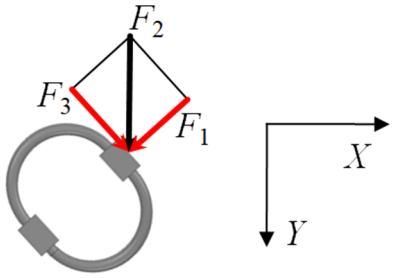



**Рис. 2.** Разложение силы $F_2$ на составляющие

И с т о ч н и к: выполнено С.В. Дорониным, Е.М. Рейзмунт, Ю.Ф. Филипповой.

**Figure 2.** Resolution of force $F_2$ into components

S o u r c e: by S.V. Doronin, E.M. Reizmunt, Yu.F. Filippova.

Для сил $F_1$ и $F_3$ соответствующие перемещения из геометрических соображений составляют:

$$s_Y^{F_1} = g_1\left(F_2 \cos 45°\right)\cos 45°;$$

$$s_X^{F_1} = -g_1\left(F_2 \cos 45°\right)\cos 45°; \qquad (5)$$

$$s_Y^{F_3} = s_X^{F_3} = g_3\left(F_2 \cos 45°\right)\cos 45°. \qquad (6)$$

Суммарные перемещения, вызванные совместным действием сил $F_1$ и $F_3$, в соответствии с принципом суперпозиции составляют:

$$s_Y^{F_1+F_3} = s_Y^{F_1} + s_Y^{F_3}; \quad s_X^{F_1+F_3} = s_X^{F_1} + s_X^{F_3};$$

$$s^{F_1+F_3} = \sqrt{\left(s_Y^{F_1+F_3}\right)^2 + \left(s_X^{F_1+F_3}\right)^2}. \qquad (7)$$

Таким образом, перемещения $s^{F_1+F_3}$ получены в результате суммирования перемещений при независимом действии сил $F_1$ и $F_3$. В силу нелинейности нагрузочных диаграмм величина $s^{F_1+F_3}$ не должна быть точно равна переме-

щению $s^{F_2}$ при действии силы $F_2$. Сравнение значений $s^{F_1+F_3}$ и $s^{F_2}$ позволяет получить оценку погрешности суперпозиции для каждой точки нагрузочной диаграммы.

Конкретизируем эти построения для нагрузочных диаграмм виброизолятора ВМТ-350 (рис. 1, *в*).

На основании оцифрованных графиков нагрузочных диаграмм путем аппроксимации получены функции $s = g(F)$, обратные к выражениям соответственно (1)–(3):

$$s = g_1(F) = 4,4911 \cdot 10^{-10} F^3 - \\ - 4,1618 \cdot 10^{-7} F^2 + 2,7674 \cdot 10^{-3} F, \\ R^2 = 0,9931; \quad (8)$$

$$s = g_2(F) = 3,0512 \cdot 10^{-12} F^3 + \\ + 4,7785 \cdot 10^{-6} F^2 + 4,0739 \cdot 10^{-3} F, \\ R^2 = 0,9996; \quad (9)$$

$$s = g_3(F) = -6,5281 \cdot 10^{-9} F^3 + \\ + 1,7722 \cdot 10^{-5} F^2 + 5,6529 \cdot 10^{-3} F, \\ R^2 = 0,9992. \quad (10)$$

Зададимся значением $F_2 = 1500$ Н, тогда $F_1 = F_3 = 1060,7$ Н. Подставляя $F_2$ в (4) с учетом (9), получим $s^{F_2} = 16,87$ мм. Значения $F_1$ при подстановке в (5) с учетом (8) дают $s_Y^{F_1} = 2,12$ мм, $s_X^{F_1} = -2,12$ мм. Подстановка $F_3$ в (6) с учетом (10) приводит к значениям $s_Y^{F_3} = s_X^{F_3} = 12,83$ мм. Тогда суммарные перемещения от действия сил $F_1$ и $F_3$ в соответствии с (7) составляют $s_Y^{F_1+F_3} = 14,95$ мм, $s_X^{F_1+F_3} = 10,71$ мм, $s^{F_1+F_3} = 18,39$.

Сравнивая $s^{F_2} = 16,87$ мм и $s^{F_1+F} = 18,39$ мм, видим, что смещения, полученные в результате суперпозиции нагрузочных диаграмм по направлениям сжатия и сдвига, оказываются больше смещений, соответствующих паспортной нагрузочной диаграмме для сжатия под углом 45°, на 9 % ($(18,39-16,87)/16,87 = 0,09$). Величину

$$\Delta_s = \left(s^{F_1+F_3} - s^{F_2}\right) / s^{F_2} 100\ \% \quad (11)$$

можно считать оценкой погрешности суперпозиции, выражающей отношение длин векторов перемещений. Отметим, что векторы $\overrightarrow{F_2}$ и $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}$ совпадают по направлению, однако векторы перемещений $\overrightarrow{s^{F_2}}$ и $\overrightarrow{s^{F_1+F_3}}$ по направлению не совпадают. Проекция перемещения $s^{F_1+F_3}$ на ось $Y$ меньше перемещения $s^{F_2}$ на 11% ($(14,95-16,87)/16,87 = -0,11$), а угол между векторами $\overrightarrow{s^{F_2}}$ и $\overrightarrow{s^{F_1+F_3}}$ составляет $\alpha = \operatorname{arctg}\left(s_X^{F_1+F_3} / s_Y^{F_1+F_3}\right) \approx 36°$ (рис. 3). Угол $\alpha$ можно интерпретировать как угловую оценку погрешности суперпозиции.

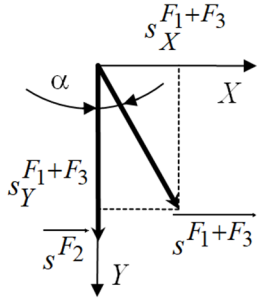



**Рис. 3.** Схема расчетных перемещений
Источник: выполнено С.В. Дорониным, Е.М. Рейзмунт, Ю.Ф. Филипповой.

**Figure 3.** Diagram of calculated displacements
Source: by S.V. Doronin, E.M. Reizmunt, Yu.F. Filippova.

Результаты аналогичных расчетов, выполненных для всего диапазона рабочих усилий (за исключением области малых значений), показаны на рис. 4. Как видно, абсолютная оценка погрешности меняется в широком диапазоне (в том числе меняет знак): от –6 до 25 % с максимумом при нагрузке, составляющей примерно 0,3 от наибольшего значения. Угловая оценка погрешности находится в диапазоне 24–36°. Поскольку все расчеты выполнены аналитически, полученные результаты иллюстрируют погрешность именно применения принципа суперпозиции к конкретной нелинейной задаче (погрешности округления пренебрежимо малы).

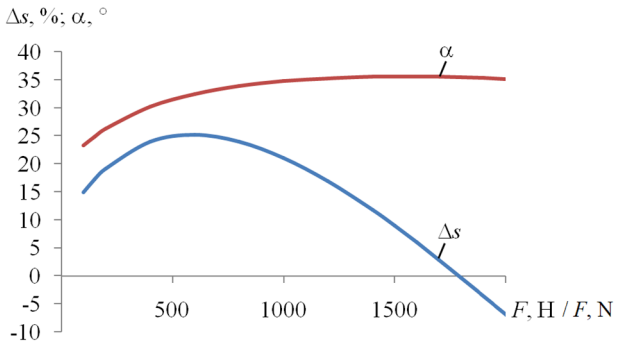



**Рис. 4.** Оценки погрешности аналитической суперпозиции нагрузочных диаграмм
Источник: выполнено С.В. Дорониным, Е.М. Рейзмунт, Ю.Ф. Филипповой.

**Figure 4.** Error Estimates for Analytical Superposition of Load-Deflection Curves
Source: by S.V. Doronin, E.M. Reizmunt, Yu.F. Filippova.

Рассматриваемые результаты получены для трех нагрузочных диаграмм, отличающихся направлением действия нагрузки с шагом 45° (0° — сжатие, 45° — сжатие под углом 45°, 90° — сдвиг).

Аналогичные построения можно выполнить для любых виброизоляторов и любых трех паспортных нагрузочных диаграмм независимо от углов приложения нагрузки.

## 3. Суперпозиция нагрузочной диаграммы с использованием численной модели виброизолятора в виде системы пружин

Ранее выполнено исследование погрешности модели тросового виброизолятора в виде системы взаимно перпендикулярных пружин [16]. Научно-методический интерес представляет реализация принципа суперпозиции с помощью этой модели для оценки взаимодействия (нарастания или взаимного поглощения) погрешностей и самого принципа суперпозиции и модели виброизолятора в виде системы пружин.

Рассмотрим модели виброизолятора в виде нелинейных пружин (рис. 5), углы между осями которых составляют 45°: одна модель представлена пружиной *2* и имитирует работу виброизолятора при сжатии под углом 45°, другая включает систему взаимно перпендикулярных пружин *1* и *3*. Построение расчетной нагрузочной диаграммы путем суперпозиции паспортных диаграмм пружин *1* и *3*, сравнение этой расчетной диаграммы с паспортной для пружины *2* позволит оценить погрешность суперпозиции. Жесткости пружин *1*, *2* и *3* заданы нагрузочными диаграммами (1)–(3) соответственно. Тогда, рассматриваемые независимо друг от друга, пружина *1* деформируется по схеме «сжатие», пружина *2* — «сжатие 45°», пружина *3* — «сдвиг» (см. рис. 1, *а*).

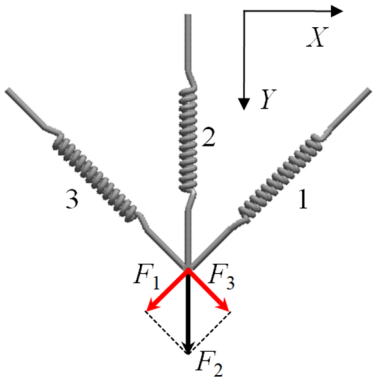



**Рис. 5.** Модели виброизолятора в виде системы пружин
Источник: выполнено С.В. Дорониным, Е.М. Рейзмунт, Ю.Ф. Филипповой.

**Figure 5.** Spring-System Models of the Vibration Isolator
Source: by S.V. Doronin, E.M. Reizmunt, Yu.F. Filippova.

Анализ выполняется в следующей последовательности. Вначале деактивируются (исключаются из расчетной схемы) пружины *1* и *3*, а пружина *2* растягивается силой $F_2$ переменной величины вдоль оси пружины. Получаемые результаты, очевидно, полностью идентичны нагрузочной диаграмме *2* (кривая *2* на рис. 1, *в*). Далее рассматривается совместная работа пружин *1* и *3* (деактивируется пружина *2*). Силы $F_1$ и $F_3$ определяются проекциями силы $F_2$ на осевые линии пружин *1* и *3*. Последовательно определяются, а затем суммируются смещения системы двух пружин при независимом действии сил $F_1$ и $F_3$ (реализация принципа суперпозиции). Сравнение смещений при нагружении пружины *2* силой $F_2$ и системы пружин *1* и *3* силами $F_1$ и $F_3$ позволяет оценить погрешность суперпозиции нагрузоч-

ной диаграммы с использованием численной модели виброизолятора в виде системы пружин.

Полученные оценки погрешности численной суперпозиции нагрузочных диаграмм показывают (рис. 6), что погрешность длины вектора перемещений $\Delta s$ находится в диапазоне −15…13 %, а угловая оценка погрешности составляет от 30 до 47 %.

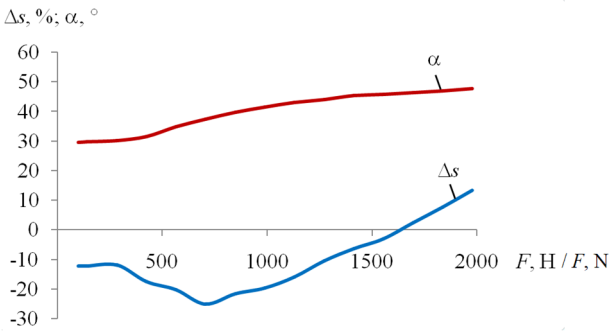



**Рис. 6.** Оценки погрешности численной суперпозиции нагрузочных диаграмм

И с т о ч н и к: выполнено С.В. Дорониным, Е.М. Рейзмунт, Ю.Ф. Филипповой.

**Figure 6.** Error Estimates for Numerical Superposition of Load-Deflection Curves

S o u r c e: made by S.V. Doronin, E.M. Reizmunt, Yu.F. Filippova.

## 4. Анализ и сопоставление результатов

При сравнении результатов оценки погрешностей аналитической (см. рис. 4) и численной (рис. 6) суперпозиции нагрузочных диаграмм виброизолятора ВМТ-350 можно отметить следующие закономерности. Угловая оценка погрешности α преимущественно возрастает с увеличением нагрузки $F$, однако численная суперпозиция приводит к монотонному росту α, а аналитическая суперпозиция демонстрирует слабовыраженный максимум в области высоких значений нагрузки. Количественное значение угловой оценки погрешности всегда больше для численной суперпозиции.

Оценка погрешности длины вектора перемещений демонстрирует наличие экстремума в узком диапазоне нагрузок (~600–700 Н), но аналитическая суперпозиция приводит к максимуму, а численная — к минимуму. По абсолютной величине наибольшие значения погрешности длины вектора перемещений при аналитической и численной суперпозиции примерно равны и составляют порядка 25 %.

Результаты суперпозиции могут быть как больше, так и меньше данных паспортной нагрузочной диаграммы. Тогда в соответствии с (11) знак $\Delta_S$ может быть как положительным $\left(s^{F_1+F_3} > s^{F_2}\right)$, так и отрицательным $\left(s^{F_1+F_3} < s^{F_2}\right)$. Из рис. 4 и 6 следует, что в большей части диапазона нагрузок аналитическая суперпозиция приводит к завышенным, а численная — к заниженным оценкам перемещений.

Ранее получены оценки погрешности модели тросового виброизолятора в виде системы взаимно перпендикулярных пружин [16]: расчетные перемещения по разным направлениям приложения нагрузки оказывались заниженными по сравнению с данными паспортных диаграмм до 19–33 %. Сравнивая эти оценки с результатами аналитической и численной суперпозиции, можно предположить, что погрешность собственно принципа суперпозиции и погрешность пружинной модели виброизолятора, имея противоположные знаки, частично компенсируют друг друга.

В целом и при аналитической, и при численной суперпозиции оценки погрешности неприемлемо велики и составляют десятки процентов: для угловой оценки во всем диапазоне рассматриваемых нагрузок, для длины вектора перемещений — в большей части этого диапазона.

## Заключение

Как известно, между подтверждением и опровержением гипотезы не существует симметрии: подтверждающие гипотезу частные случаи только повышают вероятность ее справедливости, а единственный не подтверждающий случай достаточен для ее опровержения. Таким образом, для частного случая виброизолятора ВМТ-350 с условно умеренной степенью нелинейности получение расчетных нагрузочных диаграмм путем суперпозиции нес-

кольких паспортных приводит к неприемлемо большой погрешности результата и в общем случае не может быть рекомендовано к практическому применению. Однако нельзя исключить существования подкласса виброизоляторов, рассчитанных на большую нагрузку, с незначительным уровнем нелинейности нагрузочных диаграмм, для которых принцип суперпозиции окажется практически применим и оправдан.

**Список литературы**


1. *Рейзмунт Е.М., Доронин С.В.* Возможности построения расчетных нагрузочных диаграмм спирально-тросового амортизатора при изменении направления действия сил инерции // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2024. Т. 25. № 4. С. 337–347. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-4-337-347 EDN: EPVUJA

2. *Ишлинский А.Ю.* Новый политехнический словарь. Москва : Большая Российская энциклопедия, 2000. 671 с. ISBN 5-85270-322-2

3. *Алюшин Ю.А., Вержанский П.М., Калинкин М.Н.* Управление движением навигационного робота мощностью приводов ведущих колес // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2013. № 1. С. 154–162. EDN: RAEXFF

4. *Мошенжал А.В., Тарасов В.Н.* Влияние нескольких поверхностных нагрузок на обеспечение условия сдвигоустойчивости малосвязных грунтов конструктивных слоев и оснований дорожных одежд // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2015. № 3 (39). С. 54–59. EDN: UHAENP

5. *Меркухин Е.Н.* Синтез тепловой модели на основе принципа суперпозиции температурных полей для платы микроблока электронной аппаратуры // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2016. № 10–4. С. 534–538. EDN: WWRTUJ

6. *Игнатик А.А.* Расчетно-экспериментальная оценка напряженного состояния трубопровода под воздействием изгибающей нагрузки и внутреннего давления // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2021. № 2 (146). С. 114–126. http://doi.org/10.31660/0445-0108-2021-2-114-126 EDN: QWSVMI

7. *Шеретов Ю.В.* Принцип суперпозиции решений *квазигидродинамической* системы // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 60–73. https://doi.org/10.26456/vtpmk638 EDN: JRKMNI

8. *Ларионов Е.А., Римшин В.И., Жданова Т.В.* Принцип наложения деформаций в теории ползучести // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 483–496. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-483-496 EDN: QYMJOC

9. *Корытов М.С., Щербаков В.С.* Оценка точности суперпозиции плоских моделей мостового крана при моделировании гашения пространственных колебаний груза // Вестник Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета. 2018. Т. 15. № 1 (59). С. 29–36. https://doi.org/10.26518/2071-7296-2018-1-29-36 EDN: YTMCKP

10. *Полисмакова М.Н. Сандуляк А.В.* Возможности оптимизации технических решений на основе фундаментальных базовых принципов // Универсальный дизайн — Равные возможности — Комфортная среда, 2019 : сборник докладов III Национальной науч.-практ. конф. с международным участием. Москва, 26–27 ноября 2019 года. Москва : МИРЭА — Российский технологический университет, 2019. С. 64–68. EDN: MZDDXY

11. *Руденок А.Е.* Изохронность обратимых систем с однородными нелинейностями 4-й степени // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. 2010. № 2. С. 147–150. EDN: SJFVCT

12. *Андрианов И.В.* Асимптотика нелинейных динамических систем при высокой степени нелинейности // Доклады Академии наук. 2002. Т. 386. № 2. С. 165–168. EDN: PNHQJU

13. *Детченя Л.В., Маковецкая Т.В., Садовский А.П., Трифонова И.В., Чергинец Д.Н.* Проблема центра и фокуса для кубических систем с однородными нелинейностями второй и третьей степени // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2019. Т. 9. № 1. С. 26–38. EDN: YVUINV

14. *Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В.* Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2020. Т. 9. № 1. С. 25–31. https://doi.org/10.1134/S2304487X20010046 EDN: PZCUFV

15. *Базилевский М.П., Караулова А.В*. Способ измерения степени нелинейности многофакторных полиномиальных и полиномиальных регрессионных моделей // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. 2022. № 4 (16). С. 1–9. https://doi.org/10.26731/2658-3704.2022.4(16).1-9 EDN: QOAUOW

16. *Доронин С.В., Рейзмунт Е.М.* Анализ погрешности модели тросового амортизатора в виде системы взаимно перпендикулярных пружин при статическом

нагружении // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2024. № 5. С. 547–551. https://doi.org/10.24412/2071-6168-2024-5-547-548 EDN: BGPHSK

## References

1. Reizmunt EM, Doronin SV. Possibilities of constructing design load diagrams of a helical cable shock damper when the direction of inertia forces changes. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2024;25(4):337–347 (In Russ.) http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-4-337-347 EDN: EPVUJA

2. Ishlinskij AYu. *New polytechnic dictionary*. Moscow: Great Russian Encyclopedia Publ.; 2000. (In Russ.) ISBN 5-85270-322-2

3. Alyushin YuA, Verzhansky PM, Kalinkin MN. Management of movement of the navigating robot of capacity of drives of driving wheels. *Mining information and analytical bulletin (scientific and technical journal)*. 2013;(1):154–162. (In Russ.) EDN: RAEXFF

4. Moshenzhal AV, Tarasov VN. Influence of several surface loads on shear strength of granular soil structural layers of road pavements and foundations. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2015;3(39):54–59. (In Russ.) EDN: UHAENP

5. Merkuhin EN. The Synthesis of the thermal model based on the principle of superposition of temperature fields for microblock board electronics. *International Journal of Applied and Fundamental Research*. 2016;10-4:534–538. (In Russ.) EDN: WWRTUJ

6. Ignatik AA. A computational and experimental assessment of the pipeline stress state under bending load and internal pressure. *Oil and Gas Studies*. 2021;2(146): 114–126. (In Russ.) http://doi.org/10.31660/0445-0108-2021-2-114-126 EDN: QWSVMI

7. Sheretov YuV. Superposition principle for solutions of quasi-hydrodynamic system. *Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics*. 2022;(2):60–73. (In Russ.) https://doi.org/10.26456/vtpmk638 EDN: JRKMNI

8. Larionov EA, Rimshin VI, Zhdanova TV. Principle of the overlay deformations in the theory of creep. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2019;15(6):483–496. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-483-496 EDN: QYMJOC

9. Korytov MS, Shcherbakov VS. Accuracy evaluation of the bridge crane flat models' superposition at modeling the saturation of cargo spatial vibrations. *The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 2018; 15(1):29–36. (In Russ.) https://doi.org/10.26518/2071-7296-2018-1-29-36 EDN: YTMCKP

10. Polismakova MN, Sandulyak AV. Possibilities of optimizing technical solutions based on fundamental basic principles. *Universal design — Equal opportunities — Comfortable environment, 2019;* Moscow, November 26–27, 2019. Moscow: MIREA — Russian University of Technology, 2019. p. 64–68. (In Russ.) EDN: MZDDXY

11. Rudenok AE. Isochronism of reversible systems with homogeneous nonlinearities of the 4th degree. *Bulletin of BSU. Series 1, Physics. Mathematics. Computer Science*. 2010;(2):147–150. (In Russ.) EDN: SJFVCT

12. Andrianov IV. Asymptotics of nonlinear dynamic systems with a high degree of nonlinearity. *Doklady Akademii Nauk [Reports of the Academy of Sciences]*. 2002;386(2):165–168. (In Russ.) EDN: PNHQJU

13. Detchenya LV, Makovetskaya TV, Sadovski AP, Trifonova IV, Cherginets DN. The problem of center and focus for cubic systems with homogeneous nonlinearities of the second and third degrees. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*. 2019; 9(1):26–38. (In Russ.) EDN: YVUINV

14. Kudryashov NA, Safonova DV. Exact solutions of a nonlinear differential equation with third and fifth degree nonlinearities for description of optical pulses. *Bulletin of the National Research Nuclear University MEPhI*. 2020;9(1):25–31. (In Russ.) https://doi.org/10.1134/S2304487X20010046 EDN: PZCUFV

15. Bazilevskiy MP, Karaulova AV. A method for measuring the nonlinearity degree of multivariate polynomial and posinomial regression models. *Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems*. 2022;4(16):1–9. (In Russ.) https://doi.org/10.26731/2658-3704.2022.4(16).1-9 EDN: WFVGGR

16. Doronin SV, Reizmunt EM. Analysis of cable shock damper model error in the form of a system of mutually perpendicular springs under static loading. *Bulletin of Tula State University. Engineering sciences*. 2024;(5): 547–551. (In Russ.) https://doi.org/10.24412/2071-6168-2024-5-547-548 EDN: BGPHSK

**Сведения об авторах**

***Доронин Сергей Владимирович***, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Лаборатории вычислительной механики и риск-анализа, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Российская Федерация, 660000, г. Красноярск, а/я 25515; eLIBRARY SPIN-код: 9816-9080, ORCID: 0000-0002-5256-3871; e-mail: mr.svdoronin@yandex.ru

***Рейзмунт Елена Михайловна***, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Лаборатории вычислительной механики и риск-анализа, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Российская Федерация, 660000, г. Красноярск, а/я 25515; eLIBRARY SPIN-код: 4397-1569, ORCID: 0000-0003-1631-893X; e-mail: e.sigova@gmail.com

***Филиппова Юлия Федоровна***, кандидат технических наук, научный сотрудник Лаборатории вычислительной механики и риск-анализа, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Российская Федерация, 660000, г. Красноярск, а/я 25515; ORCID: 0000-0001-7452-2096; eLIBRARY SPIN-код: 7778-5327, ORCID: 0000-0001-7452-2096; e-mail: filippovajf@ict.nsc.ru

**About the authors**

***Sergey V. Doronin***, PhD in Technical Sciences, leading researcher of Laboratory of Computational Mechanics and Risk Analysis, Federal Research Center for Information and Computational Technologies, a/z 25515 Krasnoyarsk, 660000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9816-9080, ORCID: 0000-0002-5256-3871; e-mail: mr.svdoronin@yandex.ru

***Elena M. Reizmunt***, PhD in Technical Sciences, Senior Researcher of Laboratory of Computational Mechanics and Risk Analysis, Federal Research Center for Information and Computational Technologies, a/z 25515 Krasnoyarsk, 660000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4397-1569, ORCID: 0000-0003-1631-893X; e-mail: e.sigova@gmail.com

***Yulia F. Filippova***, PhD in Technical Sciences, Researcher of Laboratory of Computational Mechanics and Risk Analysis, Federal Research Center for Information and Computational Technologies, a/z 25515 Krasnoyarsk, 660000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7778-5327, ORCID: 0000-0001-7452-2096; e-mail: filippovajf@ict.nsc.ru