УДК 62.50

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ — ЗАДАЧА ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ

А.И. Дивеев*, К.А. Пупков, Е.А. Софронова*****

*Учреждение Российской академии наук
«Вычислительный центр им. А.А. Дородницына» РАН
ул. Вавилова, 40, Москва, Россия, 119333

**Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана
2-я Бауманская ул., 5, Москва, Россия, 105005

***Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

Рассмотрена проблема синтеза системы управления. Показано, что классическая формулировка задачи синтеза не обеспечивает управления требуемого качества. Предложена корректная формулировка задачи синтеза управления, решение которой обеспечивает сохранение качества управления для любых начальных условий, принадлежащих заданной области. Для решения задачи синтеза предложен конструктивный вычислительный метод на основе сетевого оператора. Приведены примеры решения прикладных задач синтеза управления

Ключевые слова: синтез систем управления, оптимальное управление, сетевой оператор, генетический алгоритм.

В данной статье рассматривается задача синтеза управления, которая не входит в число известных задач тысячелетия. По мнению авторов, по сложности и важности эта задача может быть также отнесена к задачам тысячелетия. Рассмотрим ее подробнее.

Проблема синтеза систем управления заключается в том, чтобы найти управления как функцию координат пространства состояний. Принято считать, что решение задачи синтеза более практично, чем решение задачи оптимального управления, когда управление находится в виде функции времени. Кажется, что решение задачи синтеза позволяет получить управление, которое обеспечивает возможность сохранения оптимального значения критерия качества не только при заданных в постановке задачи начальных условиях, но и при изменении этих условий.

В статье показано, что если изменение начальных условий не заложено в постановку задачи, то формально решение задачи синтеза может не привести к получению управления, сохраняющего оптимальное значение функционала для различных начальных условий. Решение задачи синтеза управления для классической постановки задачи оптимального управления является неоднозначным. При решении задачи оптимального управления с заданными начальными условиями возможно построение различных управлений как функций координат пространства состояний, каждое из которых обеспечивает получение оптимального значения критерия качества.

Вполне возможно, что среди синтезированных управлений, которые являются решениями задачи оптимального управления, существует управление, которое обеспечивает сохранение оптимального значения функционала при изменении начальных условий. Для того чтобы найти такое управление, необходимо уточнить постановку задачи, а именно ввести в постановку задачи синтеза изменение начальных значений.

Постановка задачи синтеза управления. Рассмотрим классическую постановку задачи оптимального управления.

Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая динамику объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{U}$— ограниченное множество.

Заданы начальные условия

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \tag{2}$$

Заданы терминальные условия

$$\mathbf{x}\left(t_f\right) = \mathbf{x}^f, \tag{3}$$

где t_f — заданное или определяемое в процессе решения задачи время управления.

Задан функционал качества

$$J = \int_0^{t_f} f_0\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) dt \to \min. \tag{4}$$

Необходимо найти управление

$$\mathbf{u}(t) \in \boldsymbol{U},\ \ 0 \le t \le t_f, \tag{5}$$

чтобы решение системы (1) при начальных условиях (2) обеспечивало выполнение терминальных условий (3) и минимум функционала (4). Если управление ищем как функцию координат пространства состояний

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \tag{6}$$

то задачу (1) — (4), (6) называют задачей синтеза оптимального управления.

Покажем, что решение задачи синтеза в классической постановке неоднозначно.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ — решение задачи синтеза оптимального управления (1)—(4). Пусть $\hat{\mathbf{x}}(t)$ решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x})\right)$$

при начальных условиях (2).

Пусть $\forall t \in \left[0, t_f\right]$ $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \hat{\boldsymbol{X}} \subseteq \mathbb{R}^n$,

где $\hat{\boldsymbol{X}}$ область пространства $\mathbb{R}^n$, не совпадающая со всем пространством, $\mathbb{R}^n - \hat{\boldsymbol{X}} \neq \varnothing$.

Тогда функция

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \boldsymbol{X},$

также является решением задачи синтеза оптимального управления.

Доказательство. Запишем численные схемы решения систем уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x})\right)$ и $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x})\right)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_k) = \hat{\mathbf{x}}(t_{k-1}) + \Delta t \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1}), \hat{\mathbf{h}}\left(\hat{\mathbf{x}}(t_{k-1})\right)\right),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1}) + \Delta t \mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1}), \hat{\mathbf{h}}\left(\tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1})\right) + \mathbf{v}\left(\tilde{\mathbf{x}}(t_{k-1})\right)\right),$$

где Δt — шаг интегрирования, $k = 1, 2, \ldots$.

По условию теоремы $\mathbf{x}^0 \in \hat{\mathbf{X}},$ поэтому $\hat{\mathbf{x}}(t_k) = \tilde{\mathbf{x}}(t_k), \ k = 1, 2, \ldots$.

При $\Delta t \to 0$ получаем $\forall t \in \left[0, t_f\right] \quad \hat{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t).$ ■

Уточним постановку задачи синтеза управления. Пусть $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot) = \tilde{\mathbf{u}}(t),$ $t \in \left[0, t_f\right]$ — функция времени, удовлетворяющая ограничениям на управление $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in \boldsymbol{U}, \ 0 \le t \le t_f$. Пусть решение системы (1) с управлением $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$ и начальными значениями (2) обеспечивает выполнение терминальных условий (3) и минимум функционала (4). Тогда функцию $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$ называем решением задачи оптимального управления.

Задан объект управления (1).

Задана область изменения начальных значений

$$\mathrm{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Заданы терминальные условия (3). Задан функционал (4).

Необходимо найти управление в виде (6). Функция управления $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ при подстановке в систему (1) обеспечивает для любых начальных значений из заданной области $\mathbf{x}^0 \in \boldsymbol{X}_0$ такое частное решение системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})\right),$ которое удовлетворяет терминальным условиям (3) и обеспечивает возможный минимум функционала (4)

$$J\left(\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), \mathbf{x}^0\right) = J\left(\tilde{\mathbf{u}}(\cdot), \mathbf{x}^0\right), \tag{8}$$

где $J\left(\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), \mathbf{x}^0\right)$ — значение функционала (4) при управлении $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ и начальных значениях $\mathbf{x}^0 \in \mathrm{X}_0$; $J\left(\tilde{\mathbf{u}}(\cdot), \mathbf{x}^0\right)$ — значение функционала при решении задачи оптимального управления $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$ и тех же начальных значениях $\mathbf{x}^0 \in \boldsymbol{X}_0$.

Решение задачи синтеза (1)—(8) для единственного начального значения $\boldsymbol{X}_0 = \left\{\mathbf{x}^0\right\}$ называем частным решением задачи синтеза управления.

Теорема 2. Пусть $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$ — решение задачи оптимального управления (1)—(5) для начального значения $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. Пусть $\tilde{\mathbf{x}}(\cdot)$ — частное решение системы (1) при управлении $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$ и начальных значениях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. Пусть система (1) разрешима относительно $\mathbf{u}$ в окрестности частного решения $\tilde{\mathbf{x}}(\cdot)$. Тогда существует частное решение задачи синтеза.

Доказательство. Запишем систему (1) в форме конечных разностей

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k) = \Delta t\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}\right).$$

Для оптимального управления $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$ получаем

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1}) - \tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \Delta t\mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}(t_k), \tilde{\mathbf{u}}\right).$$

Так как система (1.1) разрешима относительно $\mathbf{u}$ в окрестности оптимального решения $\tilde{\mathbf{x}}(\cdot)$, то из последнего соотношения выводим

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}^{-1}\left(\mathbf{x}(t_{k+1}), \mathbf{x}(t_k)\right).$$

Из формы конечных разностей следует, что $\mathbf{x}(t_{k+1})$ определяется по значениям $\mathbf{x}(t_k)$ и $\mathbf{u}(t_k)$. Значение $\tilde{\mathbf{u}}(0)$ известно из решения задачи оптимального управления с начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. Тогда получаем частное решение задачи синтеза в виде

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{h}}\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0\right). \ \blacksquare \tag{9}$$

Покажем, что, если область начальных значений X_0 содержит конечное число точек, то решение задачи синтеза управления существует.

Теорема 3. Пусть в задаче синтеза управления (1)—(8) множество начальных значений содержит конечное число точек

$$X_0 = \left\{\mathbf{x}^{0,1}, \mathbf{x}^{0,2}, \ldots, \mathbf{x}^{0,N}\right\}. \tag{10}$$

Доказательство. Решим для каждого начального значения $\mathbf{x}^{0,i} \in \mathrm{X}_0$, $i = \overline{1,N}$, частную задачу синтеза. Решение частной задачи для каждого начального значения существует согласно теореме 2. В результате получим функции $\tilde{\mathbf{h}}^i\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{0,i}\right)$, $i = \overline{1,N}$.

Рассмотрим управление

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N}\left(1 - \theta\left(\left\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{0,i}\right\|\right)\right)\tilde{\mathbf{h}}^i\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{0,i}\right). \tag{11}$$

В момент $t = 0$ значение $\theta\left(\left\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{0,i}\right\|\right) = 0$ только если $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{0,i}$, $1 \le i \le N$, поэтому для любого допустимого начального значения $\mathbf{x}(0) \in \mathrm{X}_0$ получаем одно из частных решений задачи синтеза $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{h}}^i\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{0,i}\right)$. Управление (11) обеспечивает решение задачи синтеза с дискретным конечным множеством начальных значений (10). ■

Ответ на вопрос о существовании решения задачи синтеза управления для непрерывного множества начальных значений $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ является важнейшей задачей, которую с учетом сложности и значимости можно считать задачей тысячелетия в области теории управления. Уточним математическую постановку задачи. Заданы: система дифференциальных уравнений (1), область начальных значений (7), терминальные условия (3) и функционал (4). Необходимо доказать существование функции (6), удовлетворяющей ограничениям (5) и обеспечивающей минимальное значение функционала (4) для любого начального значения из заданной области (7). Заметим, что необходимо доказать существование одной функции для всей области начальных значений. Функция должна при определенных начальных значениях из заданной области обеспечивать получение такого же значения функционала (4), как и решение задачи оптимального управления для этого же конкретного начального значения.

Вычислительный алгоритм, который решает задачу оптимального управления, нельзя считать синтезирующей функцией, так как для нахождения решения, вычисления значения управления в следующий момент времени он применяет недетерминированное число шагов.

Известно, что для линейных управляемых систем с функционалом быстродействия решить задачу синтеза возможно, если удастся найти области переключения управления. Например, для системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u_1,$$

функционала $J = \int_0^{t_f} dt = t_f \to \min,$

терминальных условий $x_1\left(t_f\right) = 1,\ x_2\left(t_f\right) = 0,$

ограничений на управление $-1 \le u_1 \le 1$

и области начальных значений, совпадающей со всем пространство состояний

$$\mathrm{X}_0 = \mathbb{R}^n,$$

синтезирующая функция имеет вид $\tilde{u}_1 = \tilde{h}_1(\mathbf{x}) = 1 - 2\theta\left(y(\mathbf{x})\right),$

где $y\left(\mathbf{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 \ge 0 \text{ и } x_2 \ge 0, \\ x_1 - 0{,}5x_2^2, & \text{если } x_1 \ge 0 \text{ и } x_2 < 0, \\ -1, & \text{если } x_1 < 0 \text{ и } x_2 \le 0, \\ x_1 + 0{,}5x_2^2, & \text{если } x_1 < 0 \text{ и } x_2 > 0, \end{cases}$

$\theta(A)$ — функция Хевисайда,

$$\theta\left(A\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \le 0, \\ 1 \text{ — } & \text{иначе.} \end{cases}$$

В сформулированной математической задаче синтеза необходимо установить необходимые и достаточные условия существования ее решения.

Зададим на множестве начальных значений X_0 конечное число точек $\mathbf{x}^{0,1}$, …, $\mathbf{x}^{0,N}$ на расстоянии не менее величины ρ, т.е. $\forall \mathbf{x} \in \mathrm{X}_0 \;\; \exists \mathbf{x}^{0,i} \in \mathrm{X}_0,\;\; 1 \le i \le N,$ $\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{0,i} \right\| \le \rho.$ Допустим, что для заданных точек начальных значений $\mathbf{x}^{0,1}$, …, $\mathbf{x}^{0,N}$ решена задача синтеза управления. Согласно теореме 3 это возможно сделать.

Пусть существует такое число точек N или минимальное расстояние ρ, при которых найденное управление $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ удовлетворяет всем начальным значениям $\mathbf{x}^{0,1}$, …, $\mathbf{x}^{0,N}$, а при увеличении числа точек $\bar{N} > N$ или уменьшении расстояния между ними $\bar{\rho} < \rho$ вид синтезирующей функции остается неизменным, а изменяются только значения параметров $\mathbf{q}$.

Если такое управление построено, то говорим, что задача синтеза управления решена с точностью до структуры. Под структурой системы управления здесь понимаем синтезирующую функцию, определенную с точностью до значений параметров.

В общем случае для нелинейной модели объекта (1) и функционала произвольного вида не известны универсальные методы построения синтезирующей функции $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ даже для решения частной задачи синтеза. Заметим также, что синтезирующая функция $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ может явно не зависеть от начальных значений $\mathbf{x}^0$.

Численный метод решения задачи синтеза. Допустим, что решение задачи синтеза управления существует. Тогда с помощью вычислительной машины можно организовать поиск решения на множестве математических выражений, удовлетворяющих требованиям задачи.

Для воплощения идеи необходимо построить множество математических выражений

$$\boldsymbol{\Omega} = \left\{ \mathbf{g}^1(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \mathbf{g}^2(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \ldots, \mathbf{g}^K(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \right\}, \qquad (12)$$

где $\mathbf{g}^i(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ — структура математического выражения, $\mathbf{q}$ — вектор постоянных параметров, $\mathbf{q} \in \boldsymbol{Q} \subseteq \mathbb{R}^p$, $\forall \mathbf{q} \in \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{g}^i(\mathbf{x}, \mathbf{q})\colon\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g}^i(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \in \boldsymbol{U}$.

Далее следует организовать поиск структуры $\tilde{\mathbf{g}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ системы управления в множестве $\boldsymbol{\Omega}$ и значения параметров $\forall \tilde{\mathbf{q}} \in \boldsymbol{Q}$, чтобы удовлетворить решению задачи.

При численном решении задачи синтеза возникает проблема удовлетворения терминальных условий (3). Не для всех значений параметров $\mathbf{q} \in \boldsymbol{Q}$ терминальные условия могут выполняться. Для решения проблемы часто условие (3) исключают, а к функционалу (4) добавляют штраф за несоблюдение терминальных условий.

$$J = \alpha \left\| \mathbf{x}\left(t_f\right) - \mathbf{x}^f \right\| + \int_0^{t_f} f_0\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}\right)\right) dt \to \min, \qquad (13)$$

где α — весовой коэффициент.

Такой подход не совсем корректен из-за сложности выбора весового коэффициента α, сильно влияющего на решение задачи.

Другой подход при численном решении задач синтеза — это определение терминальных условий в виде дополнительного функционала. В результате для задачи синтеза имеем два функционала

$$J_1\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right) = \int_0^{t_f} f_0\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}\right)\right) dt \to \min, \tag{14}$$

$$J_2\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right) = \left\|\mathbf{x}\left(t_f\right) - \mathbf{x}^f\right\| \to \min. \tag{15}$$

Решением задачи с несколькими функционалами является множество Парето

$$\mathrm{P} = \left\{\tilde{\mathbf{g}}^1(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \tilde{\mathbf{g}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \ldots, \tilde{\mathbf{g}}^L(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right\}, \tag{16}$$

$\forall \mathbf{g}^j(\mathbf{x}, \mathbf{q}^j) \in \boldsymbol{\Omega} - \mathrm{P}$, $\mathbf{q}^j \in \boldsymbol{Q}$, $\exists \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{q}}) \in \mathrm{P}$ и $\tilde{\mathbf{q}} \in \boldsymbol{Q}$ такие, что $\mathbf{J}\left(\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{q}})\right) \le \mathbf{J}\left(\mathbf{g}^i(\mathbf{x}, \mathbf{q}^i)\right)$,

где $\mathbf{J}\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right) = \left[J_1\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right) \quad J_2\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right)\right]^T$.

Начальные условия для численного синтеза определим в виде дискретного набора точек (10). Тогда при вычислении функционалов используем дополнительные суммы по всем точкам начальных значений. Заменим функционалы (14), (15)

$$J_1\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_0^{t_f} f_0\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}\right)\right) dt \right)_{\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{0,k}} \to \min, \tag{17}$$

$$J_2\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\left\|\mathbf{x}\left(t_f\right) - \mathbf{x}^f\right\| \right)_{\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{0,k}} \to \min. \tag{18}$$

Уточним формулировку задачи численного синтеза системы управления, которую называем задачей многокритериального структурно-параметрического синтеза. Заданы модель объекта управления (1), множество точек начальных значений (10), ограничения на управление (5) и функционалы (17), (18). Необходимо найти подмножество $\tilde{\boldsymbol{P}} \subseteq \boldsymbol{P}$ множества Парето (16), которое включает возможное решение $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{q}})$:

$$J_1\left(\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{q}})\right) \approx J_1\left(\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)\right), \quad J_2\left(\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{q}})\right) \approx J_2\left(\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)\right),$$

где $J_1\left(\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)\right)$, $J_2\left(\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)\right)$ — значения функционалов (17), (18), вычисленные для оптимального управления $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$, полученного при каждом начальном значении из (10).

Успешность решения задачи синтеза управления в результате решения вычислительной задачи многокритериального структурно-параметрического синтеза зависит от мощности множества структур возможных решений (12). Чем больше множество (12), тем больше шансов найти решение задачи синтеза управления. Для построения множества возможных решений (10) используем структуру данных, сетевой оператор [1—8], который позволяет описывать математические выражения в виде ориентированного графа.

Метод сетевого оператора. Рассмотрим структуру математического выражения. В математическом выражении выделим следующие типы элементов: операции, параметры, переменные.

Среди операций выделим унарные и бинарные операции. В результате получаем конструктивные множества для построения математических выражений. Определим символы для записи элементов этих множеств.

Множество переменных

$$\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_N), \;\; x_i \in \boldsymbol{R}^1, \;\; i = \overline{1, N}. \tag{19}$$

Множество параметров

$$\boldsymbol{Q} = (q_1, \ldots, q_P), \;\; q_i \in \boldsymbol{R}^1, \;\; i = \overline{1, P}. \tag{20}$$

Множество унарных операций

$$\boldsymbol{O}_1 = \left(\rho_1(z) = z, \rho_2(z), \ldots, \rho_W(z)\right). \tag{21}$$

Множество бинарных операций

$$\boldsymbol{O}_2 = \left(\chi_0(z', z''), \ldots, \chi_{V-1}(z', z'')\right). \tag{22}$$

Среди унарных операций обязательно должна присутствовать тождественная операция $\rho_1(z) = z.$ Бинарные операции должны быть коммутативны $\chi_i(z', z'') = \chi_i(z'', z'), \;\; i = \overline{0, V-1},$ ассоциативны $\chi_i\left(z', \chi_i(z'', z''')\right) = \chi_i\left(\chi_i(z', z''), z'''\right), \;\; i = \overline{0, V-1}$ и иметь единичный элемент $\forall \chi_i(z', z'') \in \boldsymbol{O}_2 \;\; \exists e_i \;\; \Rightarrow \;\; \chi_i(e_i, z) = z,$ $i = \overline{0, V-1}$.

Запись математического выражения с помощью элементов конструктивных множеств (19)—(22) называем программной записью.

Для построения графа математического выражения программная запись должна удовлетворять дополнительным требованиям. Аргументами бинарной операции должны быть унарные операции или единица данной бинарной операции. Аргументом унарной операции должна быть бинарная операция либо элемент из множеств переменных или параметров. Аргументами бинарной операции не могут быть унарные операции, аргументами которых является одна и та же константа или переменная.

Все перечисленные требования можно удовлетворить, если дополнительно ввести в программную запись тождественную унарную операцию и единичные элементы бинарных операций.

Основное правило построения графа по графической записи математического выражения заключается в том, что унарной операции соответствует дуга графа, а бинарной операции, параметру или переменной соответствует узел графа. Подробные правила построения элементов графа приведены на рис. 1.

Сетевой оператор — это ориентированный граф с определенными свойствами. В графе отсутствуют циклы. К любому узлу, который не является источником, имеется хотя бы один путь от узла-источника. От любого узла, который не является стоком, имеется хотя бы один путь до узла-стока. Каждому узлу-источнику соответствует элемент из множества переменных **X** или из множества параметров **Q**. Каждому узлу соответствует бинарная операция из множества O_2 бинарных операций. Каждой дуге графа соответствует унарная операция из множества O_1 унарных операций.

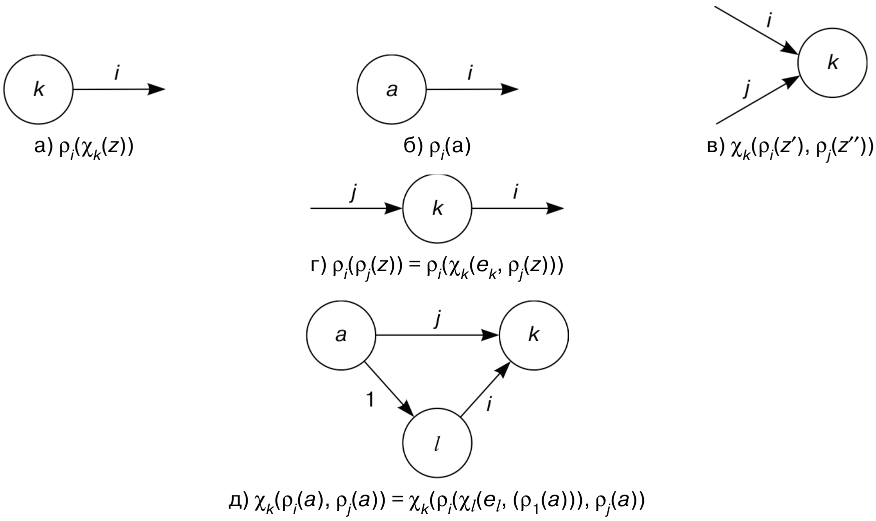

Рис. 1. Правила построения элементов графа

Рассмотрим в качестве примера математическое выражение $y = e^{-q_1 x_1}\sin(q_3 + q_2 x_2)$. Сетевой оператор данного выражения приведен на рис. 2.

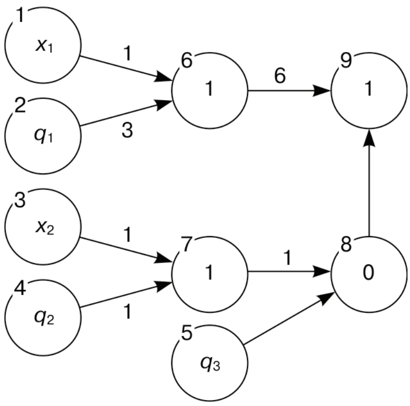

Рис. 2. Сетевой оператор

На рисунке 2 номера унарных и бинарных операций соответствуют работе [8]: $\rho_1(z) = z$, $\rho_3(z) = -z$, $\rho_6(z) = e^z$, $\rho_{12}(z) = \sin(z)$, $\chi_0(z', z'') = z' + z''$, $\chi_1(z', z'') = z'z''$.

Подробнее с правилами построения сетевого оператора по математическому выражению можно ознакомиться в работах [1—3; 5; 6; 8].

По сетевому оператору можно вычислить математическое выражение.

Теорема 4. Пусть задан сетевой оператор, построенный по графической записи. Тогда для вычисления математического выражения достаточно выполнение следующих правил:

а) вычисление унарной операции выполняем только для дуги, которая выходит из узла, не имеющего ни одной входящей в него дуги;

б) после вычисления унарной операции по дуге исключаем ее из графа;

в) вычисление бинарной операции выполняем сразу после унарной операции связанной с дугой, входящей в этот узел;

г) вычисления заканчиваются, когда в графе будут исключены все дуги $\varsigma(i,j)=0,\ i,j=\overline{1,L},\ i\neq j.$

Доказательство теоремы 4 приведено в работе [8].

Сетевой оператор является удобной конструкцией для построения множества $\boldsymbol{\Xi}$ возможных решений для задачи синтеза управления.

Пусть сетевой оператор содержит L узлов, из которых $N+P<L$ узлов-источников. Узлы, не являющиеся узлами-источниками, могут быть связаны с V бинарными операциями. Дуги могут быть связаны с W унарными операциями. Тогда можно построить не менее

$$K=V^{L-n-p}W^{L-1}\left(1+\sum_{i=1}^{G}W^{\binom{G}{i}}\right), \tag{23}$$

где $G=(L-n-p-1)\left(\dfrac{L+n+p-2}{2}\right)$, $\dbinom{G}{i}=\dfrac{G!}{i!(G-i)!}$, различных сетевых операторов.

Вывод соотношения (23) приведен в работе [8].

Для представления сетевого оператора в памяти компьютера используем целочисленную матрицу $\boldsymbol{\Psi}=\left[\psi_{ij}\right],\ i,j=\overline{1,L},$ построенную на основании матрицы смежности.

При построении матрицы сетевого оператора $\boldsymbol{\Psi}$ строим матрицу смежности графа сетевого оператора. Затем вместо единицы, указывающей на дугу графа, записываем номер унарной операции, которая связана с этой дугой. На диагонали матрицы указываем номера бинарных операций, которые связаны с узлом, соответствующим строке матрицы. В строках для узлов-источников номера бинарных операций можно не указывать. Для сетевого оператора, приведенного на рис. 2, матрица сетевого оператора имеет вид

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&6\\0&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&12\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Номера строк в матрице соответствуют номерам узлов, указанных на рис. 2 в верхней части каждого узлов. Если пронумеровать узлы так, чтобы номер узла, откуда дуга выходит, был меньше номера узла, куда дуга входит, то матрица сетевого оператора всегда будет иметь верхний треугольный вид. Согласно определению сетевой оператор не имеет циклов, поэтому такую нумерацию всегда можно сделать.

Для вычисления математического выражения по матрице сетевого оператора необходимо указать дополнительно, какие номера узлов являются узлами-источниками и каким переменным или параметрам они соответствуют.

Для вычислений математического выражения по матрице сетевого оператора вводим дополнительный вектор узлов $\mathbf{z} = \left[z_1 \dots z_L\right]^T$. Задаем ему начальные значения $\mathbf{z}^{(0)} = \left[z_1^{(0)} \dots z_L^{(0)}\right]^T$. Начальное значение компоненты вектора узлов равно соответствующему значению параметра или переменной, если узел является узлом-источником. В противном случае начальное значение компоненты вектора узлов равно единичному элементу бинарной операции, которая связана с данным узлом.

Для сетевого оператора, приведенного на рис. 2, вектор узлов имеет следующие начальные значения:

$$\mathbf{z}^{(0)} = \left[x_1 \quad q_1 \quad x_2 \quad q_2 \quad q_3 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1\right]^T.$$

Далее просматриваются по строкам все недиагональные элементы и выполняются вычисления согласно соотношению

$$z_j^{(i)} = \begin{cases} \chi_{\psi_{jj}}\left(z_j^{(i-1)}, \rho_{\psi_{ij}}\left(z_i^{(i-1)}\right)\right), \text{ если } \psi_{ij} \neq 0, \\ z_j^{(i-1)} \text{ — иначе,} \end{cases} \tag{24}$$

где $i = \overline{1, L-1}$, $j = \overline{i+1, L}$.

Компонента вектора узлов, которая соответствует узлу-стоку, содержит значения математического выражения. Для рассматриваемого примера сетевого оператора, приведенного на рис. 2, это компонента $z_9^{(8)}$.

Для решения задачи синтеза с помощью сетевого оператора с определенным количеством узлов-источников и узлов-стоков генерируем множество $\boldsymbol{\Xi}$ возможных решений. Согласно соотношению (23) множество возможных решений может быть очень большим. Множество можно увеличить, если добавить в сетевой оператор дополнительных узлов. Для рассматриваемого примера, где число переменных $n = 2$, число параметров $p = 3$, число унарных операций $W = 24$ и число бинарных операций $V = 2$, для количества узлов $L = 9$ получаем

$$K = 2^4 24^8 \left(1 + \sum_{i=1}^{18} 24^{\binom{18}{i}}\right)$$

возможных сетевых операторов или математических выражений.

Для осуществления «разумного» поиска решения среди этих выражений используем генетический алгоритм, а для сужения области поиска — принцип базисного решения. Согласно этому принципу [3—5] мы определяем вариации математического выражения в виде допустимых вариаций графа сетевого оператора и множество всех возможных решений меняем на множество вариаций одного заданного математического выражения, которое называем базисным. Тогда поиск решения сосредотачиваем в окрестности базисного решения. Если базисное решение выбрано удачно, то время поиска решения можно существенно сократить. В любом случае базисное решение можно всегда заменить хорошим решением, найденным в процессе поиска.

Принцип поиска решения на основе базисного удобен при решении практических задач синтеза управления, где структуру управления может задать инженер, руководствуясь здравым смыслом и опытом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Генетический алгоритм для многокритериального структурно-параметрического синтеза // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2007. — № 4. — С. 126—131.

[2] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Метод сетевого оператора для идентификации систем управления // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2008. — № 4. — С. 78—85.

[3] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Метод генетического программирования для автоматического подбора формул в задаче структурного синтеза системы управления // Труды института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. Вып. 10(1) / Под ред. Ю.С. Попкова. — М.: ИСА РАН; КомКнига, 2006. — С. 14—26.

[4] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Метод построения функциональных зависимостей для решения задачи синтеза оптимального управления // Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. Вып. 31(2) / Под ред. С. Попкова. — М.: ИСА РАН; КомКнига, 2007. — С. 14—27.

[5] *Дивеев А.И., Крылова М.В., Софронова Е.А.* Метод генетического программирования для многокритериального структурно-параметрического синтеза систем автоматического управления: Сб. статей «Вопросы теории безопасности и устойчивости систем». Вып. 10. — М.: ВЦ РАН. 2008. — С. 93—100.

[6] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Метод генетического программирования для идентификации систем управления // Труды VIII международной конференции «Идентификация систем и задач управления SICPRO'09». Москва 26—30 января 2009 г. — С. 529—545.

[7] *Diveyev A.I., Sofronova E.A.* Application of network operator method for synthesis of optimal structure and parameters of automatic control system // Proceedings of 17-th IFAC World Congress, Seoul, 2008, 05.07.2008 — 12.07.2008. P. 6106—6113.

[8] *Дивеев А.И.* Метод сетевого оператора. — М.: ВЦ РАН, 2010.

SYNTHESIS OF CONTROL SYSTEM — PROBLEM OF MILLENNIUM

A.I. Diveev*, K.A. Pupkov, E.A. Sofronova*****

*Institution of Russian Academy of Sciences
Dorodnicyn Computing Centre of RAS
Vavilova str., 40, Moscow, Russia, 119333

**Bauman Moscow State Technical University
2-Bauman str., 5, Moscow, Russia, 105005

***Peoples' Friendship University of Russia
Ordshonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

The problem of synthesis of control system is considered. It is shown that classical statement of the problem does not provide satisfactory quality of control. The corrected statement of the problem where solution guaranties high quality of control for any initial conditions is proposed.

Key words: synthesis of control system, optimal control, network operator, genetic algorithm.