

## МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СПУСКОМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ МЕТОДА СЕТЕВОГО ОПЕРАТОРА\*

**А.И. Дивеев**

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН  
ул. Вавилова, 40, Москва, Россия, 119333

**Е.Ю. Шмалько**

Кафедра кибернетики и мехатроники  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Рассмотрена задача управления спуском космического аппарата в атмосфере Земли. С помощью метода сетевого оператора ищется управление как функция координат пространства состояний. Управление обеспечивает минимум максимальной перегрузки в процессе спуска и попадание в заданную терминальную точку.

Рассматривается задача оптимального управления спуском космического аппарата, который должен попасть в заданное терминальное состояние и обеспечить минимум максимального значения перегрузки. Данная задача решалась в работах [1, 2], где с помощью численного метода было найдено управление, зависящее от времени полета. Реализация системы управления, обеспечивающей стабилизацию в окрестности оптимальной программной траектории, не может удовлетворить требованиям разработчика, так как используемая при решении задачи оптимального управления математическая модель объекта управления точно не была известна. Используемые математические выражения, описывающие воздействие силы сопротивления на аппарат, получены при сильных допущениях, а именно: не учитывается температура нагрева аппарата, атмосферные воздействия и другие факторы.

В настоящей статье решается задача синтеза системы управления космическим аппаратом. В результате разработчик должен получить управление как функцию координат пространства состояний. При решении задачи используется метод генетического программирования [3] с сетевым оператором [4].

**Постановка задачи.** Математическая модель объекта управления летательным аппаратом описывается следующей системой дифференциальных уравнений [5]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{g_0 R_z^2 x_1}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} - \frac{(1+u)S\rho_0}{m} x_2 \sqrt{x_2^2 + x_4^2} e^{-\lambda(\sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_z)}, \quad (2)$$

---

\* Работа выполнена по теме гранта РФФИ 08-08-00248-а «Исследование методов структурно-параметрического многокритериального синтеза системы автоматического управления».

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad (3)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -\frac{g_0 R_z^2 x_3}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} - \frac{(1+u)S\rho_0}{m} x_4 \sqrt{x_2^2 + x_4^2} e^{-\lambda(\sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_z)}, \quad (4)$$

где  $x_1, x_3$  — координаты центра масс космического аппарата в геоцентрической ортогональной системе координат;  $x_2, x_4$  — компоненты скорости космического аппарата,  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_4]^T \in \mathbf{R}^n$ ;  $u$  — управление,  $u \in U \subseteq \mathbf{R}^1$ ,  $m$  — масса космического аппарата,  $g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли;  $R_z$  — радиус Земли;  $S$  — площадь поверхности сопротивления;  $\rho_0$  — плотность атмосферы на поверхности Земли;  $\lambda$  — коэффициент разреженности.

Для системы (1)—(4) заданы начальные условия:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = V_0 \cos \beta_0, x_3(0) = R_z + h_0, x_4(0) = V_0 \sin \beta_0, \quad (5)$$

где  $V_0$  — модуль начальной скорости,  $h_0$  — начальная высота,  $\beta_0$  — начальный угол наклона скорости космического аппарата к плоскости горизонта.

Необходимо с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+ \quad (6)$$

обеспечить при достижении заданной высоты  $h_f$  попадание в точку, проекция которой на поверхность Земли находится на заданном расстоянии  $L_f$  от проекции точки входа, при этом минимизировать максимальную перегрузку, возникающую в процессе посадки.

Цель управления описывается следующими функционалами:

$$J_1 = \max_t \frac{(x_1^2(t) + x_3^2(t)) \sqrt{\dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_4^2(t)}}{R_z^2 g_0} \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$J_2 = \left| R_z \operatorname{arctg} \frac{x_4(t)}{x_2(t)} - L_f \right| \rightarrow \min. \quad (8)$$

Функционал (7) описывает максимальное значение перегрузки в процессе посадки, функционал (8) описывает выполнение терминального условия, обеспечивающего попадание космического аппарата в точку посадки.

Управление ищется как функция координат пространства состояния

$$u = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \quad (9)$$

где  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{q})$  — искомое математическое выражение, которое представляет собой однозначное непрерывное отображение;  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{q}): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^1$ ;  $\mathbf{q}$  — вектор искомых параметров;  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^p$ .

Решением рассматриваемой задачи (1)—(9) является множество Парето в пространстве функционалов (7), (8). Каждая точка множества Парето пред-

ставляет собой математическое выражение (9) и значение вектора параметров  $\mathbf{q}$ . Конкретная система управления определяется как одно из решений на множестве Парето, выбираемое по дополнительным критериям.

### **Синтез системы управления**

Для решения задачи синтеза используем метод генетического программирования с сетевым оператором. Сетевой оператор представляет собой ориентированный граф, который описывает математическое выражение [4]. На дугах графа заданы номера унарных операций, а в узлах графа-номера бинарных операций. Значения переменных и параметров размещаются в узлах-источниках графа. Результаты вычислений математических выражений помещаются в узлах-строках. По сетевому оператору с помощью несложного алгоритма можно правильно вычислить математическое выражение [4].

Для поиска решения задачи (1)—(9) используем генетический алгоритм, осуществляющий адаптивный поиск сетевых операторов в пространстве возможных решений, которые принадлежат множеству Парето-оптимальных решений, и векторы значений параметров.

При построении генетического алгоритма используем принцип базисного решения [4]. Данный принцип заключается в том, что задается одно базисное решение в виде сетевого оператора, описывающего математическое выражение (9). Множество возможных решений определяется множеством вариаций базисного решения. В качестве вариаций используем малые вариации графа: замена унарной операции на дуге, замена бинарной операции в узле, добавление дуги с унарной операцией, удаление дуги.

Одновременно с поиском необходимого сетевого оператора ищем вектор параметров. Для поиска вектора параметров используем классическую схему генетического алгоритма [6], в которой вектор параметров заменяется битовой строкой кода Грея.

Эффективность данного метода сильно связана с выбором базисного решения. Чем ближе базисное решение к Парето-оптимальному решению, тем эффективнее работает алгоритм. К сожалению, в работе [4] не приведены рекомендации по построению базисного решения. В прикладных примерах используется линейная обратная связь, что не может быть применимо для широкого класса задач.

### **Выбор базисного решения**

Для построения базисного решения соединим на плоскости  $\{L, h\}$  начальную  $(L_0, h_0)$  и терминальную точки  $(L_f, h_f)$  прямой линией

$$\frac{h - h_0}{h_f - h_0} = \frac{L - L_0}{L_f - L_0}, \quad (10)$$

где

$$h = \sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_z, \quad (11)$$

$$L = R_z \arctg \frac{x_1}{x_3}. \quad (12)$$

Так как  $L_0 = 0$ , преобразуем выражение (10) к виду

$$\frac{h - h_0}{h_f - h_0} = \frac{L}{L_f}. \quad (13)$$

На вход системы управления подаем отклонения от траектории (10) по положению и по углу. Вычислим данные отклонения.

Отклонение от базисной траектории по положению описывается следующим выражением:

$$y_1 = h - \left( \frac{h_f - h_0}{L_f} \right) L + h_0 \quad (14)$$

или

$$y_1 = \frac{h}{h_0} - \left( \left( \frac{h_f / h_0 - 1}{L_f} \right) L + 1 \right). \quad (15)$$

Подставим выражения (11) и (12) в формулу (15):

$$y_1 = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_z}{h_0} - \left( \left( \frac{h_f / h_0 - 1}{L_f} \right) R_z \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_3} + 1 \right). \quad (16)$$

Отклонение от базисной траектории по углу описывается следующим выражением:

$$y_2 = \gamma - \tilde{\gamma}, \quad (17)$$

где  $\gamma$  — угол наклона текущего вектора скорости КА к плоскости горизонта;

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\dot{h}}{L}, \quad (18)$$

$\tilde{\gamma}$  — угол наклона линейной траектории к плоскости горизонта от текущего положения космического аппарата до заданной терминальной точки

$$\operatorname{tg} \tilde{\gamma} = \frac{h - h_f}{L_f - L}. \quad (19)$$

Для определения соотношения (18) продифференцируем соотношения (11) и (12):

$$\dot{h} = \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}, \quad (20)$$

$$\dot{L} = \frac{R_z (x_2 x_3 - x_4 x_1)}{x_1^2 + x_3^2}. \quad (21)$$

Получаем

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(x_1 x_2 + x_3 x_4) \sqrt{x_1^2 + x_3^2}}{R_z (x_2 x_3 - x_1 x_4)}. \quad (22)$$

Подставив соотношения (19) и (22) в (17), получаем

$$y_2 = \arctg \left( \frac{(x_1 x_2 + x_3 x_4) \sqrt{x_1^2 + x_3^2}}{R_z (x_2 x_3 - x_1 x_4)} \right) - \arctg \left( \frac{\sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_z - h_f}{L_f - R_z \arctg \frac{x_1}{x_3}} \right). \quad (23)$$

Таким образом, базисное управление можно записать в виде

$$u = \begin{cases} u^+, & \text{если } z > u^+ \\ z & \\ u^-, & \text{если } z < u^- \end{cases}, \quad (24)$$

где

$$z = q_1 y_1 + q_2 y_2, \quad (25)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — компоненты вектора искомым параметров.

Выражение (25) определяет вид базисного сетевого оператора.

### Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился при следующих параметрах модели:  $m = 5000$  кг,  $g_0 = 9,81$  м/с<sup>2</sup>,  $R_z = 6371 \cdot 10^3$  м,  $S = 3,5$  м<sup>2</sup>,  $\rho_0 = 1,22$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 1,35 \cdot 10^{-4}$ ,  $\theta = 10^{-5}$ ,  $h_f = 10\,000$  м,  $L_f = 1\,400\,000$  м,  $t^+ = 300$  с при ограничении на управление  $u^+ = 0,2$ ,  $u^- = -0,2$ .

Для реализации вычислений были определены множество унарных операций

$$\mathbf{O}_1 = \{\rho_1(z), \rho_3(z), \rho_4(z), \rho_5(z), \rho_8(z), \rho_9(z), \rho_{10}(z), \rho_{14}(z), \rho_{15}(z)\},$$

где  $\rho_1(z) = z$ ;  $\rho_3(z) = -z$ ;  $\rho_4(z) = \rho_{10}(z) \cdot \sqrt{|z|}$ ;

$$\rho_5(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{если } |z| > \varepsilon \\ \frac{\rho_{10}(z)}{\varepsilon}, & \text{если } |z| \leq \varepsilon \end{cases}, \quad \text{где } \varepsilon = 10^{-7}; \quad \rho_8(z) = \frac{1 - e^{-z}}{1 + e^{-z}};$$

$$\rho_9(z) = \Theta(z), \quad \text{где } \Theta(z) \text{ — функция Хевисайда, } \Theta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0 \\ 0, & \text{если } z < 0 \end{cases};$$

$$\rho_{10}(z) = \text{sign}(z), \quad \text{где } \text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0 \\ -1, & \text{если } z < 0 \end{cases};$$

$$\rho_{14}(z) = z^3; \quad \rho_{15}(z) = \sqrt[3]{z};$$

и множество бинарных операций

$$\mathbf{O}_2 = \{\chi_1(z', z'') = z' + z'', \chi_2(z', z'') = z' \cdot z''\}.$$

Для алгоритма были заданы следующие параметры: количество элементов популяции 1000, количество поколений 200.

Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 1—3. На рис. 1 представлена Парето-область, являющаяся решением поставленной задачи. Экспертно выбрали одно решение, где  $F = 7,91$  ед. г, промах при этом составляет 40 км. На рис. 2 приведены значения перегрузки при оптимальном управлении

$$F = \frac{(x_1^2(t) + x_3^2(t))\sqrt{\dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_4^2(t)}}{R_z^2 g_0}.$$

На рис. 3 приведены значения оптимального управления.

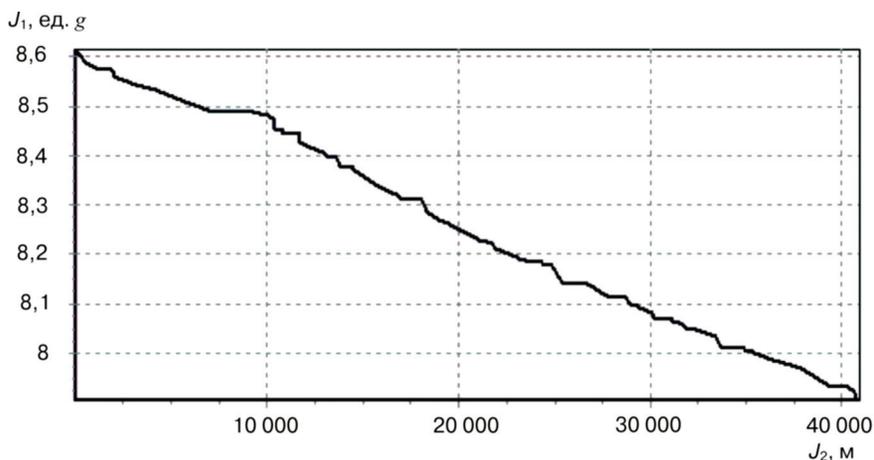


Рис. 1. Парето-область решения задачи

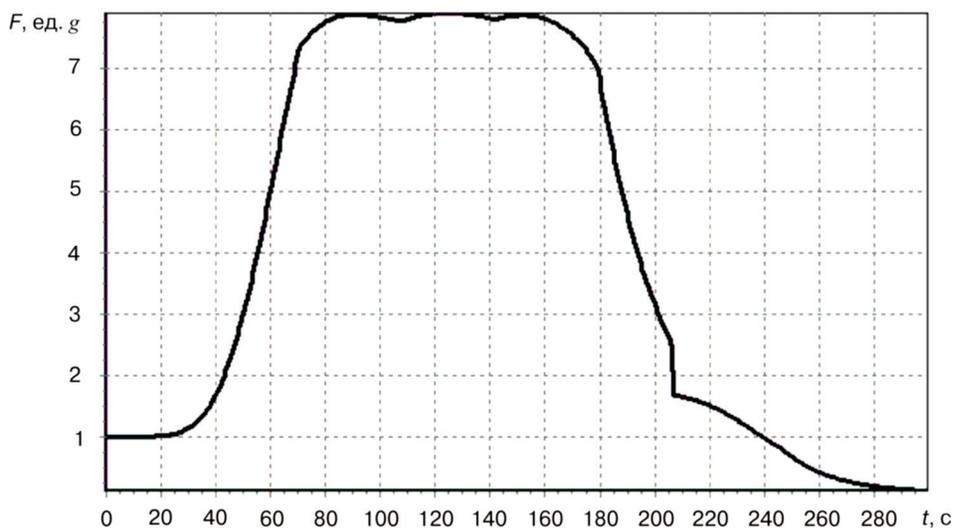
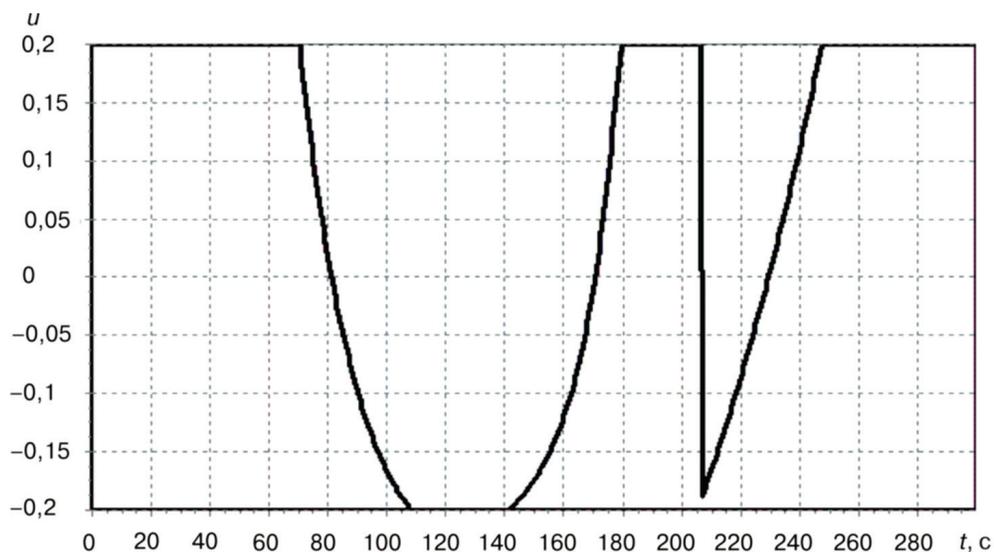


Рис. 2. Значение перегрузки при оптимальном управлении



**Рис. 3.** Значение оптимального управления

Матрица сетевого оператора, соответствующая выбранному решению, имеет вид

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица сетевого  $\tilde{\Psi}$  оператора соответствует следующему математическому выражению:

$$z = z^{(15)} - y_1,$$

где  $z^{(15)} = z^{(14)} + \rho_4(z^{(9)}) + \rho_8(y_1)$ ;  $z^{(14)} = z^{(13)} + \rho_9(y_2)$ ;  $z^{(13)} = z^{(12)} + \rho_4(z^{(11)})$ ;  
 $z^{(12)} = -z^{(10)}$ ;  $z^{(11)} = z^{(10)}$ ;  $z^{(10)} = z^{(9)} + \rho_8(y_2)$ ;  $z^{(9)} = z^{(8)}$ ;  $z^{(8)} = z^{(7)}$ ;  
 $z^{(7)} = z^{(6)} \cdot z^{(5)}$ ;  $z^{(6)} = -q_2 + y_2$ ;  $z^{(5)} = q_1 \cdot y_1$ ;  $z^{(4)} = q_2$ ;  $z^{(3)} = q_1$ ;  $z^{(2)} = y_2$ ;  
 $z^{(1)} = y_1$ ;  $q_1 = 2,259375$ ;  $q_2 = 1,953125$ .

В результате эксперимента можно сделать вывод, что полученное оптимальное управление дает результат, близкий к результату, полученному с помощью оптимального управления как функции времени, вычисленного для той же задачи с помощью метода аппроксимации кривыми Безье [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
- [2] Величенко В.В. К задаче о минимуме максимальной перегрузки // Космические исследования. — 1972. — X. Вып. 5. — С. 700—710.
- [3] Дивеев А.И., Софронова Е.А. Метод генетического программирования для автоматического подбора формул в задаче структурного синтеза системы управления // Труды института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем / Под ред. Ю.С. Попкова. — Вып. 10(1). — М.: ИСА РАН, КомКнига, 2006. — С. 14—26.
- [4] Дивеев А.И., Софронова Е.А. Метод сетевого оператора в задачах управления // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Инженерные исследования (информационные технологии и управление)». — 2007. — № 4. — С. 107—119.
- [5] Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Метод аппроксимации кривыми Безье для решения задачи оптимального управления посадкой космического аппарата // Труды института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем / Под ред. Ю.С. Попкова. — М.: ИСА РАН, КомКнига, 2007. — Т. 31 (1). — С. 8—13.
- [6] Курейчик В.М., Курейчик В.В., Гладков Л.А. Генетические алгоритмы. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. В.М. Курейчика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

## MULTICRITERIAL STRUCTURAL-PARAMETRIC SYNTHESIS OF AUTOMATED CONTROL SYSTEM FOR SPACESHIP DESCENT USING NETWORK OPERATOR METHOD

A.I. Diveev

Dorodnicyn Computer Center of Russian Academy of Sciences  
Vavilov str., 40, Moscow, Russia, 119333

E.Y. Shmalko

Cybernetics and mechatronics department  
Peoples' Friendship University of Russia  
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

Problem of automated control for spaceship descent to the Earth is considered. Control as a function of coordinates in space of system condition is received by method of network operator. It delivers minimum to maximal G-force and reaching of the defined termination point.