
ПРОЦЕДУРА КЛАССИФИКАЦИИ ОБРАЗОВ В СХЕМЕ КОНФЛЮЕНТНОГО АНАЛИЗА С КОРРЕЛЯЦИЕЙ ПОГРЕШНОСТЕЙ В РЕЗУЛЬТАТАХ ИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТ ПРИЗНАКОВ ОБРАЗОВ

А.Б. Исаев, В.Ф. Аль-Харази

Кафедра кибернетики и мехатроники
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Макляя, 6, Москва, Россия, 117198

В статье рассмотрена и решена задача построения разделяющей линии для двух классов образов, задаваемых двумерными признаками. При этом рассмотрен случай, когда все признаки отягощены случайными и систематическими погрешностями, что приводит к специфической корреляционной картине эксперимента, задаваемой заранее с помощью матрицы корреляционных моментов. С помощью численного моделирования показана более высокая точность получаемых в работе на основании модифицированного метода максимального правдоподобия оценок параметров разделяющей линии.

В работе [1] предложен алгоритм построения разделяющей функции (линии) для задачи классификации образов в условиях, когда результаты измерений всех признаков предъявляемых образов отягощены некоррелированными случайными погрешностями (конфлюентная ситуация).

Схематическое изображение решаемой задачи дано на рис. 1.

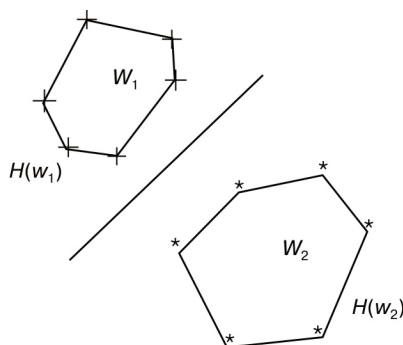


Рис. 1. Разделяющая линия для случая присутствия погрешностей в результатах измерения признаков:

W_1, W_2 — два класса образов;
 $H(W_1), H(W_2)$ — их выпуклые оболочки

Однако предложенный алгоритм пригоден для случая некоррелированных случайных погрешностей измерений признаков предъявляемых образов и не пригоден для случая, когда эти погрешности коррелируют друг с другом.

Можно показать, что причиной возникновения такой корреляционной картины выборки результатов измерения признаков может быть наличие не наблюдаемых систематических погрешностей в результатах измерения признаков. Если

ограничиться случаем линейной решающей функции (разделяющая линия), то решаемая в данной работе задача может рассматриваться как задача восстановления линейной зависимости между величинами, измеренными с погрешностями, когда последние коррелируют друг с другом. Оценки параметров a_0, a_1 линейной зависимости $\eta = a_0 + a_1\xi$ находятся с помощью метода максимального правдоподобия (ММП), модифицированного на случай обработки выборок $\{x_i, y_i\}_i^N$ с зашумленными данными

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i + u_i, \quad y_i = \eta_i + v_i, \quad Du_i = \sigma_{x_i}^2, \quad Dv_i = \sigma_{y_i}^2, \\ Mx_i &= \xi_i, \quad My_i = \eta_i = a_0 + a_1\xi_i, \quad Mu_i = Mv_i = 0, \quad i = 1, N. \end{aligned} \quad (1)$$

Для погрешности измерений величин ξ и η характерна корреляционная картина

$$\begin{aligned} \text{cov}(u_i, u_j) &\neq 0, \quad \text{cov}(v_i, v_j) \neq 0 \quad (i \neq j) \\ \text{cov}(u_i, v_j) &= 0 \quad (i, j = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (2)$$

Обычный ММП [2], примененный к экспериментальной ситуации (1), за которой закрепилось название «конфлюентная» [3], дает в этом случае смещенные и не эффективные линейные оценки для a_0 и a_1 [4]. Поэтому стандартная функция максимального правдоподобия (ФМП) должна быть модифицирована с помощью ввода в нее априорной информации (например, (1)—(2)) о различных моментах и законах распределения погрешностей и измерений величин ξ и η .

Это позволит с помощью стандартной процедуры отыскать точку (если таковая имеется) глобального максимума ФМП, построить оценки $\tilde{a}_{0m}, \tilde{a}_{1m}$ для параметров a_0, a_1 , обладающие значительно меньшим смещением и более точные, чем оценки стандартного ММП в экспериментальной ситуации, описываемой (1)—(2).

1. Рассмотрим систему $\{z_i\}_1^{2N}$ из $2N$ коррелированных нормальных величин.

1.1. Положим

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1, \quad z_2 = y_1, \quad z_3 = x_3, \quad z_4 = y_2, \dots \\ Mz_1 &= \xi_1, \quad Mz_2 = \eta_1 = a_0 + a_1\xi_1, \quad Mz_3 = \xi_2, \quad Mz_4 = a_0 + a_1\xi_2, \dots \end{aligned}$$

1.2.

$$\begin{aligned} K_{12} &= \text{cov}(z_1, z_2) = M\{(z_1 - Mz_1)(z_2 - Mz_2)\} = M\{(x_1 - \xi_1)(y_1 - \eta_1)\}, \\ K_{13} &= \text{cov}(z_1, z_3) = M\{(z_1 - Mz_1)(z_3 - Mz_3)\} = M\{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)\}, \\ K_{14} &= \text{cov}(z_1, z_4) = M\{(z_1 - Mz_1)(z_4 - Mz_4)\} = M\{(x_1 - \xi_1)(y_2 - \eta_2)\}, \dots \\ K_{ij} &= M\{(z_i - Mz_i)(z_j - Mz_j)\}, \quad K_{ij} = M(z_i - Mz_i)^2 = Dz_i, \quad i, j = \overline{1, 2N}. \end{aligned}$$

Здесь M, D — символы математического ожидания и дисперсии; $\text{cov}(\cdot)$ — второй смешанный центральный момент.

ФМП для такой системы случайных величин построим согласно принципу максимального правдоподобия, утверждающему, что наилучшим описанием явления будет то, которое дает наибольшую вероятность получить при измерении

именно те результаты, которые были фактически получены [5]. Поэтому ФМП для системы $\{z\}_1^{2N}$ в виде

$$L = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^{-1} (z_i - Mz_i)(z_j - Mz_j) \right\}, \quad (3)$$

где const — член, не зависящий от z ; K_{ij}^{-1} — элементы матрицы обратной к корреляционной матрице K_{xy} выборки $\{x_i, y_i\}_1^N$,

$$K_{xy} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1,2N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2,2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{2N,1} & K_{2N,2} & \dots & K_{2N,2N} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Эту матрицу будем считать априори известной точно. Матрица содержит практически всю априорную информацию о погрешностях измерений выборки $\{x, y\}$.

Геометрическая сторона задачи заключается в наилучшем проведении прямой $\tilde{\eta} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x$ по точкам $\{x_i, y_i\}_1^N$, содержащим коррелированные случайные погрешности. В предположении нормальности распределения этих погрешностей прямая должна быть наилучшим образом (в смысле максимальной близости к истинной $\eta = a_0 + a_1 \xi$) проведена через эллипсы рассеивания экспериментальных данных. Причем положение их центров $\{\xi_i, \eta_i\}_1^N$ и ориентация главных осей полностью определены структурой (4).

Перейдем к логарифмической ФМП $L = \ln L$:

$$L = -\frac{1}{2} Q_z = -\frac{1}{2} (Q_x + Q_y + Q_{xy}), \quad (5)$$

где с учетом 1.1—1.2 очевидно

$$Q_x = \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \xi_i}{\sigma_{xi}} \right)^2, \quad Q_y = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \eta_i}{\sigma_{yi}} \right)^2,$$

$$Q_{xy} = 2 \sum_{i < j}^N K_{ij}^{-1} (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) +$$

$$+ 2 \sum_{i < j}^N K_{ij}^{-1} (y_i - \eta_i)(y_j - \eta_j) + 2 \sum_{i < j}^N K_{ij}^{-1} (x_i - \xi_i)(y_j - \eta_j),$$

введем векторы $\bar{a}^T = [a_0, a_1]$, $\bar{\xi}^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]$, $\bar{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_N]$, $\bar{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ и матрицы $K_x^{-1} = \text{diag}\{\sigma_{x_1}^{-2}, \dots, \sigma_{x_N}^{-2}\}$, $K_y^{-1} = \text{diag}\{\sigma_{y_1}^{-2}, \dots, \sigma_{y_N}^{-2}\}$,

$$\Xi^T = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_N \end{bmatrix}.$$

Тогда (5) может быть записана в виде

$$L = -\frac{1}{2} \left[(\bar{x} - \bar{\xi})^T K_x^{-1} (\bar{x} - \bar{\xi}) + (\bar{y} - \Xi \bar{a})^T K_y^{-1} (\bar{y} - \Xi \bar{a}) + Q_{xy} \right]. \quad (6)$$

Введем Ω — область определения L по $\bar{a}, \bar{\xi}$

$$\Omega = \{ \bar{a}, \bar{\xi} \mid \bar{a}_{y/x} < \bar{a} < \bar{a}_{x/y}; \bar{\xi}_{\min} < \bar{\xi} < \bar{\xi}_{\max} \},$$

где $\bar{a}_{y/x}, \bar{a}_{x/y}$ — векторы коэффициентов МНК регрессии y на x и x на y , $\bar{\xi}_1 > \bar{\xi}_{\min}, \bar{\xi}_N < \bar{\xi}_{\max}$.

ФМП в виде (5) или (6), охватывающая случай коррелированных наблюдений в выборке $\{x_i, y_i\}_1^N$, может быть приведена к виду, удобному для доказательств. Введем $U^{2N \cdot 2N}$ действительную ортогональную матрицу. Тогда $U^T K_{xy} U = \tilde{\Lambda}$, где $\tilde{\Lambda} = \text{diag} \{ \tilde{\lambda}_{11}, \tilde{\lambda}_{22}, \dots, \tilde{\lambda}_{2N,2N} \}, \tilde{\lambda}_{ii} > 0$. Такая матрица существует, поскольку K_{xy} — действительная симметричная матрица. После этого $Q_z^* = Q_x^* + Q_y^* = (\bar{x} - \bar{\xi})^T \tilde{\Lambda}_x^{-1} (\bar{x} - \bar{\xi}) + (\bar{y} - \Xi \bar{a})^T \tilde{\Lambda}_y^{-1} (\bar{y} - \Xi \bar{a})$, причем $Q_{xy} (K_{ij}^{-1}) = 0$, $\tilde{\Lambda}_x^{-1} = \text{diag} \{ \lambda_{11}^{-1}, \lambda_{22}^{-1}, \dots, \lambda_{NN}^{-1} \}, \tilde{\Lambda}_y^{-1} = \text{diag} \{ \lambda_{N+1,N+1}^{-1}, \dots, \lambda_{2N,2N}^{-1} \}$.

Прежде чем исследовать форму L и характер ее возможного экстремума, докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть $\bar{z} \in E_n, \varphi(z)$ — непрерывная на области определения $D_a \subset E_n$ функция, E_n — вещественное евклидово пространство, область значений функции — $R_\varphi \subset E_n, T :^S$ — оператор сдвига, $T^S \varphi(z) = \varphi(z + s), s \in E_n, T^S : E_n \rightarrow E_n$. Тогда функция $Q(z) = (T^S \varphi(z), T^r \varphi(z)), s, r \in E_n$ строго выпукла.

Доказательство. $\forall z_1, z_2 \in E_n, \lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & (\lambda T^{S_1} \varphi(z_1) + (1-\lambda) T^{S_2} \varphi(z_2), \lambda T^{S_1} \varphi(z_1) + \\ & + (1-\lambda) T^{S_2} \varphi(z_2)) \leq \lambda(1-\lambda) (T^{S_1} \varphi(z_1) - T^{S_2} \varphi(z_2), \\ & T^{S_1} \varphi(z_1) - T^{S_2} \varphi(z_2)) + (\lambda T^{S_1} \varphi(z_1) + \\ & + (1-\lambda) T^{S_2} \varphi(z_2), \lambda T^{S_1} \varphi(z_1) + (1-\lambda) T^{S_2} \varphi(z_2)). \end{aligned}$$

Далее, используя линейность скалярного произведения — (,) после ряда выкладок получаем

$$\begin{aligned} & (\lambda T^{S_1} \varphi(z_1) + (1-\lambda) T^{S_2} \varphi(z_2), \lambda T^{S_1} \varphi(z_1) + (1-\lambda) T^{S_2} \varphi(z_2)) \leq \\ & \leq \lambda (T^{S_1} \varphi(z_1), T^{S_1} \varphi(z_1)) + (1-\lambda) (T^{S_2} \varphi(z_2), T^{S_2} \varphi(z_2)). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это неравенство строгое и знак равенства имеет место при $T^{S_1} \varphi(z_1) = T^{S_2} \varphi(z_2) = 0$, т.е. когда $z \in \text{Ker} T^{S_1}, \text{Ker} T^{S_2}$ (принадлежит ядрам операторов). Следовательно, $Q(z)$ строго выпукла.

Теперь нетрудно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема. ФМП z в виде (5) и (6) при априори известной корреляционной матрице K_{xy} строго вогнута на области определения Ω .

Доказательство. Если квадратичная функция общего вида $\Omega_z^* = Q_x^* + Q_y^*$, заданная на Ω , строго выпукла, то функция $L^* = -Q_z^*$ строго вогнута. Убедимся в строгой выпуклости Q_z^* .

Имеем

$$Q_\Sigma^* = Q_x^* + Q_y^* = (\tilde{\Lambda}_x^{-1/2}(\bar{x} - \bar{\xi}), \tilde{\Lambda}_x^{-1/2}(\bar{x} - \bar{\xi})) + \\ + (\tilde{\Lambda}_y^{-1/2}(\bar{y} - \Xi\bar{a}), \tilde{\Lambda}_y^{-1/2}(\bar{y} - \Xi\bar{a})),$$

где $\Xi = [\bar{1}, \bar{\xi}]$, $\tilde{\Lambda}_x^{-1/2} = \text{diag}\{\tilde{\sigma}_{x_1}^{-1}, \tilde{\sigma}_{x_2}^{-1}, \dots, \tilde{\sigma}_{x_N}^{-1}\}$,

$$\tilde{\Lambda}_y^{-1/2} = \text{diag}\{\tilde{\sigma}_{y_1}^{-1}, \tilde{\sigma}_{y_2}^{-1}, \dots, \tilde{\sigma}_{y_N}^{-1}\}.$$

Если положить последовательно

$$\varphi(\bar{\xi}) = (-1)\tilde{\Lambda}_x^{-1/2}\bar{\xi}, \quad s_1 = \bar{x}_1, \quad s_2 = \bar{x}_2, \\ T^{S_1}\varphi(\bar{\xi}_1) = \bar{x}_1 - \bar{\xi}, \quad T^{S_2}\varphi(\bar{\xi}_2) = \bar{x}_2 - \bar{\xi}_2, \\ \psi(\bar{\xi}) = -a_1\tilde{\Lambda}_y^{-1}\bar{\xi}, \quad s_1 = a_1^{-1}(\bar{y}_1 - a_0\bar{1}), \quad s_2 = a_1^{-1}(\bar{y}_2 - a_0\bar{1}), \\ T^{S_1}\psi(\bar{\xi}_1) = \bar{y}_1 - a_0\bar{1} - a_1\bar{\xi}_1, \quad T^{S_2}\psi(\bar{\xi}_2) = \bar{y}_2 - a_0\bar{1} - a_1\bar{\xi}_2.$$

Воспользовавшись теоремой, легко убедиться в строгой выпуклости Q_x^* , Q_y^* и Q_z^* по $\bar{\xi}$. Строгая выпуклость Q_z^* по \bar{a} при фиксированной $\Xi(\bar{\xi})$ очевидна.

Следовательно, Q_z^* строго выпукла на Ω , а $L = -Q_z^*$ строго вогнута. Теорема доказана.

Проиллюстрируем доказанные результаты для конкретного вида скалярного произведения в E_n и убедимся непосредственным образом в строгой выпуклости $Q(z)$.

$$\text{Рассмотрим } Q_y^* = Q(\xi) = (\Lambda_y^{-1/2}(\bar{y} - \Xi(\xi)\bar{a}), \Lambda_y^{-1/2}(\bar{y} - \Xi(\xi)\bar{a})),$$

где $\Xi\bar{a} = [\bar{1}, \bar{\xi}]\bar{a}$. Задав $(,)$ в виде $(\Lambda_y^{-1/2}(\bar{y} - \bar{\eta}), \Lambda_y^{-1/2}(\bar{y} - \bar{\eta})) =$
 $= (\bar{y} - \bar{\eta})\Lambda_y^{-1}(\bar{y} - \bar{\eta}), \bar{\eta} = \Xi\bar{a}$

и дважды дифференцируя его, получим $Q'' = \gamma^2\Lambda_y^{-1} > 0$, ибо Λ_y^{-1} матрица, и $\gamma^2 = \text{const} > 0$. Аналогично можно убедиться в строгой выпуклости $Q_x^* = (x - \xi)^T \Lambda_x^{-1}(x - \xi)$ и Q_z^* .

Таким образом, мы пришли к важному выводу: в случае самой общей структуры корреляционной матрицы K_{xy} выборки $\{x_i, y_i\}_i^N$ (полностью корре-

лированная выборка) для линейной модели $\eta = a_0 + a_1\xi$, поверхность ФМП L строго вогнута, решение максимального правдоподобия существует (существуют оценки ММП $\tilde{a}_m, \tilde{\xi}_m$) и могут быть найдены из системы уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{a}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \tilde{\xi}} = 0 \quad (7)$$

Подчеркнем, что матрица K_{xy} (все ее элементы) считаются априори известными точно и система (7) не включает в себя соответствующих уравнений для отыскивания оценок ММП элементов K_{ij} .

2. Рассмотрим одну специальную структуру матрицы K_{xy} , соответствующую не столь редкой экспериментальной ситуации, при которой существует взаимная корреляция между элементами вектора входа \vec{x} и аналогичная корреляция элементов вектора \vec{y} , а корреляция между элементами \vec{x} и корреляция между элементами \vec{y} отсутствует. Практически такая ситуация может возникнуть в тех случаях, когда экспериментатор производит измерение величины x одним прибором и одной методикой, а измерения величины y — другим прибором, другой методикой.

Справедливы следующие положения:

$$\text{cov}(x_i, y_j) = 0, \text{cov}(x_i, x_j) \neq 0, \text{cov}(y_i, y_j) \neq 0, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Тогда корреляционная матрица (4) выборки такова:

$$K_{xy} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & K_{24} & \dots & K_{2,2N} \\ K_{31} & 0 & K_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{2N,2N} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Система $N + 2$ уравнений правдоподобия с $N + 2$ неизвестными $\vec{\xi}, \vec{a}$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{a}} = 0 \Rightarrow K_{\xi} \vec{\xi} = \vec{b}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\xi}} = 0 \Rightarrow K_a \vec{a} = \vec{c}, \quad (10)$$

$$\vec{b}_{(1 \times N)}^T = \left[\frac{1}{\tilde{a}_1} \sum_{j=1}^N K_{2i2j}^{-1} (y_j - \tilde{a}_0), \dots, \frac{1}{\tilde{a}_1} \sum_{j=1}^N K_{2N2j}^{-1} (y_j - \tilde{a}_0) \right],$$

$$K_{\xi} = \begin{bmatrix} K_{22}^{-1} & K_{24} & \dots & K_{2,2N}^{-1} \\ K_{42}^{-1} & K_{44}^{-1} & \dots & K_{4,2N}^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{2N,2}^{-1} & K_{2N,4} & \dots & K_{2N,2N} \end{bmatrix},$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N K_{2i,2i}^{-1} y_i + \sum_{l=2}^N \sum_{j=l}^N K_{2l-2,2j}^{-1} (y_{l-1} + y_j) \\ \sum_{i=1}^N K_{2i,2i}^{-1} \tilde{\xi}_i y_i + \sum_{l=2}^N \sum_{j=l}^N K_{2l-2,2j}^{-1} (y_{l-1} \tilde{\xi}_j + y_j \tilde{\xi}_{l-1}) \end{bmatrix},$$

$$K_a^{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N K_{2i,2i}^{-1} + 2 \sum_{l=2}^N \sum_{j=l}^N K_{2l-2,2j}^{-1} & \sum_{i=1}^N K_{2i,2i}^{-1} \tilde{\xi}_j + \sum_{l=2}^N \sum_{j=l}^N K_{2l-2,2j}^{-1} (\tilde{\xi}_{l-1} + \tilde{\xi}_j) \\ \sum_{i=1}^N K_{2i,2i}^{-1} \tilde{\xi}_i + \sum_{l=2}^N \sum_{j=l}^N K_{2l-2,2j}^{-1} (\tilde{\xi}_{l-1} + \tilde{\xi}_j) & \sum_{i=1}^N K_{2i,2i}^{-1} \tilde{\xi}_i^2 + 2 \sum_{l=2}^N \sum_{j=l}^N K_{2l-2,2j}^{-1} (\tilde{\xi}_l \tilde{\xi}_N) \end{bmatrix}.$$

Элементы K_{ij}^{-1} , входящие в векторы \bar{b} , \bar{c} и матрицы K_ξ и K_a , рассчитываются заранее на основании корреляционной матрицы K_{xy} , составленной из элементов $K_{ij} = M[(K_i - \xi_i)(K_j - \xi_j)]$, $K_{ij} = M[(y_i - \eta_i)(y_j - \eta_j)]$, $K_{ii} = \sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2$.

Оценки ММП для a_0, a_1 находятся путем решения системы (9—10) последовательными приближениями. На основании выборочных данных $\{x_i, y_i\}_1^N$, отягощенных случайными и систематическими погрешностями, рассчитываются обычные оценки МНК — \bar{a}_0 и \bar{a}_1 , совпадающие с оценками немодифицированного ММП в случае нормального распределения. Для первого шага итерации, используя заранее рассчитанные величины элементов матрицы K_ξ и \bar{a}_0, \bar{a}_1 , из линейной по ξ системы уравнений (10) по формуле $\xi_m^{(0)} = K_\xi^{-1} \bar{b}$ находят оценки ММП для весов нулевого приближения $\tilde{\xi}_m^{(0)}$, из (9) — системы двух уравнений с двумя неизвестными — \tilde{a}_{0m} и \tilde{a}_{1m} находят оценки ММП для параметров оптимальной линии $\tilde{y} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x$, нулевые приближения — $\tilde{a}_{0m}(\tilde{\xi}_m^{(0)})$ и $\tilde{a}_{1m}(\tilde{\xi}_m^{(0)})$.

На основании этих оценок вновь из (10) уточняются значения ξ_i , компоненты оценки вектора весов первого приближения — $\xi^{(1)}$, из (9) находятся величины $\tilde{a}_{0m}^{(1)}, \tilde{a}_{0m}^{(2)}$ и т.д. Итерационный процесс останавливается при достижении на K -м шаге $\left| \left(\tilde{a}_m^{(k)} - \tilde{a}_m^{(k-1)} \right) / \tilde{a}_m^{(k)} \right| \leq \varepsilon$, где ε — заданное малое число.

Для иллюстрации устойчивости разработанного алгоритма к присутствию коррелированных случайных суммарных погрешностей у выборочных данных $\{x_i, y_i\}_1^N$ был проведен численный модельный эксперимент на ЭВМ.

Для заданной «истинной» зависимости $\eta = 4 + 3\xi$, $\xi \in [0, 2]$ генерировалась выборка $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ из нормального распределения для случайного коррелированного вектора \vec{x} , так что его элементы $x_i \sim N(\xi_i, \sigma_x^2, r_x)$, где $\sigma_x^2 = 0,04$ для всех x_i , $x = \overline{i, N}$, $r_x = r(x_i, x_{i-1}) = 0,7$ — коэффициент корреляции двух последовательных «смоделированных» результатов измерений. Аналогичным образом моделировалась выборка $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ для элементов вектора \vec{y} , так что $y_i \sim N(4 + 3\xi_i, \sigma_y^2, r_y)$, $\sigma_y^2 = 0,01$, $r_y = r(y_i, y_{i-1}) = 0,7$ — коэффициент корреляции двух последовательных «смоделированных» результатов измерений выборки. Матрица K_{xy} — корреляционная матрица выборки — заполнилась элементами, рассчитанными на основании условий моделирования с учетом (8).

$$R_{xy}^{50 \times 50} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 & 0,028 & \dots & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 & \dots & 0,028 \\ 0,028 & 0 & 0,04 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0,028 & 0 & \dots & 0,04 \end{bmatrix}.$$

Оценки МНК для смоделированной выборки $\{x_i, y_i\}_1^{25}$ $\overline{a_0} = 4,07$; $\overline{a_1} = 2,88$. Оценки ММП, найденные из (9—10), $\tilde{a}_{0m} = 4,02$; $\tilde{a}_{1m} = 2,97$. Относительные погрешности рассчитанных коэффициентов: $\overline{\delta a_0} = 1,28\%$, $\overline{\delta a_1} = 4\%$, $\overline{\delta \tilde{a}_{0m}} = 0,5\%$, $\overline{\delta \tilde{a}_{1m}} = 1\%$.

Таким образом, как показал вычислительный эксперимент, предложенный алгоритм базирующийся на функции максимального правдоподобия, учитывающей полную корреляционную картину эксперимента, позволяет получить оценки \tilde{a}_{0m} и \tilde{a}_{1m} для параметров разделяющей линии, обладающие гораздо меньшим смещением (2% и 3% соответственно), чем рассчитываемые по данной выборке оценки метода наименьших квадратов (7% и 12%) и заметно меньшими относительными погрешностями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Исаев А.Б., Мастеров С.А., Долгушин Д.Е.* К вопросу о проведении классификации образов, учитывающей погрешности в измерении признаков // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2007. — № 4. — С. 46—51.
- [2] *Себер Д.* Линейный регрессионный анализ / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.
- [3] *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981.
- [4] *Исаев А.Б.* Основные принципы конъюнктного анализа и некоторые алгоритмы обработки линейных зависимостей // Измерительная техника. — 1982. — № 10. — С. 13—16.
- [5] *Клепиков М.П., Соколов С.Н.* Анализ и планирование экспериментов методом максимального правдоподобия. — М.: Наука, 1964.

**PROCEDURE OF CLASSIFICATION OF PATTERNS
IN THE SCHEME OF CONFLUENT ANALYSIS
WITH CORRELATION OF ERRORS IN RESULTS
OF ESTIMATION OF PATTERNS COORDINATES**

A.B. Isaev, V.F. Al-Harazi

Cybernetics and Mechatronics Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

In the paper the problem of construction of dividing line for two classes of the images set by two-dimensional signs is considered and solved. The case when all signs are burdened by random and regular errors that leads to a specific correlation picture of experiment, set in advance by means of a matrix of the correlation moments is thus considered. By means of numerical simulation the accuracy received in work on the basis of modified method of the maximum credibility of estimations of parametres of a dividing line is shown.